This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

063
G519

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

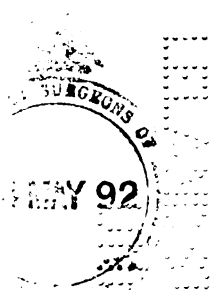
Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1890.

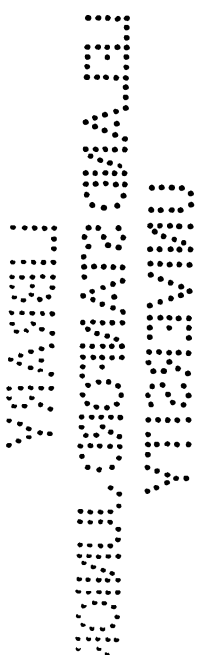
Nro. 1—16.

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.



Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1890.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.



Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1890.

Auerbach, F., Absolute Härtemessung. 518.

Bechtel, F., Kleine Aufsätze II. 29.

Brioschi, Fr., Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen. 236.

Burkhardt, H., Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades, welche bei der Transformation 3. Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten. 376.

Conze, H., zum auswärtigen Mitgliede erwählt. 557.

Drude, P., Ueber die Größe der Wirkungssphäre der Molecular-Kräfte und die Constitution von Lamellen der Plateau'schen Glycerin-Seifen-Lösung. 482.

— — und W. Nernst, Einfluß der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde. 471.

— — siehe Voigt, W.

Galitzine, B., Ueber das Dalton'sche Gesetz. 22.

Gildemeister, J., auswärtiges Mitglied, gestorben. 556.

Hartlaub, Cl., Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des Indischen Archipels. 168.

88079

Henneberg, W., ordentliches Mitglied, gestorben. 556.
Hertz, H., Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. 106.
Hurwitz, A., Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. 557.

Kielhorn, F., Die Mandasor Inschrift vom Mâlava Jahre 429 (= 472 n. Chr.) und Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra. 251.
— — Zu Daṇḍin's Kâvyâdarça III, 150. 434.
Klein, F., Zur Theorie der Laméschen Functionen. 85.
— — Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. 382

de Lagarde, P., Nachträge zu früheren Mittheilungen. 1.
— — „Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette". 95.
— — Psalm 114 im Sidrâ rabbâ. 101.
— — Exodus 1_{11}. 155.
— — Kleine Mittheilungen. 418.

Markham, Cl. R., zum Korrespondenten gewählt. 557.
Merkel, Fr., Ueber argentinische Gräberschädel. 256.
Meyer, Franz, Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. (Zweite Mittheilung). 366.
— — Dritte Mittheilung. 493.
Meyer, Leo, Etymologische Mittheilung. 76.

Nernst, W., Ueber ein neues Prinzip der Molekulargewichtsbestimmung. 57.
— — Ueber die Verteilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln. 401.
— — siehe Drude, P.
Oldenberg, H., zum Korrespondenten gewählt. 557.

Pockels, Fr., Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen. 259.
Preisstiftungen:
Beneke'sche philosophische Preisstiftung. 149.
Preisaufgaben der Gesellschaft der Wissenschaften. 216. 554.

Pettsche-Labarre'sche Stiftung.
Juristische Facultät. 153.
Preisaufgaben der Wedekind'schen Preisstiftung für deutsche Geschichte. 217.

Riecke, E., Ueber die Pyroëlectricität des Turmalins. 188.
— — Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems. 223.
— — Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systems. 342.
— — Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels. 360.
— — Das thermische Potential für verdünnte Lösungen. 437.
— — Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung. 456.
— — Moleculartheorie der Diffusion und electrolytischen Leitung. 509.

Sauppe, H., Bericht des beständigen Sekretärs der königl. Gesellschaft der Wissenschaften über das Jahr 1890. 550.
Schnitzer, E., zum Korrespondenten gewählt. 557.
Schoenflies, A., Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle. 239.

Venske, O., Ueber eine Abänderung des ersten Hermite'schen Beweises für die Transcendenz der Zahl *e*. 335.
Verzeichnisse:
Eingegangene Druckschriften. 38, 81, 154, 253, 295, 338, 383, 398, 506.
Vorlesungen. 41. 297.
Voigt, W., Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne. 159.
— — Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des brasilianischen Turmalines. 279.
— — Zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten. 502.
— — und P. Drude, Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien. 542.

Wallach, O., zum ordentlichen Mitgliede gewählt. 557.
Weingarten, J., Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen. 313.

Wieseler, Fr., Verbesserungsvorschläge zu Euripides. 66.
— — Scaenica. 200.
— — Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer. 385.
— — Nachträge dazu. 491.

Yule, H., Korrespondent, gestorben. 556.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND
- 4 MAR 90
LIBRARY

22. Januar. **№ 1.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 11. Januar 1890.

de Lagarde, Nachträge zu früheren Mittheilungen.
Riecke legt eine Arbeit des Herrn B. Galitzine in Straßburg i/E. vor: Ueber das Daltonsche Gesetz.
Bechtel legt Kleine Aufsätze, III., vor.

Nachträge zu früheren Mittheilungen

von

Paul de Lagarde.

Ignoranti portum nullus suus ventus est

citiert Giordano Bruno in den italienischen Werken 715_{86} meines Abdruckes. Ich habe 791 meiner Ausgabe gebeten, mir die Stelle nachzuweisen. Sie steht in einem von mir viel und gerne gelesenen, für die französischen Exercitien meiner Primaner einst stark benutzten Autor: am 2 November 1889 brachte mir Ulrich von Wilamowitz aus des Philosophen Seneca Briefen 71_8 Ignoranti quem portum petat, nullus suus ventus est. Die Fassung Brunos däucht mich genauer als die Senecas.

يسمل

der Ueberlieferung habe ich in meinem Abdrucke der syrischen Uebersetzung der deuterokanonischen Bücher in يسمل verwandelt,

da ܢܥܡܐ nusquam occurrit nisi ubi *νεανίσκος* in graeco est. Mein nusquam des Jahres 1861 ermäßigt sich, seit man durch ACeriani (PSmith thesaurus 1607) weiß, daß ܝܥܡܐ ab und an auch *παιδάριον* wiedergibt.

1875 schrieb ThNoeldeke in seiner mandäischen Grammatik 114 zum mandäischen ינאנק an den Rand

> Im Syr. ist ܢܥܡܐ nur im strengen Sinn *θηλάζων* . . . . doch vergleiche das wunderliche, halbgriechische ܢܥܡܐ, das in den Apocryphen des A. T. und in der hexaplarischen Uebersetzung viel zu häufig ist, als daß man es überall mit Lagarde durch ܢܥܡܐ *νεανίσκος* ersetzen dürfte, durch welches es allerdings beeinflußt ist.

Seit ich wieder mehr griechische Handschriften verglichen habe, weiß ich Bescheid. Diese Handschriften schreiben noch im zwölften Jahrhunderte *νεᾶνίσκος* (zum Beispiele mein m, der Arundelianus, von mir im August 1874 zum Besten meines Lucian verglichen): das heißt, die Griechen sahen *νεανίσκος* als eine Zusammensetzung — *νέος ἀνίσκος* — an: die Syrer begnügten sich mit dem *ἀνίσκος* allein, das sie allein doch nie gelesen hatten. Denn — und das ist das Wichtige bei den kleinen Funde — der Spiritus lenis, also das ʾ, konnte nur in der Mitte zwischen zwei Vokalen y werden. ܝܥܡܐ ist die andere Hälfte des *νε-ἀνίσκος*.

Ueber ʾ = ʿ = ʃ siehe meine armenischen Studien (1877) 2 vor der Mitte, meine Uebersicht 42[r].

Tertullianea.

Dem verstorbenen, mir persönlich unbekannt gebliebenen Herman Roensch in Lobenstein habe ich ein viertel Jahrhundert hindurch so viele Dienste geleistet, wie irgend möglich. Einer dieser Dienste war, daß ich sein Buch „das neue Testament Tertullians“ in GGA 1871 970 ff. der Aufmerksamkeit der ersten Fakultät empfahl. Bei dieser Gelegenheit, und dann abermals 1878, NGGW 1878 15 ff., als eine klägliche Ausgabe einer Schrift Tertullians Veranlassung gegeben hatte, meine Tertullianstudien hervorzusuchen, habe ich eine Reihe Verderbnisse im Texte Tertullians zu beseitigen versucht. Ich habe was ich geschrieben, damals dem jetzt verstorbenen AReifferscheid überschickt, und unglaublicher Weise sind in der von Reifferscheid begonnenen, von den Herren GWissowa und WvHartel zu Ende geführten Ausgabe des Tertullian ganzer zwei meiner Vorschläge berücksichtigt worden, der Eine allerdings nur halb. Ich bin so unbescheiden, mich mit dieser Rücksichtnahme nicht befriedigt zu halten, und lege

daher, obwohl in meinen Symmicta **1** 99 ff. **2** 2 ff. das 1871 und 1878 Veröffentlichte wiederholt worden ist, meine Vorschläge noch einmal vor.

Die von mir S[ymmicta] **2** 3 gegebene Disposition des Buches de spectaculis empfehle ich für die zweite Ausgabe des Wiener Tertullian summarisch zur Berücksichtigung.

Wiener Tertullian 2_5 Iam vero nemo est est qui non hoc quoque praetendat. Ich S 2_2 iam vero non nemo est qui hoc quoque praetendat.

W 2_{21} optatam: Ich S 2_2 tributam: die Hdss. tantam.

W 2_{25} deum norunt nisi naturali iure. Ich S **1** 100_{39} deum norunt, nec norunt nisi naturali iure. Vergleiche S **1** 101_{14}.

W 3_3 minus: Ich S 2_3 eminus.

W 4_1 vitam mit folgendem Comma. Ich S **1** 100_{42} mit folgendem Punkte. Freilich beseitigte W 4_2 das Fragezeichen.

W 5_{21} cum quid aliud [wo Herr von Hartel taliter, Herr Wissowa generaliter, die Hdss. aliter], etiam specialiter interpretari capit. Das durch den Zusammenhang verlangte generaliter habe ich schon 1878 hergestellt: S 2_3.

W 6_{19} habe ich in Folge der von mir mitgetheilten Disposition erkannt, daß ein Satz verloren gegangen ist. In der Hds. A ist eine Lücke. Die nothwendigen Punkte fehlen trotz S 2_3 noch immer.

W 8_9 superstitionis. Ich S **1** 100_{45} superstitiones. Dafür läßt W das durch B gegen den nachlässigen Agobardinus bezeugte originis fort.

W 8_{16} perinde als Conjectur des Herrn Wissowa für proinde. S 2_2 steht das seit zwölf Jahren. Natürlich gehört das jetzt in den Text gesetzte, im Agobardinus fehlende „suis ut diis“ nicht in den Text.

W 9_{22} Sessias. S **1** 101_1 Sesias.

W 17_{19} separamur. S **1** 101_5 separemur.

W 18_4 figura aus Hds. B, wo gula A. S **2** 4_7 ligula = lingula.

W 18_6 setze ich S **2** 4 hinter maledicta das Zeichen der Lücke: es fehlt der bei Tertullian, dessen Styl ich einigermaßen kenne, vom Schriftsteller selbst geschriebene, den sineSätzen der Parallelglieder entsprechende sineSatz.

W 19_{10} erubescant. Ich S **2** 4 erubescunt, wie die Hds. B sogar wirklich liest.

W 24_3 curuatur Reifferscheid, curatur B, cu....ur A, utatur Ursinus, calceatur EKlußmann. Mein gütiger Weise angeführtes

scurratur S 1 101$_8$ halte ich noch nach achtzehn Jahren für das allein richtige: das dem Worte vorausgehende Wort schließt mit s.

W 25$_{21}$ domino. Muß (S 1 101$_8$) ein Eigenname sein.

W 26$_{23}$ perinde für das überlieferte proinde. Ich S 2 4$_{16}$ schon 1878 perinde.

W 32$_{24}$ phrygio detexat. Die Hds. phrygrio testexat. Ich S 1 101$_9$ phrygiotes texat.

W 33$_{22}$ ist aus den nicht genannten S 1 101$_{10}$ das Citat Enoch 99$_6$ [des aethiopischen Textes] an den Rand gekommen, und irgend ein Gott, aber ein dummer und fahriger Gott, hat dem Herrn Reifferscheid ermöglicht, des Herrn Dillmann „Henoch 72“ daneben zu citieren. Schade nur, daß et rursus, welches Anfang des Citats, nicht Einführung desselben, ist, noch immer ungesperrt vor dem Colon steht. Gehörte et rursus dem Tertullian an, so müßte doch vor dem aus Enoch genommenen Citate ein erstes anderes Citat stehn.

W 34$_6$ mit einem Kreuze davor ubi aeque Dauid et factores. Seit 1871 stand S 1 101$_{12}$ das Richtige: ubi aeque damnat Dauit et factores. Die Hds. A soll nach den alten Vergleichungen (die Wiener schweigen) den Eigennamen davit schreiben, vor dem damnat ausgefallen ist.

Ich schließe diese Liste mit der erneueten Versicherung meines Dankes für die freundliche Aufnahme, welche meine Arbeiten aller Orten finden.

Noch einmal die Schatzhöhle.

Als ich — aus den in der Anzeige selbst angegebenen Gründen — des Herrn Bezold Ausgabe der مجدلا zu besprechen übernahm, und selbst noch, als ich wider meinen Wunsch das Buch wirklich besprach, hatte ich die 1877 von mir gehegte Absicht, die interessante Urkunde selbst zu bearbeiten, aufgegeben. Jetzt habe ich meinen alten Plan wieder aufgenommen, und halte es für nützlich, aus meinen Arbeiten wenigstens Ein Ergebnis schon jetzt mitzutheilen: es ist mir auch darum erwünscht dies zu thun, weil ich in meiner eigenen Ausgabe der مجدلا den Namen des Herrn Bezold gar nicht erwähnen möchte.

Herr Bezold hat die pariser Handschrift Arab. 54 benutzt: wie dem Herrn Bezold für September bis December 1883 nach München, so ist mir, nur auf eine kürzere Frist (zwei Monate) der Codex nach Göttingen geschickt worden. Die Untersuchung ergab Folgendes.

Cod. Parisin. Arab. 54 ist keine Handschrift der مغارة الكنوز, sondern, was der unter dem Namen de Slane laufende Catalog im § 76 auch angibt, ein Clementinum. Den Catalog besitze ich seit 1883 selbst: ich glaubte, als ich dem Herrn Minister aus Bezolds Buche die Handschrift bezeichnete, daß eine ganz andere Handschrift als die von Herrn Bezold beigezogene, mir zugehn werde. Ich bitte den, glücklicher Weise für mich behaltenen, Verdacht ab: die von dem Donauwörth-München-Londoner Gelehrten angegebene Signatur bezeichnet das Buch richtig, welches der Pariser Catalog ebenso, nur nach einer anderen Richtung hin, ungenügend beschrieben hat wie Herr Bezold.

Aber verhält sich die Sache, wie ich eben angegeben, so hatte Herr Bezold erstens die Pflicht, nicht Eine, sondern vier Pariser Handschriften der مغارة الكنوز zu benutzen, da die §§ 77 bis 79 jenes Katalogs darüber belehren, daß das in § 76 = Ancien fonds 54 beschriebene Werk noch in drei anderen Exemplaren in Paris vorhanden ist. Zweitens hatte Herr Bezold die Pflicht, seinen Lesern zu berichten, daß die مغارة الكنوز in jener Pariser Handschrift nicht als ein selbstständiges Buch, sondern als integrierender Theil der Apokalypse des Petrus enthalten ist, und zwar als integrierender Theil eines Buches, das in Frage und Antwort zwischen Clemens von Rom und Petrus verläuft. Herr Bezold, ein Schüler des verstorbenen Fleischer, hätte weiter aus Gersdorfs, wohl zu merken, eines mit allen (alten) Katalogen versehenen Oberbibliothekars, Ausgabe der Recognitiones Clementis ix ausheben müssen, was (ohne übrigens die drei anderen zu kennen) Fleischer von Einer der vier Handschriften der Apokalypse des Petrus schreibt:

> Codex ms. Parisinus, qui inter orientales num. 70. signatur, et inscribitur „Testamentum Christi domini ad Petrum et omnia mysteria quae ei revelavit, auctore S. Clemente Romano“ etc. XCI sectionibus haud pauca quidem continet, quae ex Recognitionibus excerpta esse videntur, sed confusa ea cum ineptiis variisque hallucinationibus ac permixta conquestionibus de iniuriis et malis, quibus affligebantur saeculo post Chr. natum decimo quinto Christiani in Oriente degentes a Muhamedanis.

Wo zu der Zeitbestimmung des Buches anzumerken sein wird, daß ein Werk, das schon 1176 [Archetypus des Codex 76] oder im XIIIme siècle [Codex 78] oder 1336 [Codex 76] vorhanden war, nur in dem Falle Thatsachen des funfzehnten Jahrhunderts schildern kann, daß sein Verfasser eine ganz einzige Begabung für Prophetie oder Politik besaß. Wer den Slanes Namen tragenden

neuen Katalog einsieht, erfährt, daß 70 des ancien fonds jetzt 79 heißt.

Ich muß mich hier selbst anklagen, im Juli 1888 meine Wege nicht zu Ende gegangen zu sein. Der Pariser Katalog verweist in § 76 darauf, daß die Petrus-Apokalypse auch in der Bodleiana liege, worüber das gedruckte Verzeichnis 1 2_{49} Auskunft ertheile. Hätte ich dies Citat 1888 recht erwogen, so würde ich auch — was ich hiermit nachhole — auf CTischendorfs 1866 erschienene Apocalypses apocryphae xx ff. verwiesen haben, woselbst der Inhalt des Oxforder Codex genau [was hier genau heißt] zu dem Inhalte des von mir jetzt ganz, wenn auch eilig, durchgelesenen Pariser Codex stimmend angegeben wird. Ich bin immer noch nicht mistrauisch genug: aber wenigstens Herrn Bezold gegenüber wird es mir, trotz der vielen berühmten Lehrer und Gönner desselben, nie wieder einfallen zu trauen. Herr Bezold hat auch von den zwei Oxforder Handschriften, die er benutzt hat (die andere ist nur eine moderne Abschrift der ersten) mit keiner Sylbe gesagt, daß nicht die مغارة الكنوز, sondern eine die الكنوز مغارة in sich enthaltende Apokalypse des Petrus in ihnen überliefert ist. Tischendorf citiert aaO. auch plures codices dieser arabischen Apocalypse des Petrus in Rom: sein Citat kann ich zur Zeit nicht nachschlagen. Aus Nicoll und Tischendorf ist dann weiter die Kenntnis davon zu gewinnen, was EGrabe und Luc d'Achéry aus einem Briefe des Bischofs von St. Jean d'Acre, Jacques de Vitry, mittheilen, in welchem dieser 1219 dem Papste Honorius dem Dritten meldet, daß Revelationes Petri a Clemente in unum volumus redactae ihm vorgelegt worden seien. Da nun die Pariser Handschriften 77 78 die Apokalypse des Petrus zu Nicosia „gefunden" sein lassen, liegt der Verdacht nahe, daß das Buch für die Geschichte der ersten Kreuzzüge von Belang sein werde. Ob diese Vermuthung sich bestätigen wird, kann man nur durch sorgfältiges Studium des Ganzen ermitteln, welches Studium anzustellen mir so gut wie gewis die Muße fehlen wird.

Steht die Sache so — Herr Bezold war verbunden, da Er die Handschriften doch in Händen gehabt hat, den Thatbestand uns mitzutheilen —, so dürfte *diese* مغارة الكنوز für die Kritik der صحنا nur mit großer Vorsicht zu benutzen sein: sie ist ja nicht, wie das die syrische Urschrift thut, als besonderes Buch da, sondern sie ist in ein Sammelwerk, die Offenbarung des Petrus, hineingearbeitet. Diejenigen ihrer Theile, welche über unseren syrischen Text überschießen, sind darauf hin zu prüfen, ob sie in den Plan der Apokalypse des Petrus passen: thun sie dies, so werden

sie späteren Ursprungs sein. Und auch einzelne Ausdrücke des arabischen Buchs können dem Redactor verdankt werden.

Dabei hat Herr Bezold 1 ix von dem aethiopischen „Clementinum“ als einer Uebersetzung des „Cod. Vat. Arab. 39“, eben des Codex gesprochen, welchen er seiner Ausgabe des arabischen Textes mit zu Grunde legt. Statt „Clementinum“ zwischen Anführungszeichen zu setzen (was fast wie Hohn aussieht), hätte er über die aethiopische Gestalt des Buches lieber Mittheilungen machen sollen. Allein als das Wahrscheinliche gilt mir, daß wer sich orientieren will, alle von Herrn Bezold benutzten Handschriften selbst einsehen muß, daß also auch nach dieser Richtung betrachtet, das Werk des Günstlings der Akademien von München und Berlin werthlos ist.

Aber die Verdienste des Herrn Bezold sind noch nicht genügend geschildert. Er versteht noch über andere Dinge zu schweigen als über die so eben an das Licht gezogenen. Herr Bezold hebt seine „Ausgabe“ der مغارة الكنوز mit einigen Reihen Punkten an. Ich nahm 1888 diese Punkte als das Anzeichen dafür, daß eine unerhebliche Doxologie ungedruckt geblieben sei: die Art des Drucks fand ich geschmacklos, aber nicht unerlaubt. Jetzt weiß ich, daß Herr Bezold so vorsichtig gewesen, die Einleitung wegzulassen, weil in ihr der Plan der Apokalypse als solcher auseinandergesetzt wird. Herr Bezold hat also wissentlich ein wesentliches Hülfsmittel der Belehrung beseitigt.

نبتدى بعون الله وحسن توفيقه بكتب هذا الكتاب الذى هو احد الكتب التى
لاقليمس السليح تلميذ سمعان الصفا المكتومة التى امر القديس اقليمس بسترها
عن العوام ويبدا منها بكتاب المجال: وفيه حال الانساب واشياء من السرائر التى
اوقف مخلصنا يسوع المسيح عليها سمعان ويعقوب تلميذيه. وما يكون من
الامور فى اخر الزمان. وكيف يكون مجى سيدنا المسيح الثانى من السماء الى
العالم. وما يكون من الخطا وغير ذلك ❖ وهذا الكتاب هو السادس من كتب
اقليمس المستورة المخزونة فى مدينة رومية منذ زمان الحواريين (بركة صلواتهم
تكون معنا امين) ❖ قال اقليمس القديس انه لما طلع الهنا يسوع المسيح (له
المجد) الى السماء. وتفرق التلاميذ فى اقطار الارض للبشارة واستدعاء الخليقة الى
الايمان والصبغة بالمعمودية. اتخذوا تلاميذا انتخبوهم واختاروهم ليكونوا معهم
ويتصرفوا فى البلدان كتصرفهم بالايمان بالمسيح ❖ فلذلك اتخذنى انا سمعان
الصفا لنفسه تلميذا. فامنت به وبمن ارسله حق الايمان. وايقنت انه رئيس
التلاميذ الرسل. الذى اعطى مفاتيح السموات والارض. وبنيت عليه كنيسة
الله الجامعة الرسولية التى لا تحلها ابواب الجحيم كما قال الاهنا يسوع المسيح
فى الانجيل المقدس ❖ وبعد مدة طويلة اتخذ اخرى قسطس وقسطينا له ايضا
تلميذين: وبعد عشرين سنة من اتخاذه اياى تلميذا. جمع بينى وبين والدى

ووالدتى المسماة مطروريا [so] ❖ واوقفنى على جميع السرائر التى اعطيها من يسوع المسيح على طور زيتا ❖ وكان سائر الحواريين [°يون .Hds] فى ذلك الوقت وجميع المومنين بالمسيح يلقون جهدا من الكفرة اليهود: لان اليهود كانت تقتل كل من تهيا لها قتله من المومنين ❖ وكنت ومعلمى الفاضل سمعان قد دخلنا بعض البلدان فلقينا عنتا شديدا من مناظرة اليهود والمسالة عن نسب مريم الطاهرة اذ كانت مقالتهم فيها انها ليست من ولد يهودا: ليبطلوا بذلك مجىء سيدنا المسيح الى العالم وتجسده منها وكانوا يكثرون الرشا من الاموال وغيرها لليونانيين [°نين .Hds] والروم حتى يعاونونهم على هلاك المومنين وابطال امرهم ويمنعون السليحين من قراءة التوراة: لئلا يقفون منها على حال الخليقة وكيف كانت فى البدى ❖ ولما رايت ما كنا فيه من الشدة مع اليهود. طلبت الى معلمى ان يعرفنى كيف كانت الخليقة فى الابتداء. وان يتمنى [?] على الاسباب: لانه قد كان علم كل شىء من الرب يسوع المسيح ❖ وكنت خبيرا بلسان اليونانية وكتبهم. عالما بسرائرهم. وقد اودعت ما وقفت عليه من اسرارهم كتابين مترجمين بالسابع والثامن. واعلمت معلمى ما تداخلنى من الغيرة للسيدة مرثمريم واغتمامى بتعيير اليهود اياى انى غير فهم بالتوراة وكثرة مسالتهم اياى عن خلق ابينا ادم وما اسمعه باذنى من شتمهم للسيدة مرثمريم ام النور والافتراء عليها من غير ان يتهيا حيلة ادفعهم بها عن شنيع قولهم ❖ فقلق المعلم لقلقى. وداخله لما اخبرته به الغيرة فقال. انا ناسق عليك .. يا بنى .. كلما سالتنى عنه وموقفك على الامور منذ ابتداء الخليقة ومعرفك نسب ام الرحمة مريم الطاهرة وصحته وانها بغير شك من نسل يهودا بن يعقوب وسبطه. ومعلمك السرائر والسبب الذى كان فى سقوط الشيطان الاركون من السماء ❖ اعلم .. يا بنى .. ان الرب هو الابتداء وقبل الابتداء الذى هو غير محدود. المتعالى فوق العلا. المستوى العلى ليس له اسفل ولا داخل ولا خارج الذى هو قبل القبل الجوهر القديم الذى ليس له حد ولا يلحقه عقل ولا يدركه تمييز ولا صفة كان فوق الكون ومع الكون واسفل من الكون الجوهر الخالق الضوء البهى الذى لا تلحقه الظلمة النور الساكن فى النور الذى لا تلحقه الابصار. قبل الخلق كان وهو مكون الاكوان الذى مجده منه وبه وبذاته. الخالق ما يسبحه لتعرف ربوبيته واقتداره. صنع السماء والارض وخلق قبل ايقاع تفصيل الاشياء ملائكة يسبحونه عشر طغمات جيشه اعنى بذلك عشرة مراتب. وكانت المرتبة العليا القريبة الى كرسى الرب الله جل وعز القائمة للتسابيح مرتبة ساطانائل الذى هو الاركون وكانت التسابيح ترتفع الى الله عز وجل من جميع الملائكة ❖

Die Hds. schwankt in dem Namen *'Ιούδα* zwischen د und ذ. In مرتمريم مرثمريم das entsprechende Schwanken.

Zufällig habe ich das Unglück, des vielbewunderten Herrn Keßler Mani 332 aufzuschlagen (dazu ARahlfs GGA 1889$_{910}$): wenn ich dieses Gelehrten Vermuthungen über das allerdings verderbte und von Flügel, Roediger und Müller nicht erkannte مرمريم

[Fihrist 327 $_{31}$] bedenke, scheint mir nöthig die Trivialität herzuschreiben, daß مرثمريم des eben mitgetheilten Textes = مذنبا مذنبم das mit مرمريم gemeinte ist: *die Dame Maria*[1]).

Noch mehr. Im Pariser Codex finden sich auch in dem von Herrn Bezold veröffentlichten Theile Stellen, in welchen auf die von Herrn Bezold unterschlagene Einleitung dadurch Bezug genommen wird, daß des Petrus und des Clemens gedacht wird. Ich lege den Thatbestand vor.

P = pariser Codex 76 (alt 54),

B = zweiter Band des Herrn Bezold.

P 11^{1} $_{30}$ وكان وقوفى يا بنى اقليمس على خبر ادم, auf والقدس B 43 $_{9}$ folgend. B 43^{r} „in P hier noch ein Zusatz: s. Anm. 223“. Herr Bezold hätte 1888 nicht vergessen sollen, daß er 1883 über die Zahl 217 mit den Anmerkungen nicht hinausgekommen ist. Also kann sich auch Niemand aus der Anmerkung 223 belehren.

P 24^{2} $_{2}$ ولما عاين يا بنى اقليمس هولاء الملوك. B 151 $_{7}$ druckt Herr B aus dem Vaticanus, führt aber am Rande die Lesart Ps, jedoch nur bis zu dem unmittelbar vor البرارى stehenden Worten an. Dadurch verschwindet Clemens auch am Rande.

P 25^{2} $_{7}$ وامر هذه الرويا يا بنى اقليمس غير مشكل على اهل المعرفة. B 161 $_{1}$ وهذا يا ابنى اقليميس هو مكشوف لمن يفهم. Hier druckt Herr Bezold aus V: also ist auch V ein PseudoClementinum, und auch das hat dieser Gelehrte verschwiegen. Uebrigens kann man denselben Schluß aus B 107^{r} machen, wo ebenfalls in V die Anrede *o mein Sohn Clemens* als Variante erscheint.

P 26^{1} $_{1}$ واعلم يا بنى انه لم يقدم يعقوب على تقبيل راحيل الا بعد كشفه البير وسقيه غنمها منها وكذلك اقول انا بطرس لن يجوز الخ B 161/163 ولم يكن يقبلها حتى كشف البير واسقا الغنم. Varianten werden von Herrn Bezold nicht verzeichnet: Clemens ist mithin auch für einen Arabisch lesenden Theologen beseitigt.

P 27^{1} $_{11}$ فانظر يا بنى اقليمس كيف من الخ. B 169 $_{5}$ (am Rande erwähnt man, daß beide Codices كهنوه [für كهنوت] schreiben, des Clemens gedenkt man nicht) فانظر الان فان الخ.

P 28^{2} $_{17}$ وفى اخبار العبرانيين يا بنى اقليمس ان فى عصر حيرام. B 181 $_{7}$

---

1) Der Fluß Stranga der Akten des Archelaus ist, seit ARahlfs schrieb, in EWBudges History of Alexander the Great 75 = 134 $_{8}$ zum Vorscheine gekommen. Der اصطخر = Stranga muß östlich vom Tigris, nicht zu weit von Arbela, fließen. Unter den von FchDelitzsch „wo lag das Paradies“ 185 ff. aufgezählten Nebenflüssen des Tigris dürften nur die beiden Zâb in Betracht kommen. Doch ich gerathe in GHoffmanns Arbeitsgebiet.

ohne Varianten (apage, Clemens) والعبرانيين يقولون فى اخبارهم انه فى عصر حيرام.

P 29 1 5 وانت يا بنى اقليمس وسائر اليونانيين. B 183 6 وانت يا ابنى اقليميس الخ. Da Herr Bezold 183r aus V انتم für وانت angibt, ist auch der Vaticanus ein PseudoClementinum.

P 33 2 5 حتى وقفت على صحتها من كتب العبرانيين المستورة وانا اقص عليك يا بنى اقليمس ذلك. B 211 10 ebenso, nur ابنى اقليميس, was eine Variante nicht ist.

P 33 2 21 ومن اجل معرفتنا يا بنى اقليمس بنسب السيدة مريم وانتساب ابائها. B 213 14 ebenso, nur ابنى اقليميس بنسل, was eine Variante nicht ist.

P 34 1 18 واسمع الان يا ايها الابن المبارك. B 217 5 ebenso.

P 35 2 18 اعلم يا بنى اقليمس. B 229 1 اعلم يا ابنى ohne Variante. Also ist Clemens wieder ein Mal beseitigt.

P 36 1 8 فتامل يا بنى اقليمس ما قد شرحته لك. B 229 12 ebenso, nur ابنى اقليميس, und ohne قد.

P 36 1 8 واعلم = B 229 18.

P 37 1 1 ايها الاخ والابن المبارك. B 235/237 ايها الاخ الحبيب والابن المبارك.

P 37 2 2 يا بنى اقليمس. B 239 7 يا ابنى اقليميس.

Sollte Herr Bezold wirklich befugt gewesen sein, nachdem er in seiner Einleitung verschwiegen hatte, daß die von ihm benutzten arabischen Handschriften nicht Handschriften der مغارة الكنوز, sondern ein unter vielem Anderen (wie dem Testamente Adams) auch die مغارة الكنوز enthaltendes Clementinum sind, mit keinem Worte dieser *Varianten* — ausdrücklich — zu gedenken, in denen der Araber den von dem Syrer nicht erwähnten Clemens nennt? Es vergleicht doch so leicht Niemand das Original mit einer noch dazu erbärmlich herausgegebenen Uebersetzung so genau, daß er ohne Herrn Bezolds ausdrücklichen Fingerzeig an den angezogenen Stellen den Clemens von Rom entdeckte. Herr Bezold war so schlecht geschult, daß er gar nicht merkte, was der Werth dessen war, was er zum Theile ausmerzte, zum Theile tot schwieg.

Ich schreibe nunmehr — nicht die P 51 2 ff. stehende Liste der von Petrus dem Clemens geweißagten 70 Haeresien, welche mit Arius und Apollinarius schließt —, sondern einige andere Stellen aus.

Zuerst aus einer Königsliste 54 1 7 ملك راس اسمه هاذ وهو هذا هرقل اخر ملك يكون قبل غضبى . . . . يبطل هذا الملك الناموس المستقيم وحوش القفار والبرية التى اخلاق الحمير الوحشية التى لا عقول nach welchem

لها einbrechen. Heraclius starb erst am 11 März 641: die wilden Thiere der Wüste (Genesis 16 12) hatten 630 angefangen, OstRom zu bedrohen und zu berauben: das richtige Gesetz dürfte der Monophysitismus, also das über dessen Vernichtung klagende Buch die Arbeit eines Monophysiten sein.

Weiter in dem Aufsatze über den (aus dem Stamme Dan geborenen) Antichrist 87 2 Ende die Deutung der Zahl χξς der Apocalypse 13 18 aus koptischem ⲙⲁⲙⲉⲧⲓⲟⲥ, griechischem σαραπαος.

Drittens die sich mit den Recognitiones am nächsten berührende Stelle 111 2 ff.

[111 2] وانا اقليمس اقول ان المعلم الصفا صاحب خزائن السماء والارض اجتاز [اختار .Hds] ببعض سواحل البحر وكان معه اندراوس ويوحنا وفيلبس وجماعة من السبعين وانا غلام واقف على ساحل البحر ابكى لما كان نالنى من المحن ٭ فقال الاخوة للمعلم بطرس. يجب ان نعرف قضية هذا الغلام: فاقبل الى معلمى بطرس وقال لى. ما الذى يبكيك.. ايها الغلام.. ومن اين انت. ومن ابوك. ومن امك ∴ وكان كلامه لى بكلام اهل رومية ٭ فقلت انا له. من انت .. يا شيخى ∴ فانى ما رايت احدا منذ خرجت من بلدى رومية يتكلم بلسانها سواك: ولى اليوم ثلثة ايام واقفا فى هذا الموضع لم يسالنى احد عن خبرى غيرك: لانه لم يجتاز بى احد يعقل ما اكلمه به. ولا اعقل انا ايضا بما يكلمنى به ٭ فقال لى المعلم. انا بطرس رئيس تلاميذ يسوع المسيح ٭ وبشرنى ببشرى الانجيل. فامنت على يديه واعمدنى باسم الاب والابن والروح القدس ومسحنى بالمارون الذى اعطاه سيدى والهى يسوع المسيح (فانه كان محتفظا به عنده) وعلمنى الناموس الواجب على المومنين بالمسيح. واظهر لى السرائر التى قد تقدم ذكرها ∴ وكتبتها عنه وخزنتها عندى. واستودعنى الكتب (اعنى الصحائف) المكتوبة بيد الهنا ومخلصنا يسوع المسيح. وقدمنى على جميع تلاميذه: لانه قد كان فيهم اخوان فسطس وقسطنطينس. ولم اكن بهما عارفا. وجعلنى خازنا على السرائر كما جعله الهى يسوع المسيح خازنه عليها. وصرت له كاتبا باللسان الرومى واليونانى: ولم يكن سيدى يسوع المسيح كشف له خبرى. ولا من اين كنت. ولا سالنى عن ذلك الا من بعد مدة طويلة [112 1] عند مصيره الى مدينة اللاذقية. وذلك بعد انتخاب الرب شاوول المسمى بولس الرسول: فان بولس كان سائرا فى الطريق الى دمشق لاخراب كنائس الله بها ونفى المومنين به عنها. فترايا له يسوع المسيح الرب فى طريقه واعما بصره. فقال بولس عند ذلك. يا رب.. من انت ∴ فقال له الرب. شاوول شاوول.. لماذا تودينى وتعاندنى ∴ فقال شاوول. ابن [IV] لى .. يا رب .. من انت. لاومن بك: فقال له الرب. انا يسوع المسيح الناصرى الذى انت حريصا على مجاهدته ٭ فامن حينئذ بولس. وعند امانه امره المسيح بالانطلاق الى دمشق وقصد حنانيا احد التلاميذ. فانه كان هناك. ليرد اليه بصره: فامتثل امره. وقصد حنانيا. وعمده [II] وابرى بصره ٭ وبينما معلمى بطرس داخلا الى الى مدينة اراواد التى من عمل اللاذقية ∴ اذ راى امراة جالسة على بابها تسال

الصدقة: فقال لها. ايتها الامراة .. لماذا تسالى الصدقة ∴ فانى ارى لك قوة تستطيعين بها العمل والتمعيس: فقالت له .. ايها الشيخ الجليل .. لو قد تعلم ما انا فيه. وتقف على قصتى ∴ كنت تدعوا الى بالموت لاستريح: وكان دموعها تجرى على خديها ❊ فقال لها المعلم. ما قصتك .. ايتها الامراة ∴ فقالت .. ايها الشيخ الكريم .. انا امراة من مدينة رومية من بنات الملوك. متزوجة رجل يقال له خرسطوس. وكان لى منه ثلثة اولاد يقال لهم قسطس وقسطنطينا واقليمس. فرايت مناما حملنى تاويله على انى ركبت واولادى البحر لنقصد اما مدينة اثينا واما مدينة بيروطس تقدير [?] لتتعلم اولادى باحدى هاتين المدينتين [112a] الحكمة: وكان الكبير من اولادى قسطس والاوسط قسطنطينا. وانى حملت معى هاذين فى المركب وتركت الابن الصغير (وهو اقليمس) عند ابيه: فانكسرت بنا المركب. وطرحتنى الامواج على لوح من المركب الى هذا الساحل منذ سنين. وما عرفت لاحد من اولادى خبرا [خبر .Hds]. وانا حيرانة جالسة على هذا الباب اسال خبز الصدقة ❊ وكان المعلم بطرس قد وجه [II] اخوتى الى مدينة اللاذقية فى حاجة له. فجلسا فى طريقهما على باب مدينة ارواد واسندا ظهورهما الى حائط باب المدينة يتحدثان من حيث تسمعهما الامراة المتصدقة. فكان فيما قال احدهما لصاحبه. لنا .. ايها الاخ .. فى تلمذة هذا الاب القديس سنين كثيرة ما عرف احد منا صاحبه ولا وقف على مكان مولده من المدن: فقال قسطس. اما انا فرجل من اهل رومية من قرابات الملك. وكنا ثلثة اخوة. وكان لنا والد يقال له جرسطوس [so] وام يقال لها مطرودیا [الصحيح مطرادورا am Rande von erster Hand]. وكان لى اخان احدهما طريدى يقال له قسطنطينا واخر يقال له اقليمس. وهو الاصغر. فرات والدتى رويا خرجت من اجلها عن مدينة رومية. واخذتنى واخى قسطنطينا وتركت الصغير اقليمس قبل والدنا: فركبنا البحر. فعصفت علينا الرياح وكسر بنا المركب. وسلمت انا الى بعض السواحل وما عرفت لاخى خبرا [خبر .Hds] ولا لوالدتى الى هذه الغاية: فقال له اخوه. ما اشبه [اسبه .Hds] هذا الحديث بحديثى. فانى ايضا من اهل رومية. ومثل هذه الصفة كانت قصتى حتى كسر بنا فى البحر ❊ فلما سمعت المراة حديثهما ∴ وثبت اليهما ووقعت عليهما وبكيت وقالت. حى هو الله الذى انتما تعبداه [113a] انكما اولادى وانا امكما مطرادورا. وحدثتهما [وحدتهما .Hds] بخبرها واعطتهما علامات وقفا عليها: وكنت انا اقليمس فى ذلك الوقت فى مدينة اللاذقية وصارت والدتنا الى المعلم بطرس وقالت له. وحق الرب الذى انت تعبده .. يا شيخ .. ان تلميذيك هاذين ابناى. وانا والدتهما ❊ وقصت على بطرس قصتهما: فدعا لها المعلم وقال. انا اسال الهى يسوع المسيح الذى اراك ولديك هاذين ∴ وجمع بينك وبينهما ∴ ان تجمع بينك وبين والدها واخيهما الاخر ❊ ثم وافيت انا اقليمس من المدينة. وكانت روح القدس قد قالت للمعلم بطرس ان يسالنى عن قصتى ومن اين بلدى. فقال لى. انت .. يا بنى .. معى فى خدمة المسيح الرب منذ سنين كثيرة لم اسالك عن بلدك وعن قصيتك. وقد امرنى روح القدس ان

اسالك عن ذلك فبحق المسيح الهنا اما صدقتنى عن قصتك على صحتها. وقصصت على قصتك: وكان اخوتى قد مضيا الى المدينة فى بعض الحاجات ❖ فلما سمعت والدتى بقصتى. وانا اقصها على معلمى بطرس الى انقضاءها. رمت نفسها على وقالت وحق الاله الذى تعبده. انك ابنى وانا امك: ثم قالت للمعلم القديس. هذا ابنى اقليمس الصغير الذى ذكرته لك ❖ ومضى المعلم بطرس بنفسه الى المدينة فى طلب اخوتى واتانى بهما. ونظرا الى وانا اتكلم مع والدتى فانكرا على ذلك. لانى منذ تتلمذت معهما. ما كلمت امراة. وقالا للمعلم بطرس اما ترا اقليمس يكلم امنا. فلما سمعت امنا كلامها. اعنقتنا [113²] جميعا [جميع .Hds] وبكت بكاء شديدا وبكا معلمنا بطرس بحرقة وعرف بعضنا بعضا [بعض .Hds]. وقلنا للمعلم. نحن نعلم ان المسيح يستجيب دعاك ويعطيك كلما تساله. فاساله ان يعرفك خبر والدنا. اهل هو حى او ميت ❖ فقال لنا المعلم. انا اسال سيدى يسوع المسيح ان يبعث بوالدكم اليكم. ان كان حيا [حى .Hds]. وان كان ميتا. ضرعت اليه فى اقامته من قبره حتى يجتمع معكم عندى ❖ وقام المعلم بطرس فصف قدميه واستقبل الشرق وقال. الهى وسيدى يسوع المسيح الذى هبطت من سماء قدسك وتجسدت من العذرى المختارة مرثمريم لتخلص بتجسدك ادم البالى. وانت الذى اعطيتنا سلطانا على جميع الاشياء. وانت الذى خولتنى مفاتيح الملك. وان احل واربط واغفر الخطايا. وانت الذى قلت لنا. اذا نحن امنا بك. صنعنا اكثر من العجائب التى صنعتها بين يدى اليهود. وانت اقمت العازر من الموت من بعد اربعة ايام كان فيها مقبورا. وانت اقمت ابنة يوراس وابن الارملة من الموت. فاسمع دعاى كما اوعدتنى. وارحم تلاميذى هاولاء وامهم. وابعث اليهم والدهم حيا كان ام ميتا ❖ وكان فى ذلك الوقت باللادقية علم فم احم [und خ على مراحم .Rd] rechts davon, jetzt verwischt und rechts beschnitten ر.....م...خ] فلما فرغ من صلاته. نظرنا الى سحاب هائلة منيرة. وصوت يسمع منها ويقول. اخرج اخرج الى اولادك: ونظرنا الى شيخ خارج من الوادى الذى هناك بهى [? يهى .Hds] المنظر. عليه ثياب ليست بالشريفة. وشعره ابيض مصفوف [مظفور .Rd. pr. m] كالصوف النقى: فبدر اليه المعلم بطرس وقال له. ايها الشيخ .. انت منا او من غيرنا: لانه توهمه [114¹] من الارواح النجسة فقال له باللسان الرومى. انا انسان مثلك .. يا شيخ: فقال له. اعطينى خبرك. ومن اين انت: فقص عليه قصته ❖ فلما سمعت انا اقليمس واخوتى كلام الشيخ. قلنا للمعلم ان هذا والدنا. وان المسيح قد قبل دعاك فى رده علينا: فقال. نعم هذا ابوكم. وقال للشيخ ان هولاء اولادك ❖ فسقط علينا وعانقنا وبكا ❖ فقال له المعلم بطرس. اريد ان تعطينى الان خبرك وكيف كان سبب مجيئك الى هاهنا: فقال له. لما فقدت اولادى وامهم معهم (ومن منذ فقدتهم اثنين وعشرين سنة). كنت اخرج فى كل يوم من منزلى برومية الى ساحل البحر واسال اصحاب المراكب والتجار عن خبرهم. فما وجدت احدا [احد .Hds] اعطانى لهم خبرا [خبر .Hds]:

فلما كان فى هذا اليوم . كنت واقفا على ساحل البحر على رسمى . اذ هبت ريح عاصف . ورايت سحابة عليها شاب واقف يضىء وجهه كما يضىء نور الشمس اضعافا . وهو يقول .. ايها السحاب .. احملى الشيخ الى بطرس رئيس تلاميذى : فحملتنى تلك السحابة . وخلائق من الناس ينظرون الى وينعجبون . وما زلت عليها كالنائم الى ان وقفت عند هذا الوادى . ولى منذ فارقت رومية ساعة واحدة . وما ادرى فى هذا الوقت فى اى بلدة انا ❖ فقال له المعلم . انا بطرس اقل تلاميذ المسيح . وهو الشاب الذى رايته على السحابة : ودعاه الى الايمان . فامن : ولم يكن فى موضعنا ذلك ماء . فضرب بطرس المعلم بعصاه الوادى الجاف الذى هناك . فجاءنا ماء جار . وهى فى ذلك الوادى الى هذا الوقت [114²] عين تعرف بعين سمعان : وعمده [II] فيها بسم الاب والابن والروح القدس ورشمه بالدهن المقدس الذى اعطاه المسيح الاهه وقبله هو من المعمودية : ودخلنا من ذلك الموضع الى اللادقية واقمنا بها سنين كثيرة نكرز ببشارة الانجيل . وامن على ايدينا خلق كثير من الناس لا يحصون كثرة . ثم رجعنا الى يروشليم واجتمعنا هناك مع سائر التلاميذ . وامر المعلم بطرس لوالدى ولوالدتى بالمقام بياروشليم ❖

Ich muß mich kurz fassen, und hebe deshalb nur Einen Punkt hervor. Des Clemens Mutter heißt bei Rufin Mattidia, in dem von mir herausgegebenen syrischen Texte Metrodora: ich habe aus diesem Metrodora schon 1855 [jetzt: gesammelte Abhandlungen 145 10] geschlossen, daß dieser Text nach NordWestKleinAsien gehört, wie ich aus dem in den *διατάξεις* ε 20 sich findenden Datum Symmicta 1 68 19 (so auch JFreudenthal ebenda 118 26) geschlossen habe, daß die ersten sechs Bücher der *διατάξεις* in Ephesus zu Hause sind: worauf GBickell in der Innsbrucker Zeitschrift 3 392ʳ aufmerksam gemacht hat. Indem ich hier für die auch in diesem Falle mir bewiesene Theilnahme öffentlich quittiere, mache ich geltend, daß unser Araber wie mein Syrer von Metrodora redet. Dieses Arabers قسطس = Constans und قسطنطينا oder قسطنطينس = *Κωνσταντῖνος* ist erst in Aegypten durch Verwechselung von ف und ق aus *Φαῦστος* und *Φαυστιν[ιαν]ός* entstanden: der Vater des Clemens heißt dem Araber خرسطوس oder جرسطوس für خوسطوس in Folge einer Verwechselung von ܦܘܣܛܘܣ mit ܟܘܣܛܘܣ. Daß ich 1864 erwiesen habe, daß und wie unsere Faustsage aus der Clemenssage entstanden (darüber GESteitz in den Studien und Kritiken 1867 556 ff.) — jetzt Mittheilungen 1 47 ff. —, darf ich wohl in die Erinnerung zurückrufen, nachdem sehr zu meiner Freude unlängst Ulrich von Wilamowitz (Euripides Herakles 1 284 ff.) darauf zu reden gekommen ist. Meine deutschen Schriften 163.

Den kitâb almagâll erläutere man sich aus ASprengers Muhammed 1 94. Ich bemerke zum Schlusse nur, daß der abgedruckte Text aus Einer Handschrift genommen ist, nicht, was ich

zu thun außer Stande war, aus den sechs oder noch mehreren, welche vorhanden sind. An jeder deutschen Universität werden die Mitglieder der ersten Fakultät Gelehrte finden, welche ihnen das Mitgetheilte übersetzen. Ich habe keine Muße eine Uebersetzung zu liefern, und hätte an dieser Stelle keinen Raum, eine Uebersetzung zu veröffentlichen.

Es ist mir unwahrscheinlich, daß ich die مغارة الكنوز je drucken werde: denn nicht sie liegt in den bis jetzt bekannten Handschriften vor, sondern ein neben vielem Anderen auch sie enthaltendes Sammelwerk, die Apokalypse des Petrus, zu dessen Bearbeitung ich in meinen Jahren, und durch die „Gönner“ noch so weit ab von meinem Ziele, mir Zeit zu nehmen mich nicht mehr für berechtigt erachte. Das syrische Original hoffe ich im zweiten oder dritten Bande meiner Bibliotheca Syriaca zu veröffentlichen. Vom ersten Bande dieser Bibliotheca sind zwanzig Quartbogen bereits gedruckt[1]).

ܒܪ = վեր.

In den gesammelten Abhandlungen 24₈ habe ich ܒܪܢܝܡܐ κνημίς aus վեր = persischem بر = उपरि und ܢܝܡܐ = awestischem נאמנא (vgl. سرجنبه und վերնագաւառ) erklärt. Mit վեր بر anhebende Wörter sind im Armenischen und NeuPersischen häufig: jeder Eranisch redende Syrer kannte ihrer eine Menge.

Wie wir *superklug*, *superfein* bilden, bildeten die Syrer ܒܪ ܕܘܢܒܐ Schwanzriemen, ܒܪ ܠܒܐ Brustriemen (Hoffmanns Glosse 2612), ܒܪ ܥܩܒܐ = ܒܪ ܕܘܢܒܐ und (trotz des von PSmith 598 angeführten ܒܪܐ ܕܒܢܘܬܐ) das in meinen Mittheilungen 3 204 behandelte ܒܪ ܓܘܪܐ ܒܪܢܫܐ: ܒܪ ܙܪܐ = الزبرق Elias aus Nisibis 13₁ = Praetermissa 36₂₄.

Für „Lautphysiologen“ wird von Interesse sein, daß in بادرنب und in باشورة das ر verschwunden ist. Analog ist, daß in ܕܘܫܒܐ (das doch ܕܘܪܫܒܐ sein wird) ܪ zu ܘ geworden.

אסר

habe ich in meiner Uebersicht 178₁ für وثاق erklärt. Ich habe, in

1) Der uns im December 1889 leider entrissene Bischof von Durham, JBLightfoot, hatte die Absicht, die Recognitionen des Clemens herauszugeben. Er hatte zu diesem Behufe durch einen deutschen Gelehrten die zwei, in Italien liegenden, Haupthandschriften des Buches vergleichen heißen. Am 24 Oktober 1885 bat er mich um mein Material, das er nicht vollständig kannte, andererseits aber auch überschätzte. Da Lightfoot unverheirathet war, weiß ich — nach WWrights Tode — nicht, an wen seine Manuscripte gekommen sind. Sollten die eben erwähnten Collationen mittheilbar sein, so bitte ich auf diesem Wege, sie mir nicht vorzuenthalten.

höchster Eile schreibend, und mit einem schwer kranken, seitdem verstorbenen Setzer kämpfend, »ܦܕܬܐ« für mich anzuführen vergessen: »ܚܡܬܐ« zu יָחֵם wie »ܦܕܬܐ« zu وفد. Als Einzelform ist ܦܕܐ = fidat anzusetzen. הָאֵפֹד und ܦܕܬܐ sind selbstständige Wörter: um so wichtiger ist die Uebereinstimmung der Wurzel. وافد *Anwalt* „der Unterhändler, welcher kommt um die Freilassung zu erwirken“, Wellhausen Vaqidi 390r. אָפַד stammt von אֵפֹד, nicht אֵפֹד von אָפַד. الفرجية ܦܕܬܐ Elias aus Nisibis 13 1 = Praetermissa 36 26. Die فرجية erklärt RDozy supplément 2 248 robe flottante, faite ordinairement de drap, à manches amples et longues qui dépassent un peu l'extrémité des doigts, et qui ne sont point fendues. Dozy schöpft *hier* schweigend aus EWLanes thousand and one nights 4 41 = 1 288 [1883], aus dem er noch hätte beifügen müssen Is is worn chiefly by persons of the learned professions. Castle citiert Avicenna 2 33 29.

Der Codex des ben Ascher

ist von mir in meinen Mittheilungen 2 50 ff. am 1 Juni 1886 erwähnt worden. Seitdem ist mir des Herrn Wickes, im Mai 1887 erschienenes treatise on the accentuation of the prose books of the old testament, und in ihm ein Lichtbild Einer Seite jenes Codex vor Augen gekommen. Danach gehört der Codex nach Deutschland, und stammt aus dem vierzehnten Jahrhunderte, ist also für die Wissenschaft werthlos. Ich bitte, den Dresdener Codex des תנ"ך, den ich einmal im Hause gehabt, und Tafel 41 des Oriental Series des Palaeographical society zu vergleichen: wobei man allerdings zu bedenken haben wird, daß das Bild des Herrn Wickes sehr stark verkleinert ist.

Cai[a]phas

ist von mir in der Uebersicht 97r 111r besprochen worden, an welchen Stellen ich Iohannes 11 49 18 14 hätte beiziehen müssen. Nicht bekannt war mir, als ich über ܩܝܦܐ und ܩܝܦܐ handelte, daß ich gegen Herrn IDérenbourg aus Fränkel-Graetzens Monatsschrift 21 257 eine Mittheilung des Herrn Perles hätte anführen können, welcher aus Nathans עָרוּךְ einen קַיָּף als zum בית קנתרוס [= τοῦ Κανθηρᾶ] gehörig namhaft macht. Ich habe nicht die nöthige Muße, nachzusuchen, ob des Herrn Perles Aufsatz der ersten Fakultät bekannt geworden ist: ich habe nur meine eigene Unwissenheit hier gut machen wollen.

Wenn Herr Kautzsch was ich in den Mittheilungen 1 116 über die bei Matthaeus 27 46 Marcus 15 34 vorliegenden Varianten

gesagt habe, in der Grammatik des biblisch-Aramäischen 11 mit dem Satze abfertigt „de Lagarde findet in dem Ganzen einen Beweis für frühzeitige systematische Correcturen im neutest. Text", so darf ich freilich nicht erwarten, daß was ich in der Uebersicht 97[r] über *Καΐφας Καιάφας* vorgetragen habe, verstanden werden werde.

Gregorius von Nazianz. Dionys der Areopagite.

Herr IohDräseke hat einen Band „gesammelte patristische Abhandlungen" herausgegeben, zu dessen vierter und zweiter Nummer ich einiges des Lesens Werthe anzumerken habe.

Ich habe 1858 in meinen Analecta Syriaca 31—67 Texte veröffentlicht, welche in der Bibliothek des Klosters von Šihêt unter dem Namen des Gregorius *θαυματουργός* oder (wie ihn ein im Osten verstorbener Ordinarius der Kirchengeschichte zu verdeutschen pflegte) Gregor von Thaumaturgien sich erhalten haben, und bis auf Eines, das von AMai herausgegeben worden war, mir, als ich druckte, für unbekannt galten. Ich bitte, meine Symmicta 2 112 113 nachzulesen: man wird erfahren, daß mir noch 1859 die Benutzung der königlichen Bibliothek sehr erschwert worden ist, und wird mir in Folge davon zu Gute halten, daß ich damals wenigstens Eines der von Herrn VRyssel noch 1880 gleich mir für ungedruckte Arbeiten Gregors „von Thaumaturgien" gehaltenen Bücher falsch beurtheilt habe.

Herr IohDräseke hat 1881 [siehe a. oben a. O. 103] entdeckt, daß das Eine der angeblichen Inedita griechisch unter den Werken des Gregor von Nazianz steht: für diese Entdeckung verdient er den Dank der betheiligten Kreise, den meinen an erster Stelle.

Allerdings habe ich 1858 etwas gethan, was 1880 dem Herrn Ryssel hätte helfen können, welcher keinen Granius Licinianus zu büßen hatte, und der mit dem Herrn Oberbibliothekare LKrehl, wie aus seiner Widmung und seiner Vorrede zu schließen ist, so gut stand, wie ich mit dem verstorbenen Collaboratorenverächter und treuen Vater GHPertz schlecht. Ich habe nämlich in der Vorrede zu meinen Analecta xij zu 64_{10} wohlweislich angemerkt, daß die von mir aaO. abgeklatschte Handschrift an Einem Orte, in dem Verzeichnisse der im Codex enthaltenen Stücke [136[4]], als Verfasser des in Rede stehenden Aufsatzes den Gregor Bischof von NeuCaesarea in Pontus, aber an einer anderen Gregor den Großen nennt. Damit war den Leuten, welche ein Lesezimmer zu benutzen Zeit, oder das Recht hatten, ohne jedesmal frisch einzuholendes Ja Pertzens, Folianten nach Hause zu nehmen, der Weg gewiesen.

Nicht allein Herr VRyssel ist diesen Weg nicht gegangen, sondern auch seine drei hochwürdigen Herren Beurtheiler (Dräseke 123[r]) haben es nicht gethan: von denen Einer, Herr Consistorialrath FrBaethgen, GGA 1880₁₃₈₉, Syrisch lesen kann, und meine Analecta kennen mußte.

Bei dem zweiten Aufsatze des Herrn Dräseke, 32 ff., kommt es darauf an, zu erfahren, wie eine von Hipler und dem diesen bis auf die Schreib- und Druckfehler, auch wo er ihn bekämpft, abklatschenden Herrn RFoss (über den Abt Hilduin von St. Dénis und Dionysius Areopagita) benutzte Stelle des Dionysius Areopagita in der sehr alten syrischen Uebersetzung lautet. Herr EWBudge hat die Güte gehabt, mir aus drei Handschriften des brittischen Museums (Add. 12151_{96} 12152_{110} 14539_{59}) das in Frage Kommende auszuschreiben. Hier ist es: die Varianten stehn zwischen [ ] im Texte:

ܘܡܢ ܒܬܪ ܐܦ [= ܕܐܦ] ܗܘܐ ܢܗܝܪܐ ܠܢ ܡܫܡܫܢ ܡܪܥܝܢܬܐ ܕܐܠܗܝܐ ܘܡܢܗ
ܘܡܬܩܢܝܢ ܐܠܗܝܐ ܐܝܟ ܕܒܟܬܒܐ ܢܒܘܪܐ ܐܠܦܢܝ. ܠܐ ܗܘܐ ܢܦܝܫܝܢ ܡܠܘܗܝ
ܠܘܬ ܗܘܢܟܪܘܬܐ ܡܠܟܐ ܐܝܟ ܕܒܢܘܗܪܐ ܕܠܗ ܡܢ ܕܠܗ ܘܡܠܦܢܐ ܕܝܢ ܐܬܬܗܝܡ
ܠܗ. ܡܛܠ ܕܐܦ ܠܘܬܗܘܢ ܕܩܕܡ ܡܢܢ ܐܣܬܪܝ ܠܘܬܗ — ܐܝܟܢ ܕܐܦ ܚܢܢ
(ܐܝܟܐ ܕܝܕܥ ܐܢܬ) ܘܐܢܬ ܘܩܕܝܫܐ ܡܢ ܐܚ̈ܝܢ ܡܢܝܢܐ ܐܬܟܢܫܢ ܗܘܝܢ ܠܚܙܬܗ
ܕܦܓܪܐ ܗܘ ܕܡܚܝܢܐ ܘܡܩܒܠ ܐܠܗܐ. ܦܪܝܫ ܗܘܐ ܕܝܢ ܐܦ ܝܥܩܘܒ ܐܚܘܗܝ ܕܐܠܗܐ
ܠܦܩܕ ܘܦܛܪܘܣ ܗܘ [so] ܡܫܬܡܠܝܢܐ ܪܫܐ ܘܩܫܝܫܐ ܕܬܐܘܠܘܓܐ —
ܘܟܠܗܘܢ ܐܠܗܝܐ ܠܟܗܢ̈ܐ ܟܕ ܦܐܫ ܡܛܠ ܡܟܘܢ ܡܢ ܟܠܗ ܚܝܠܐ ܐܝܪܘܬܐܘܣ ܐܝܟ
ܕܡܫܡܫ ܗܘܐ ܟܠܗ ܚܕ ܡܢܗܘܢ. ܠܫܘܒܚܐ ܕܠܐ ܡܬܚܙܝܢ ܣܓܝܐܐ ܕܡܣܒܪܢܘܬܐ
ܕܐܝܬܘܬܐ ܐܠܗܝܬܐ. ܠܟܠܗܘܢ ܡܬܢܨܚ ܘܡܙܠܐ ܐܣܝܪܐ ܕܡܢ ܟܠܗ ܐܘܦ ܡܠܦ̈ܢܐ
ܬܐܘܠܘܓܐ ܠܟܢܫ [= ܟܢܫ] (ܐܝܟ ܡܐ ܕܐܡܪ ܐܢܬ) ܡܢ ܟܠܗ ܢܦܫܗ ܗܘܐ. ܘܟܠܗ
ܢܦܩ ܗܘܐ ܗܘ ܡܢܗ. ܘܐܫܬܟܚ ܗܘܐ ܡܬܦܫܛܐ ܕܟܠ ܗܟܢ ܕܡܫܬܡܥܢ ܡܢܗ
ܘܡܢ ܡܟܘܢ ܐܝܟ ܕܫܡܥܝܢ ܗܘܘ ܠܗ ܘܚܙܝܢ ܗܘܘ ܠܗ. ܘܝܕܥܝܢ ܗܘܘ ܠܗ.
ܘܠܐ ܝܕܥܝܢ ܗܘܘ ܠܗ. ܘܡܬܚܫܒܝܢ ܫܒܚܐ ܡܢ ܐܠܗܐ ܘܐܠܗܝܐ ܡܫܡܠܝ [= ܡܫܡܠܝܢ]
ܗܘܐ ܕܐܬܚܙܝ: ܘܡܢܐ ܐܡܪ ܠܟ ܥܠ ܐܝܟܢ ܕܐܬܡܠܠ [= ܕܐܬܡܠܠ] ܡܢܗ
ܐܝܟ ܐܠܗܐܝܬ.

Dionysius, der angebliche Areopagit, nennt sich selbst einen Schüler des Hierotheus, also nicht des Apostels Paulus. Er schreibt an Gaius, Titus, Carpus: er erwähnt einen Iacobus und einen Petrus, einen Bartholomaeus, einen Clemens, einen Elymas, einen Simon als Zeitgenossen.

Ich denke, diese Namen alle seien zu verstehn wie die Namen des vor Karl dem Großen versammelten Kreises von Gelehrten; sie sind die Masken, unter denen sich die Mitglieder einer

platonischen Akademie versteckten, unter denen sie ihre Gegner bezeichneten.

Erst die sorgsame Vergleichung der Handschriften wird lehren, ob diese meine Vermuthung richtig ist.

Dabei wird sich empfehlen, ehe man über *ἀδελφόθεος* aus der Theorie der griechischen Wortbildung urtheilt, aus Estienne und DuCange zu lernen, was *ἀδελφόθεος* im Leben bedeutete. Ich wäre sehr dumm, wenn ich Hektoliter von *ἕκτος* herleitete, weil hundert *ἑκατόν* heißt, wenn ich Antipyrin für ein Gegenmittel gegen den Weizen hielte, weil das Fieber bekanntlich nicht *πυρός*, sondern *πυρετός* genannt wird.

Der Syrer liest nicht *θείαν*, sondern *θέαν*, nicht *σήματος*, sondern *σώματος*: den *ἀδελφόθεος* hat er wie unsere Drucke. Uebrigens kann ich weder mit dem Griechischen [1 343 der Venediger Ausgabe] noch mit dem Syrischen viel anfangen.

אֲבֶן

als Nebenform für בֵּן habe ich in meiner Uebersicht 75r in *Αβεννήρ Αβεσσαί Αβεσσαλώμ Αβεσσουέ* nachgewiesen. Es gibt noch einen Namen, der dies אֲבֶן enthält: אֶבְצָן Iudd. 12 8 heißt in 𝔊 *Αβαισσαν* oder *Αβεσσάν*, in 𝔖 ܐܒܨܢ, d. h. die richtige Aussprache ist אֲבֶצָּן = אֲבֶן צָן, welche Form sich zu ܐܒܨܢ verhält wie *Αβεσσουέ* zu אֲבִישׁוּעַ. Für mich ist durch *Αβεσσάν* 𝔊s erwiesen, daß 𝔊 einer sehr guten Ueberlieferung folgte: kein Nachdenken hätte einen alexandrinischen Juden darauf gebracht, אֲבֶצָּן auszusprechen.

Ich weiß nicht, ob es schon jetzt erlaubt ist, die Vermuthung zu äußern, aben für ben sei südPalaestinisch.

Vulfilas Ezdras.

Als ich zu Ostern 1857 das jetzt in meinen gesammelten Abhandlungen 85 ff. bequem nachzulesende Programm de novo testamento ad versionum orientalium fidem edendo herausgab, meinte ich, einen weiten Schritt vorwärts gethan zu haben. Karl Lachmann war darauf ausgewesen, die im Osten und im Westen vorhandenen ältesten Zeugen des Textes des neuen Testaments gegen einander zu hören, und aus ihrer Uebereinstimmung zu schließen. Lachmann hatte kein Recht, an den Erfolg seines Unternehmens zu glauben, da er erstens was er abhörte, aus unzuverlässigen Vergleichungen abhörte, da er zweitens alle alten Uebersetzungen außer der als Ganzes nicht vorliegenden lateinischen Version bei Seite ließ. Ich machte geltend, daß in amtlichem Gebrauche befindliche Uebersetzungen sichereren Werthes seien als beliebig auf-

gelesene griechische Handschriften, deren Herkunft man nicht kenne, und ich verlangte die griechischen Handschriften durch jene Versionen — jetzt setze ich hinzu: durch die Lectionare — kontrolliert zu sehen. Ich maß dann zweitens an den Testimoniis, deren Benutzung bei Lachmann ebenso willkürlich war wie die der Handschriften und der lateinischen Version.

Ich erkannte weiter, daß zu irgend einer Zeit eine durchgreifende Revision des Textes vorgenommen worden ist, und forderte die nicht recensierten von den recensierten Codices zu scheiden: die Einen dürften, so lehrte ich, gar nicht mit den andern zusammengehalten werden.

Für die an letzter Stelle dargelegte Ueberzeugung hatte ich in gewissem Sinne an unserm IDMichaelis und dessen Vorarbeitern Vorgänger: die latinizantes des vorigen Jahrhunderts waren von den Michaelis scharf vom Reste geschieden, und von diesen in der Wolle gefärbten Protestanten, eben weil latinizantes, geächtet worden. Daß D der Evangelien vielfach mit den Uebersetzungen des Morgenlands stimmte, hatte IDMichaelis nach seinem Vater und Anderen richtig erkannt. Ich drehte gerade wegen dieser Uebereinstimmung den Spieß um, und lehrte: wo die Lateiner mit dem Syrer, den Aegyptern, dem Aethiopen, dem Gothen stimmen, haben wir den alten, nicht recensierten Text: die in diese Gruppe nicht gehörenden Zeugen bieten die recensio, d. h. die contaminatio. Das heißt: sie gehn uns nur in zweiter Linie etwas an.

Wie mir dies Programm bekommen ist, sehe man in den in den Abhandlungen 85 und in der Uebersicht 4^{r} angeführten Schriften nach, sowie in den Symmicta 2 28 29.

Die für das N.T. geltend gemachten Grundsätze habe ich nachmals auf die Septuaginta angewandt. Ich sehe auch auf diesem Gebiete meine Forderung als einen wesentlichen Fortschritt an, nicht griechische Handschriften, sondern die drei nach des Hieronymus Zeugnis amtlich vorhandenen Recensionen des Lucian, des Hesychius und Palaestinas zu vergleichen: mehr amtliche Recensionen, falls es deren mehr als die von Hieronymus genannten gibt.

Daraus folgte für mich ohne Weiteres, daß ich Vulfilas und des alten Slaven Text, da Vulfila wie der Slave im Sprengel von Constantinopel arbeiteten, als den in diesem Sprengel und dem von Antiochia geltenden Text Lucians anzusehen hatte.

Daß des Holmes Handschriften 19 108 118 und die Ausgabe von Alcala de Henarez zusammengehören, hat Holmes selbst zu 19 108 118 vor dem Pentateuche gesagt: alles Weitere erhellt aus des Holmes Apparate sofort für jeden, der hintereinander gestellte

Zahlen zu lesen versteht. Es brauchte von Niemandem entdeckt zu werden.

Daß dieser Text der Text Lucians, also der Antiochias und Constantinopels, also auch der Vulfilas und des Slaven sei, ergab sich im December 1868, als ich in Schleusingen mein Register der von Chrysostomus (Savileschen Drucks) angeführten Bibelstellen beendigt hatte und zu benutzen anfieng.

Herr Otto Ohrloff hat im Jahre 1876 in einer greifswalder Promotionsschrift, von der bis heute der goettinger Bibliothek ein Exemplar nicht geliefert worden ist, die ich aber unlängst gekauft habe, ohne von dem so eben Auseinandergesetzten etwas zu wissen, zum Theil ohne von ihm etwas wissen zu können, nur aus dem Apparate des Holmes-Parsons — also empirisch, wie Rosenmüller und Olshausen was sie über den Archetypus des alten Testaments gelehrt, aus Kennicott empirisch gelernt haben — gefunden, daß dessen Handschriften 19 82 93 108 den von Vulfila übersetzten Text des Ezdras enthalten: daß Vulfila selbst diese Uebersetzung gemacht, leugnet Ohrloff.

Aber schon 1873 hatte Herr Alexander Kisch in des Herrn [Frankel] Hirsch Graetz Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums 22 42—46 85—89 die Frage nach dem Originale des gothischen Ezdras behandelt, und war zu dem charakteristisch ausgedrückten (man beachte das *e* in *Codeces*, wo ¸ für *i*), nicht erheblichen Ergebnisse gelangt

> Aus dem Gesagten geht klar hervor, daß der dem Ulfilas vorgelegene Septuagintatext nicht unwesentlich von unseren jetzigen Codeces dieser Uebersetzung verschieden war.

Dies bitte ich zu meiner Pars prior Lucians xiv wie zu meinen Mittheilungen 2 52^{r} nachzutragen. Ich bemerke noch, daß Frankels Zeitschrift auf der goettinger Bibliothek nicht gehalten wurde, und erst auf meinen Betrieb — ich weiß nicht mehr wann — in einer Reihe von Bänden auf einmal gekauft, und dann fortgesetzt worden ist. Des Herrn Kisch Aufsatz ist mir erst im laufenden Semester durch Zufall bekannt geworden.

Ueber das Dalton'sche Gesetz.

Von

B. Galitzine.

Vorgelegt von Riecke.

Das Dalton'sche Gesetz sagt bekanntlich aus: erstens, der Gesammtdruck eines Gemisches zweier Gase setzt sich einfach aus den Partialdrucken jedes einzelnen Bestandtheiles zusammen; zweitens, die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist derjenigen im Vacuum gleich.

Dieses Gesetz ist von verschiedenen Experimentatoren geprüft worden, unter anderen von Dalton[1]), Henry[2]), Gay-Lussac[3]), Magnus[4]), Regnault[5]), Andrews[6]), Guglielmo und Musina[7]), F. Braun[8]). Doch gehen ihre Ansichten sehr auseinander, insbesondere hinsichtlich der Spannkraft eines gesättigten Dampfes in einem Gas. Die einen, außer den ersten Beobachtern auch Regnault, erkannten das Dalton'sche Gesetz als ein theoretisches an; die großen Unterschiede, welche Regnault zwischen der Spannkraft des Aetherdampfes in Luft und im Vacuum fand, führte er auf eine störende Einwirkung der Gefäßwände zurück. Andere schrieben dem Dalton'schen Gesetz blos eine beschränkte Gültigkeit zu.

So zum Beispiel erhoben sich bei Wüllner[9]) nach besonderen Versuchen Zweifel an der Richtigkeit der Regnault'schen Erklärung, da er, wie später auch Guglielmo und Musina, nachweisen zu können glaubte, daß die Adhäsion des Dampfes an den Gefäßwänden auf die Spannkraft eines gesättigten Dampfes in

1) Manch. philol. soc. 5, p. 535, 1802; Gilbert's Ann. 12 p. 385, 1803 und 15 p. 21.

2) Nicholson's Journ. 8 p. 297. 1804; Gilb. Ann. 21. p. 393. 1805.

3) Ann. de Chimie. 95. p. 314. 1815. Auch Biot. Traité de Physique 1. p. 298.

4) Pogg. Ann. 38. p. 488. 1836.

5) Mém. de l'Ac. des Sc. 26. pp. 256, 679 und folg.

6) Phil. Mag. (5). 1. p. 84. 1876; Phil. Trans. 178 A. p. 45. 1887.

7) Riv. Sc.-Ind. di Firenze. Anno XIX. N. 16—17. p. 185. 1887. Auch Beibl. XII. p. 464. 1888.

8) Wied. Ann. 34. p. 943. 1888.

9) Wied. Ann. 11. p. 545. 1880. Auch Wüllner Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. III. p. 704. IV. Aufl.

einem Gas von minimalem Einflusse sei. In dem Verhalten reiner Dämpfe fand er dagegen ganz sonderbare Anomalien, welche auf einen Verflüssigungsverzug hindeuten und zu der Vermuthung führen, daß die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit nicht, wie es bisher angenommen wurde, eine genau bestimmte Größe ist, sondern zwischen gewissen Grenzen schwanken kann. Dieses anomale Verhalten gesättigter Dämpfe wurde auch von anderen beobachtet und besprochen[1]), und noch in neuester Zeit hat Blümcke[2]) interessante Mittheilungen darüber gemacht. Bei Gemischen sollen diese Anomalien in viel stärkerem Maß und viel leichter hervortreten.

Auch bei Guglielmo und Musina, und ebenso bei F. Braun stellten sich Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz heraus, doch waren dieselben immer sehr gering. Andrews dagegen constatierte zuweilen ganz beträchtliche Abweichungen. So fand er z. B., daß ein Gemisch von 3 Vol. CO_2 mit 4 Vol. N_2 unter keinem Drucke flüssig gemacht werden könne, so lange nicht die Temperatur des Gemisches auf —20° C. gebracht wird. Bei höherer Temperatur kann also eine Verflüssigung der im Gemische vorhandenen CO_2 überhaupt nicht stattfinden, obgleich die kritische Temperatur der CO_2 erst bei 31° C. liegt.

Ein Zusatz eines indifferenten Gases hat also eine Erniedrigung der kritischen Temperatur der betreffenden Flüssigkeit zur Folge. Diese Erscheinung, welche mit dem Verhalten von Gemischen zum Dalton'schen Gesetz in unmittelbarem Zusammenhang steht, ist auch von anderen Experimentatoren, wie Cailletet[3]), Hannay[4]), Ansdell[5]), Strauß[6]), Pawlewski[7]) und anderen beobachtet worden. Pawlewski fand bei Versuchen mit Flüssigkeitsgemischen, daß wenn man α Gewichtstheilchen einer Flüssigkeit mit β Gewichtstheilchen einer anderen mischt, die kritische Temperatur T_m des Gemisches sich nach der folgenden einfachen Formel berechnen läßt:

---

1) Man sehe z. B. Van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. p. 90. Leipzig 1881.

2) Wied. Ann. 36. p. 911. 1889.

3) C. R. 90. p. 210. 1880; Journ. de Ph. 9. p. 192. 1880.

4) Proc. Roy. Soc. 31. p. 520. 1881.

5) Proc. Roy. Soc. 34. p. 113. 1882.

6) J. d. russ. phys.-chem. Gesellschaft. 12 p. 207. 1880; 14 p. 510. 1882. Auch Beibl. VI p. 282. 1882 und VII p. 676. 1883.

7) Chem. Ber. 15. Jahrg. p. 460. 1882.

$$T_m = \frac{\alpha T_1 + \beta T_2}{\alpha + \beta},$$

worin T_1 und T_2 die kritischen Temperaturen der Bestandtheile bedeuten. Die flüchtigere Flüssigkeit kann man offenbar bei der Temperatur T_m als ein Gas (Definition Andrews') betrachten und somit von einer Erniedrigung der kritischen Temperatur der anderen Flüssigkeit sprechen. Die Richtigkeit des Pawlewski'schen Gesetzes wird jedoch nicht allgemein anerkannt.

Da sich also verschiedene Ansichten bezüglich des Dalton'schen Gesetzes, so wie auch der kritischen Temperatur von Gemischen gegenüberstehen, habe auch ich versucht, durch einige experimentelle und theoretische Untersuchungen diese Frage ihrer Lösung näher zu bringen.

Der erste Theil der experimentellen Untersuchungen ist im wesentlichen nur eine Erweiterung der Versuche Regnault's auf höhere Temperaturen (bis zu 100° C.). So wurde die Spannkraft in Luft der gesättigten Dämpfe von Wasser, Aethyl-Aether und Chloraethyl bestimmt. Die Versuche mit Wasser wurden außerdem mit Gefäßen von verschiedener Form ausgeführt, wodurch man sich zugleich ein Urtheil über den Einfluß der Gefäßwände auf die Spannkraft des gesättigten Dampfes in Luft bilden konnte.

In dem zweiten Theile dieser experimentellen Untersuchungen beschäftigte ich mich mit der Bestimmung der kritischen Temperatur verschiedener Mischungen von Aceton und Schwefelkohlenstoff mit Aethyl-Aether, ferner mit der Untersuchung des Einflusses eines kleinen Zusatzes von Luft auf die Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit.

Durch Zusammenstellung der früheren, theilweise von mir verarbeiteten Untersuchungen, mit meinen eigenen, bin ich zu Resultaten gelangt, welche ich hier in aller Kürze vorläufig mittheile.

Das Dalton'sche Gesetz für Gasgemische ist kein allgemein gültiges Naturgesetz.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist im Allgemeinen mit derjenigen im Vacuum nicht identisch, folglich ist auch für Dämpfe das Dalton'sche Gesetz nicht genau richtig und nicht einmal ein theoretisches, wie es von Regnault behauptet worden ist.

Die Summe der Partialdrucke zweier Gase ist im Allgemeinen größer als der gesammte von der Mischung ausgeübte Druck; der Unterschied, welchen ich mit Δ bezeichne, kann bei starken

Drucken ganz beträchtlich sein[1]). Bei weiterer Verkleinerung des von der Mischung eingenommenen Volumens nimmt Δ ab. Bei einem gewissen verhältnißmäßig sehr kleinen Volumen wird $\Delta = 0$, also das Dalton'sche Gesetz in aller Strenge anwendbar; bei weiter fortschreitender Verminderung des Volumens wird Δ negativ, und zwar erreicht es bald sehr hohe negative Werthe. Dieses eigenthümliche Verhalten von Δ läßt sich sowohl auf die wechselseitige Cohäsion, als auch auf die räumliche Ausdehnung der Moleküle der beiden Gase zurückführen.

Auch bei kleineren Drucken ist ein Unterschied zwischen der Summe der Partialdrucke und dem Gesammtdrucke der Mischung vorhanden, obgleich hier die absoluten Werthe von Δ sehr klein sind. Das Vorzeichen von Δ hängt von der Natur der gemischten Gase wesentlich ab. Für Mischungen mit Wasserstoff, welcher bekanntlich eine sehr kleine Cohäsion besitzt, werden die Abweichungen Δ gewöhnlich negativ, also die Summe der Partialdrucke kleiner als der Gesammtdruck der Mischung.

Ueberhaupt sind bei höheren Temperaturen, insbesondere, wenn dieselben die kritische übersteigen, die Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz auch bei starken Compressionen im Allgemeinen immer sehr gering.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist im Allgemeinen kleiner als die entsprechende Spannkraft im Vacuum, doch für sehr große Compressionen kann der Fall eintreten, daß der weniger flüchtige Körper sich bei dem normalen Drucke seines gesättigten Dampfes nicht mehr verflüssigt, da seine kritische Temperatur durch das Vorhandensein des anderen indifferenten Gases zuweilen ganz beträchtlich erniedrigt werden kann.

Die sehr großen und unregelmäßig verlaufenden Werthe von Δ, welche Regnault für die Spannkraft des Aetherdampfes in Luft gefunden hat, erklären sich in der That theilweise durch die störende Einwirkung der Gefäßwänden, respective die Verzögerung in der Diffusion des Aetherdampfes durch die Luft, was sich besonders bei sehr großen Gefäßen, mit welchen Regnault ja auch gearbeitet hat, geltend macht.

Die Behauptung Wüllner's, Guglielmo's und Musina's, daß der Einfluß der Adhäsion minimal sei, scheint mir unzulässig zu sein. Die Beobachtungen Regnaults, so wie meine eigenen mit verschiedenen Gefäßen ausgeführten Versuche lassen eine stö-

1) Δ ist zugleich Maß für die Abweichung vom Dalton'schen Gesetz.

rende Einwirkung der Wände bei großen und langen Gefäßen ganz gut erkennen. Für kleine Volumina allerdings, wo sich die Diffusion des Dampfes rasch vollziehen kann, scheint der Einfluß der Adhäsion sehr klein zu sein.

Obgleich die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase kleiner ist, als im Vacuum, ist doch dieser Unterschied bis zu 100° hinauf verhältnißmäßig immer noch gering und jedenfalls viel kleiner, als man nach Regnault's Beobachtungen erwarten könnte.

Hier mögen einige Zahlen folgen.

t bedeutet die Temperatur

p den Druck der Luft

$\frac{\Delta}{e}$ 100 die procentische Abweichung vom Dalton'schen Gesetz (e ist die Spannkraft im Vacuum).

Für Aethyl-Aether

t	p	$\frac{\Delta}{e}$ 100
63°,6 C.	628 m/m	0,1 % [1]
78,0	647	0,6
99,8	684	1,4.

Für Chloraethyl

t	p	$\frac{\Delta}{e}$ 100
63°,6 C.	316 m/m	kleiner als 1,4 %
77,5	324	kleiner als 1,6
100,5	340	kleiner als 2,6.

Für Wasserdampf in Luft von etwa ½ Atmosphäre Druck ist bei 100° der wahrscheinlichste absolute Werth von Δ nicht größer als 4—5 m/m.

Man kann also bis zu 100° hinauf das Dalton'sche Gesetz für gesättigte Dämpfe bis auf 1 oder 2 % als richtig ansehen, vorausgesetzt, daß der Druck der Luft nicht zu groß ist.

Die Bestimmung der Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase wird durch die Erscheinungen des Verflüssigungsverzuges, respective Siedeverzuges, welche sehr leicht auftreten können, ganz besonders erschwert. Ein Verflüssigungs- und Siedeverzug kann auch bei reinen Substanzen eintreten.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in

1) Der erste Werth ist wahrscheinlich zu klein.

einem Gase ist eine ziemlich unbestimmte Größe, die zwischen gewissen Grenzen schwankt.

Die Lehre von der Spannkraft gesättigter Dämpfe bedarf einer Erweiterung und Vervollständigung. Untersuchungen über die wirkliche Gestalt der Isotherme in der Nähe des Verflüssigungspunktes und eine Vergleichung derselben mit der theoretischen Isotherme sind sehr erwünscht [1]).

Wenn ein indifferentes Gas die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit verkleinert, so erniedrigt es auch die kritische Temperatur derselben. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich auch aus thermodynamischen Betrachtungen.

Ein ganz geringer Zusatz von Luft kann eine Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit hervorrufen.

Das oben erwähnte Gesetz von Pawlewski ist nicht allgemein gültig, obgleich es zuweilen Resultate liefert, welche mit den Beobachtungen gut übereinstimmen.

Die Erscheinungen, welche das Eintreten des kritischen Zustandes charakterisiren haben bei Gemischen denselben Verlauf, wie bei homogenen Körpern. Man scheint also berechtigt zu sein, ein Gemisch im gewissen Sinne als ein Individuum zu betrachten [2]).

An diese Erfahrungsthatsachen knüpfe ich einige theoretische Betrachtungen an; obgleich dieselben eine Vervollständigung und Erweiterung, insbesondere was die Ausarbeitung der Zustandsgleichung der Gase betrifft, bedürfen werden, führen sie schon jetzt zu Resultaten, welche in ihren Hauptzügen mit den Erfahrungsthatsachen in Uebereinstimmung stehen.

Die Theorie geht aus von Betrachtungen, über die Verzögerung, welche die Bewegungen der Moleküle eines Gases durch andere Gasmoleküle erleiden, und führt zu einem Ausdruck für die innere Cohäsion der Gase, welcher mit demjenigen in der bekannten ersten Clausius'schen Zustandsgleichung [3])

$$\left\{p + \frac{a}{T(v+\beta)^2}\right\}\left\{v - b\right\} = RT$$

vollständig identisch ist. Die einzige zulässige Annahme über die

---

1) Vergl. Margules Wien. Ber. Sitzung vom 6. Juni 1889.

2) Vergl. Van der Waals Continuität etc. p. 142.

3) Wied. Ann. 9. p. 337. 1880. Diese Zustandsgleichung scheint nach den neueren Untersuchungen Nadeschdin's (Exners Rep. 23 pp. 617, 685 und 759) eine sehr allgemeine Gültigkeit zu besitzen und auch auf den flüssigen Zustand in gewissen Grenzen angewendet werden zu dürfen.

Art und Weise der gegenseitigen Einwirkung verschiedener Moleküle, wenn sie sich umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz ihrer Entfernung anziehen, ist, daß auch die kleinsten Theilchen der Materie, die Moleküle, dem Newton'schen Gesetz folgen[1]). Andere Annahmen über n führen zu Ausdrücken, welche mit den synthetischen Eigenschaften der inneren Cohäsion, wie sie durch experimentelle Thatsachen festgestellt sind, im Widerspruch stehen. Auch die Notwendigkeit des Covolumens β im Ausdrucke für die innere Cohäsion ergiebt sich aus theoretischen Gründen.

Durch Verallgemeinerung lassen sich diese theoretischen Betrachtungen auf ein Gemisch zweier Gase übertragen. Die so erhaltene Gleichung enthält Glieder, welche von der einfachen und wechselseitigen Cohässion, sowie auch von der räumlichen Ausdehnung der Moleküle beider Gase abhängen. Die Cohäsion und räumliche Ausdehnung der Moleküle sind eben die beiden Hauptfactoren, welche die Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz hervorrufen. Die so erhaltene verallgemeinerte Zustandsgleichung gestattet die wirklichen Partialdrucke beider Gase zu berechnen.

Bei Anwendung dieser Theorie auf die Beobachtungen Andrews' über die Zusammendrückbarkeit eines Gemisches von 3 Vol. CO_2 mit 4 Vol. N_2 hat sich herausgestellt, daß bei den hohen von Andrews angewendeten Drucken, wenn also der Abstand der Moleküle durchschnittlich ein sehr kleiner ist, neue Kräfte ins Spiel kommen, welche bedingen, daß die ungleichartigen Moleküle in diesem Falle sich etwas schwächer anziehen, als es das Newton'sche Gesetz fordern würde. Man gewinnt also auf diesem Wege einen Einblick in gewisse Eigenschaften der Moleküle selber.

Unter Einsetzung der Werthe der Constanten, soweit sie bekannt sind, in der charakteristischen Zustandsgleichung einiger Körper, ergab sich nach dieser Theorie im Allgemeinen eine gute Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von Δ. Auch die negativen Werthe von Δ, welche auf den ersten Blick auffallen könnten, ergeben sich aus theoretischen Gründen als in der Natur der Sache liegend.

Ein Ausdruck für die Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit bei Anwesenheit eines indifferenten Gases läßt sich aus der verallgemeinerten Zustandsgleichung unmittelbar ableiten.

---

1) Vergl. auch P. Bohl Wied. Ann. 36. p. 384. 1889. B. Galitzine Zeitschr. für phys. Chemie IV. 4. p. 417. 1889.

Die so ausgebildete Theorie sieht auch die Möglichkeit solcher Fälle voraus, wo die kritische Temperatur eines Gemisches außerhalb derjenigen seiner Bestandtheile liegt [1]).

Physikalisches Institut Straßburg i. E.
December 1889.

Kleine Aufsätze.

Von

F. Bechtel.

10. *Δωΐς.*

In dem Hymnus auf Demeter wird erzählt, daß die Göttin, als sie von Helios gehört, Zeus habe dem Hades ihre Tochter gegeben, die Gestalt einer Alten angenommen und die Städte der Menschen aufgesucht habe. Zuletzt sei sie nach Eleusis gekommen, und habe sich beim Jungfrauenbrunnen im Schatten eines Oelbaumes niedergelassen. Da treten die vier Töchter des Keleos zum Brunnen, Wasser zu schöpfen; auf die Frage der Mädchen, wer sie sei, antwortet sie (V. 122)

Δὼς ἐμοί γ' ὄνομ' ἐστί,

und berichtet, Seeräuber haben sie aus Kreta entführt.

Der Versanfang ist verdorben. Man hat ihn manchfach zu heilen gesucht. Am weitesten Verbreitung hat der Vorschlag gefunden *Δηώ* für *Δώς* zu lesen. Aber er ist aus zwei Gründen unhaltbar. Erstens ist die Entstellung von *Δηώ* in *Δώς* um so unwahrscheinlicher, als *Δηώ* ganz verständlich und schon V. 47 vorgekommen war (Baumeister Hymni Homerici 295). Zweitens würde Demeter, hätte sie *Δηώ* als ihren Namen angegeben, sich der Gefahr ausgesetzt haben ihr Geheimnis sofort zu verraten: ein Dichter, der die Koseform *Δηώ* dreimal als seinen Hörern ganz geläufiges Aequivalent von *Δημήτηρ* gebraucht, kann nicht ohne Weiteres voraussetzen, den Töchtern des Keleos sei sie nicht geläufig gewesen. Die Lesung ist also paläographisch wie sachlich gleich unwahrscheinlich.

Die Wahrheit hat GHermann schon im Jahre 1806 ausgesprochen. »Quam late pateat coniecturae campus, non inficete Her-

---

1) Man ist in der That gewissermaßen berechtigt zu vermuthen, daß solche Ausnahmefälle in Wirklichkeit vorkommen können. Vergleiche z. B. Van der Waals Continuität etc. pp. 142 und 143.

mannus ostendit, quum luderet scribi posse etiam *Δωΐς* vel *Δωάς*«, Baumeister 296. Ließe sich zeigen, daß *Δωΐς* grammatisch und sachlich untadelhaft ist, so müßte dieser Lesung die höchste Wahrscheinlichkeit zugesprochen werden, da sie mittelst der geringfügigsten Aenderung gewonnen werden könnte: ΔωC wäre zunächst aus ΔῳC verdorben, ΔῷC zu der Zeit, als man Iota adscriptum zu subscribieren pflegte, für zweisilbiges, nicht mehr verstandenes, ΔωIC in den Text geraten. Kann nun eine Form *Δωΐς* grammatisch wie sachlich gerechtfertigt werden?

Ich glaube, ja. Unter den auf der Stätte des alten äolischen Aigai jüngst entdeckten Inschriften, die bei Bohn Altertümer von Aigai publiciert sind, finde ich eine, auf der Schuchardt mit Sicherheit den Genetiv [*Δ*]ώ[*μ*]*ατρος* hergestellt hat (a. a. O. 42). Schon früher war eine Münze von Kyme mit der Legende *Δωμάτριος* (Mionnet Suppl. 6. 10)[1]) bekannt; die Zweifel an der Richtigkeit der Lesung müssen jetzt verstummen. Es ist also ausgemacht, daß neben *Δαμάτηρ* eine Form *Δωμάτηρ* bestanden hat, die in der Aiolis im Gebrauche war. Daß *ā* mit *ō* im Ablautsverhältnisse steht, ist seit Saussure bekannt; mit dem Verhältnisse von *Δαμάτηρ* zu *Δωμάτηρ* vergleiche man das von *χᾱλαργός* (Soph. El. 861) zu *Χωλαργός* (Pferdename auf einer attischen Vase, Kretschmer K. Z. 29. 411)[2]). Ist aber *Δωμάτηρ* nachgewiesen, so ist auch *Δωΐς* erklärt. *Δωΐς* ist gebildet wie *Ζωΐς*, ist eine Koseform, die überall da möglich und verständlich war, wo als Vollname der Göttin *Δωμάτηρ* galt. Damit ist zugleich gesagt, wie diese Koseform gerade an unsere Stelle kommt: in Eleusis, wo die Göttin unter dem Namen *Δημήτηρ* verehrt wird, setzt sie sich nicht der Gefahr aus ihre wahre Gestalt zu verraten, wenn sie den Töchtern der Stadt, die sie nach ihrem Namen fragen, *Δωΐς* als solchen angibt. Es ist ganz geschickt von dem Dichter, daß er ihr

---

1) Die Münze mit ΔOMATPIOΣ, die Mionnet 3. 8 nach dem handschriftlichen Kataloge des Cabinet Cousinéry mitteilt, ist identisch mit der oben erwähnten. »Da die ehemalige Cousinéry'sche Sammlung in München ist, habe ich an Dr. Riggauer geschrieben, der mir so eben berichtet, daß zweifellos ΔΩM.. da steht«, Brief Imhoof-Blumers.

2) Auf der gleichen Seite constatiert Kretschmer diesen Ablaut in der auf attischen Vasen zweimal belegten Form KAMOΣ des Satyrnamens *Κῶμος*, und vergleicht, ähnlich wie GMeyer Gr. Gr.² 51, das Verhältnis von att. *θᾶχος* zu zu hom. *θῶχος*. Ich verstehe weder, wie im Attischen ein altes *ā* in dieser Lage sich gehalten haben, noch wie *θᾶχος* als Beleg für ein solches *ā* angeführt werden kann, da die Glosse *θᾰ́βαχον· θᾶχον. ἢ θρόνον* (Hes.) das attische *ᾱ* als contrahiert erweist.

diese Hindeutung auf eine seltener gebrauchte Form ihres Namens in den Mund legt.

---

11. Ionismen auf Kos.

Statt *δείξω*, *ἔδειξα*, *δέδειγμαι* sagt Herodot bekanntlich *δέξω*, *ἔδεξα*, *δέδεγμαι*; das Präsens *δέκνυμι* ist auf der wichtigsten Inschrift von Chios (Röhl no. 381 *c* Z. 14/15) zu Tage gekommen. Eine Form dieses ionischen Verbums kann ich auf Kos nachweisen: es handelt sich um die Inschrift bei Newton Ancient Greek Inscriptions in the British Museum no. 260. Der Stein ist im Apollontempel zu Kalymna gefunden; wie Newton richtig bemerkt, enthält er den Schluß eines von Kos ausgestellten Decrets, dessen *ἀντίγραφον* den Kalymniern mitgeteilt wird. Die Kalymnier hatten einen koischen Arzt öffentlich belobt und den Wunsch ausgesprochen, das Lob des Gefeierten möchte auch in seiner Heimat verkündigt, zugleich ein Mann mit Errichtung der Stele beauftragt werden. Die Koer beschließen zu willfahren; hinsichtlich der Errichtung der Stele wird bestimmt: [*ἀπο*]|*δεξάντω δὲ καὶ τοὶ προστάται μετὰ τοῦ ἱερέως τοὶ α*[*ἱρεθέν*]|*τες, καθ' ὅν κα χρόνον ἁ ἀνάθεσις τᾶς στάλας γίνηται, τοῖ*[*ον*] | *ὅς κα δοκῇ αὐτοῖς ἐπιτάδειος ἦμεν.* Man sieht: *ἀποδεξάντω* im Werte und an Stelle von *ἀποδειξάντω*; zum Ueberflusse steht auf einem andren, leider stark beschädigten, Steine von Kos bei einer analogen Bestimmung eine Form von *ἀποδείκνυμι*: Bull. de Corr. hell. 5. 223 Z. 11 f. *καὶ ἀναγράψα*[*ι* | — —] *τὸν ἀποδειχθησόμενον.*

Die Inschrift Newtons gehört der Schrift nach (Μ, Ξ, Σ) in das 3. Jahrh. v. Chr. Sie ist die einzige, auf der ich das Verbum *δέκνυμι* im Gebrauche gefunden habe. Auf anderen fungiert *δείκνυμι*: zu der oben angeführten kommt Bull. de Corr. hell. 5. 238 no. 26, wo ΕΝΑΓΟΔ . . . . ΥΣΟΑΙ (Z. 6) für *δείκνυμι* zeugt. Aber trotz ihrer Vereinzelung steht die Form *δεξάντω* für Kos fest, da der Steinmetz augenscheinlich mit großer Sorgfalt gearbeitet hat. Mit der Tatsache eines koischen *ἔδεξα* haben wir also zu rechnen; wie ist sie zu erklären?

Wären *δέκνυμι*, *δέξω* durch ein speciell ionisches Lautgesetz aus *δείκνυμι*, *δείξω* entstanden, so müßten die genannten Formen, wo sie auf nicht-ionischem Boden erscheinen, unweigerlich auf Entlehnung zurückgeführt werden. Aber jene Voraussetzung ist wahrscheinlich irrig (so schon GMeyer² 130), jedenfalls nicht zu beweisen; daher a priori ein *δέκνυμι*, *δέξω*, das auf nicht-ionischem

Gebiete angetroffen würde, mit gleichem Rechte für Fortsetzung einer urgriechischen Form gelten müßte, wie das in einem ionischen Texte stehende Wort. Und doch kann kein Zweifel darüber obwalten, daß *ἀποδεξάντω* nicht auf Kos gewachsen sondern von Ionien aus eingeführt ist. Die Insel liegt dem Chersonese gegenüber, auf dem Halikarnassos, die ionisch redende Stadt, erbaut ist. Verkehr der Insel mit dem Festlande war schon durch dessen Nähe gegeben; es kam dazu das hohe Ansehen des Asklepiostempels und der Ruhm der Aerzte von Kos. Aber Verkehr mit den Nachbarn bedingt noch nicht Einfluß der Nachbarn auf das geistige Leben, auf die Sprache: es kommt auch darauf an, was der Nachbar zu bieten hat. Die Ionier des fünften Jahrhundert waren im Besitze einer nationalen Litteratur, im Besitze einer Schriftsprache (vgl. Wilamowitz Zeitschr. f. Gymnasialwesen 31. 645); die Dorer in ihrer Umgebung nicht. Vermöge dieser geistigen Hegemonie wirken sie auf die Dorer der Hexapolis ein. Daher schreibt Hippokrates von Kos, schreibt später Ktesias von Knidos in schriftionischem Dialekte, daher tragen die Silbermünzen von Ialysos neben IAAYΣIOI auch die Legende IEAYΣIOI (Head Hist. num. 538), wird *'Ιηλύσιοι* die stehende Orthographie der attischen Tributlisten. Also im 5. Jahrhundert ist der Einfluß der ionischen Bildung so groß, daß Hippokrates die ionische Schriftsprache wählt. Ist es da ein Wunder, wenn uns in späteren Zeiten auf Kos vereinzelt Ionismen begegnen? Zu ihrer Erklärung bieten sich zwei Wege. Entweder sie entstammen der Umgangssprache, in die sie von Ionien aus zu der gleichen Zeit eingedrungen waren, in der die ionische Schriftsprache auf Kos adoptiert wurde. Oder sie haben kein wirkliches Leben geführt, sind rein äußerlich von der späteren Schriftsprache aus der früheren übernommen. Diese zweite Erklärung würde auf alle Ausdrücke passen, die formelhafte Wendungen oder Teile solcher Wendungen vorstellen; also gerade auf den Imperativ *ἀποδεξάτω*, *ἀποδεξάντω*, da die Verbindung *ἀποδέξαι ἄνδρα* zur Formel geworden ist. Unser Material reicht noch nicht dazu aus eine Entscheidung zu treffen; vielleicht bringt uns das angekündigte Werk des Herrn Paton weiter.

Daß meine Auffassung des koischen *ἀποδεξάντω* richtig ist, wird durch eine zweite Spur ionischen Einflusses auf Kos bewiesen. Auf dem überaus wichtigen Festkalender von Kos, dessen Fragmente von Hicks Journal of Hellenic Studies 9. 323 ff. zusammengestellt und besprochen sind, finde ich zweimal (S. 334 Z. 56. 61) die Schreibung *κνέοσα* neben einmaligem *κνεῦσα* (S. 327

Z. 2). Diese Orthographie ist von Ionien entlehnt; sie begegnet freilich auch bei andern Dorern, aber nur bei solchen, die in ionischer Umgebung oder unter ionischem Einflusse leben. Ein knidisches Tetradrachmon vom Ende des 5. Jahrhunderts trägt die Aufschrift ΕΟΒΩΛΟ[Ϲ], Head Hist. num. 524. Nach Knidos gehört vielleicht auch der Henkel CIG. no. 2121 *'Επὶ Καλλία.* | *Εὐπάμονος*, der in Phanagoreia gefunden wurde. Im Gebiete des alten Theodosia ist die Grabschrift *Πύρρος* | *Εὐρυνόμο*[*υ*] *'Ηρακλειώτας* (Samml. no. 3083) ausgegraben; der Verstorbene war aus Herakleia unter Ionier gewandert, und Der, der ihm die Grabschrift setzte, schrieb sie in ionischer Orthographie. Also sicher ist, daß, wo Dorer ΕΟ für ΕΥ schreiben, Ionier ihre Lehrer gewesen sein können. Und darum halte ich *κυέοσα* für einen Beweis der Einwirkung ionischer Schriftsprache auf Kos — für einen zweiten Beweis, wenn man den Imperativ *ἀποδεξάντω* auf die Schriftsprache beschränkt wissen will.

Hicks hat auch in dem *'Αμφιαρηΐς* des erwähnten Kalenders (Bull. de Corr. hell. 5. 220 Face A Z. 7 = Hicks 326) einen Ionismus sehen wollen. Aber die korinthische Vaseninschrift *'Αμφιάρηος* (Blass Samml. no. 3140, Kretschmer K. Z. 29. 172 no. 35), nach der die entsprechenden Aufschriften einiger attischer Vasen beurteilt werden müssen (Kretschmer a. a. O. 415 f.), widerlegt diese Ansicht, indem sie lehrt, daß als urgriechische Form des mythischen Namens *'Αμφιάρηϝος* anzusetzen ist (Wackernagel K. Z. 27. 265), *'Αμφιαρηΐς* also in Einer Linie steht mit dem von Hicks selbst angeführten Namen *'Αλκηΐδες*[1]) (334 Z. 60). Das *η* dieser Bildung ist urgriechisch, und braucht um so weniger aus Ionien nach Kos importiert zu sein, als es hier in einer enge verwandten Kategorie ebenfalls zu Tage tritt, wo es auf ionische Rechnung gar nicht gesetzt werden kann: im Dat. Sg. der *ēu*-Stämme (*Πολιῆϊ, Μαχανῆϊ* bei Hicks 328 *a* 11, 13 und sonst), in dem die alte Länge bei den Ioniern bekanntlich fast ganz ausgemerzt ist. — Eher könnte eine andere Bildung, die Hicks überall eliminiert, den Ioniern zugeschoben werden. Bull. de Corr. hell. 5. 220 A Z. 5 steht *ἐπιρεξέτω* ΤΕΛΕΩΝ, Hicks 328 Z. 13 und 14/15 *ὅτις τρεῖς* ΤΕΛΕΩΙ, 334 Z. 61 *ὅτις* ΤΕΛΕΩϹ. An der Existenz eines koischen Nom. Sg. Masc. ΤΕΛΕΩϹ ist also nicht zu zweifeln. Wie aber diese Form zu dem gewöhnlichen *τέλειος*, von dem man es

1) *'Αλκηΐς* ist Femininum zu *'Αλκεύς*, der grammatischen Voraussetzung zu *'Αλκείδας*. Der Name hängt mit der Verehrung des Herakles zusammen, die für Kos jetzt auch durch das erste Fragment des Festkalenders bezeugt wird.

nicht trennen mag, sich verhalte, weiß ich nicht zu sagen. Das APNEΩΣ der attischen Inschrift CIA. 2 no. 844 bringt uns nicht weiter. Hätte Meisterhans (Gramm. d. att. Inschr.[2] 100) Recht das Wort mit *ἀρνειός* zu identificieren, so ständen wir in Attika vor dem gleichen Rätsel. Ich sehe nicht, wie man auf lautlichem Wege von *-ειος* zu *-εως* kommen will, und habe auf der anderen Seite keine Lust mich bei einer nach der Formel *'Ο δράκων γάρ ἐστι μακρὸν ὅ τ' ἀλλᾶς αὖ μακρόν* aufgestellten analogistischen Erklärung zu beruhigen.

---

12. Der Ursprung der *Ταυροκαθάψια*.

Der nachfolgende Aufsatz ist bei einem Versuche den Dialekt von Kos zu begreifen nebenher abgefallen. Ich glaube ein neues Zeugnis für die Geschichtlichkeit der im Schiffskataloge niedergelegten Sage beibringen zu können, die die ältesten griechischen Besiedler der Insel von Thessalien ausgehn läßt. Es ist für mich hier gleichgiltig, ob diese Achäer direct von Thessalien aus oder über Epidauros nach Kos gekommen sind: bloß darauf, daß überhaupt ein Zusammenhang zwischen den beiden Gebieten besteht, kommt es mir an.

* * *

Wir wissen, daß bei den Thessalern bis in die Zeit Theodosius des Großen das Fest der *Ταυροκαθάψια* in hohem Ansehen gestanden hat (die Stellen bei Böckh zu Schol. Pind. Pyth. 2. 79). Eine gottesdienstliche Grundlage dieses Festes hat schon KFHermann (Gottesd. Altert.[2] 446) vermutet und an den »in Thessalien sehr verbreiteten Cult des Poseidon« (451) gedacht. Ich glaube eine abweichende Meinung rechtfertigen zu können: Ausgangspunkt war nicht der Cult des Poseidon, sondern das jährlich dem Zeus Polieus unter charakteristischen Cärimonien dargebrachte Opfer, das ich auf Grund der folgenden Erwägungen den Thessalern zuweisen möchte.

Was ist das Wesentliche des thessalischen Volksfestes? Das lehrt ein Ausdruck, der auf einer von Lolling (Mittheil. des archäol. Instit. 7. 346 *a* = Prellwitz De dial. thessal. 2 no. III) publicierten Inschrift steht und von dem Herausgeber schlagend richtig auf die *Ταυροκαθάψια*[1]) bezogen wird: *ταῦρον πεφειράκον-*

---

1) Lolling schreibt *Ταυροκαθαψία*; in Rücksicht auf die Glosse des Hesych

[τες], attisch ταῦρον τεθηρακότες. Dieser Ausdruck erläutert zugleich den Namen *Βουθήρας*, der auf mehreren nordgriechischen Inschriften belegt ist: ein Aeniarch heißt *Ἵππαρχος Βουθήρ*[α], Coll. no. 1431 a_8, ähnlich ein Archont der Lamier - -*ισκος Βουθή*(ρ)*α* Coll. no. 1445$_9$. Also das Treiben von Stieren ist das Wesentliche der *Ταυροκαθάψια*.

Das Treiben von Stieren ist aber auch das Wesentliche innerhalb einer bestimmten, auf Kos vorgeschriebenen Culthandlung, von der wir kürzlich Kunde erhalten haben. Das zweite der von WRPaton entdeckten Fragmente des Festkalenders von Kos (Hicks a. a. O. 332 f.) enthält eine genaue Beschreibung der Cärimonien, unter denen das Fest des Zeus Polieus jährlich am 19. und 20. Tage des Monats Batromios begangen werden soll. Die Ausführlichkeit, mit der die rituellen Vorschriften behandelt werden, läßt auf das Ansehen schließen, in dem das Fest gestanden haben muß. Der erste Act besteht in der Auswahl des Ochsen, der als Opfer zu fallen hat. Und bei dieser Auswahl spielt das Jagen von Rindern die Hauptrolle. Es wird angeordnet, daß eine bestimmte Anzahl Ochsen über den Markt getrieben (*ἐλάντω*) und zwar an die *τράπεζα* herangetrieben werden (*ἐπελάντω*), an der *ἱερεύς* und *ἱεροποιοί* Platz genommen haben. Zunächst stellt jede der drei Phylen, die nach Hicks' höchst ansprechender Vermutung je drei *χιλιαστύες* umfassen, dreimal je drei (also je einen auf die *χιλιαστύς*) ihrer schönsten Ochsen zur Auswahl. Hat keines der $3\times3\times3$ Tiere die Probe bestanden, so soll noch einmal aus jeder *χιλιαστύς* ein Ochse ausgewählt werden (*ἐπικρίνονται*); nach Hicks' Vermutung wären also noch ein viertes Mal 3×3 Ochsen gegen die *τράπεζα* getrieben worden. Das erwählte Opfertier wird dann durch Herolde auf den Markt (zurück) geführt; der bisherige Eigentümer oder dessen Bevollmächtigter ruft aus »*Κώιοις παρέχω τὸν βοῦν*«, worauf der *ἱερεύς* das Schlachtopfer bekränzt (*στέπτει*; vgl. *ἐρέπτω* zu *ἐρέφω*).

Nehmen wir an, daß diese Culthandlung einst auch in Thessalien heimisch gewesen ist, so haben wir die sacrale Grundlage des späteren Volksfestes gefunden: in den *Ταυροκαθάψια* dürfen wir dann die Entartung eines alten Cultgebrauches zum Sporte erkennen. Allein — sind wir berechtigt zu jener Annahme?

Zunächst ist zuzugeben, daß das Treiben von Rindern als Teil einer Opferhandlung nicht auf Kos, ja nicht einmal auf das Hel-

---

ἀψίαι· ἑορταί. Λάκωνες? Aber auf einer Inschrift aus Smyrna CIG. no. 3212 steht *Ταυροκαθαψίων ἡμέρα β.*

lenentum beschränkt ist. Um das Bekannteste anzuführen: Athen und Iguvium kennen die Sitte. In Athen werden an den Dipolien, also an einem ebenfalls dem Zeus Polieus geheiligten Feste, eine Anzahl Ochsen gegen des Gottes Altar getrieben, auf den die heilige Gerste gestreut ist; das erste Tier, das von der Gerste frißt, wird von dem *ἱερεὺς ὁ βουφόνος* erschlagen (Litteratur bei Band De Diipoliorum sacro Atheniensium, Leipziger Dissertation von 1873). Zu Iguvium bildet das Jagen und Opfern von Kühen den Abschluß der Entsühnung des Volks. Der Adfertor und seine beiden Gehülfen[1]) treiben nach der älteren Recension drei, nach der jüngeren zwölf[2]) Kühe über das Comitium (super kumne); unten am Forum (*hondra furo*) werden die drei, resp. drei von den zwölfen, eingefangen und der Tursa Iovia geopfert. Man beachte, daß es auch in Umbrien eine in den Kreis des alten Himmelsgottes gehörende Gottheit ist, der das Rindertreiben und Rinderopfern gilt.

Was mich aber bestimmt den thessalischen Sport und den koischen Opfergebrauch mit einander in Zusammenhang zu bringen, also den Cultus des Zeus Polieus mit seinem chrakteristischen Cäremoniell den Thessalern zuzuschreiben, ist die Tatsache, daß die uralte Verbindung zwischen Thessalien und Kos von der Sage behauptet, durch die Einbürgerung des in Thessalien heimischen Asklepiosdienstes auf Kos bewiesen wird (Wilamowitz Isyllos 52 ff.). Es ist also gerade ein religiöses Moment, in welchem die von der Sage vorausgesetzte Abhängigkeit der Insel von Thessalien ihren Ausdruck findet. Um so weniger darf die Uebereinstimmung in der Sitte des Stierjagens für Zufall gehalten werden. Der Cultus, bei dem sie auf Kos noch im 4. Jahrhundert bestand, ist von den gleichen Leuten ausgegangen, die den Cultus des Asklepios nach Kos brachten. Und so sehe ich in der Möglichkeit das profane thessalische Fest aus einer auf Kos geltenden sacralen Institution abzuleiten eine weitere Bestätigung der alten Sage, die zwei Söhne des Thessalos zu den Herren von Kos macht.

---

1) Dem *porse perca arsmatia habiest* entspricht auf Kos der *ἱερεὺς ἔχων τὰν ῥάβδον τὰν ἱερὰν* (so von Hicks ergänzt), den *prinvatur* die *ἱεροποιοί*, deren Anzahl freilich nicht angegeben wird.

2) So nach Büchelers richtiger Auffassung (Umbrica 117). Aber seine Uebersetzung der Verbalform *ehiato* (Tafel VII b Z. 8) mit 'emissas' hätte Bücheler nicht wiederholen sollen, da umbr. *ehiato* sich Laut für Laut mit lat. *egeatur* deckt.

13. *Κυράνα.*

Unter den Argumenten, mit denen Studniczka (Kyrene, Eine altgriechische Göttin) die thessalische Herkunft der vordorischen Colonisten von Thera begründet, steht die Thatsache im Vordergrunde, daß „die Eponyme der neuen Stadt [Kyrene] die Tochter eines thessalischen Königs ist und von Thessalien nach Kyrene entführt wird" (132). Im Laufe der Untersuchung versucht Studniczka auch eine Etymologie des Namens *Κυράνα*: er stellt ihn zu *κύριος* (151). Ich halte diese Etymologie für verfehlt, schon aus dem Grunde, weil die Quantität der Vocale der ersten Silbe in unerklärbarer Weise differiert[1]). Denn *κῦριος* gehört zunächst zu sskr. *çū'ras*; ein Ablaut *ū*: *u* wird für diese Wortsippe durch das Hineinziehen von gr. *ἑκυρός*, sskr. *çváçuras* nicht erwiesen, auch ist *κῦρος* nicht aus *κύρσος* entstanden, der Vocal der Wurzelsilbe vielmehr schon vorgriechisch *ū* gewesen. Auch andere Etymologien des gedankenreichen Buches sind nicht glücklich. Für *Κυράνα* glaube ich eine abweichende vorschlagen zu können, die den Lauten keine Gewalt antut: *Κυράνα* hängt aufs engste zusammen mit *Κορωνίς*, dem Namen der anderen Lapithenjungfrau, der Apollon seine Liebe schenkte.

Κορωνίς ist das Feminum zu *Κορωνός*, *Κορωνός* eine Erweiterung von *Κόρων*, *Κόρων* Koseform zu Vollnamen wie *Κόροιβος*. Auf der großen Inschrift von Larisa werden hinter einander *'Αντιφάνεις Κορούνειος*, *'Αρισ[το]φάνεις Κορούνειος* genannt; *Κορούνειος* kann Patronymicum zu *Κόρων* wie zu *Κορωνός* sein. Von *Κόρων* abgeleitet ist *Κορώνη*: so heißt eine Tochter des Apollon, und eine Stadt in Messene, in der nach Pausanias ein *'Απόλλων Κόρυδος* verehrt wurde (Baunack Stud. 1. 156 f.). Die Koseformen auf *-ν* sind dadurch ausgezeichnet, daß der volle Dreiklang *ᾱ η ω* als Ablaut in ihrer Endung erscheint. Für die Koseformen auf *-ων* bedarf es weiterer Belege nicht. Die auf *-ήν* sind bisher am häufigsten auf Münzen von Dyrrhachion und Apollonia beobachtet (Blass Coll. no. 3225). Sie sind von den erstgenannten deutlich durch den Accent geschieden: *Δάμων*, *Λύσων*, *Πύθων* neben *Δαμήν*, *Λυσήν*, *Πυθήν* (Fick GGA. 1880. 425). Die dritte Gruppe wird durch eine stattliche Reihe von Völkernamen gebildet: *'Αξᾶνες*, *'Αθαμᾶνες*, *Αἰνιᾶνες*, *'Ακαρνᾶνες*, *'Ατιντᾶνες*, *Εὐρυτᾶνες*, *Κεφαλλᾶνες*, *Φοιτιᾶνες* (Böckh zu CIG. no. 1793); wie man sieht,

1) Diese Schwierigkeit hat Wilamowitz in einer Unterhaltung mit mir hervorgehoben.

gehören sie größten Teils nordwestgriechischen Stämmen an. Daß ᾱ nicht etwa, wie das ᾱ von *Ἀλκμάν*, durch Contraction entstanden ist, beweist das ionisch-attische η in *Ἀζῆνες* und *Κεφαλλῆνες*. Nach Nordwestgriechenland gehört auch der wichtigste dieser Namen, *Ἕλλᾱν*; der wichtigste darum, weil wir zu ihm allein den Vollnamen kennen, *Ἕλλοψ*. Womit der Wechsel des Accents zusammenhänge, weiß ich nicht; eben so wenig, auf welche Weise das ᾱ dieser dritten Gruppe mit dem η und ω der beiden ersten in Verbindung stehe. Hier handelt es sich nur um den Beweis, daß als Koseformen neben *Κόρων* sowol *Κορήν* wie *Κόρᾱν* oder *Κορᾱ́ν* theoretisch denkbar sind. Zu *Κόρων* nun ist das Feminum *Κορώνᾱ*, *Κορώνη* erhalten. Zu *Κορήν* würde analog *Κορήνᾱ* gehören; ein derartiges Femininum könnte in *Ἀλκμήνα* gesehen werden, wenn die Ueberlieferung bei Pindar (Ahrens Dial. Dor. 134) altes Sprachgut gewahrt haben sollte. Und endlich, das Femininum der dritten Koseform liegt in *Κυρᾱ́νᾱ* vor; *υ* für *ο* ist thessalisch, die Ersetzung des *ο* durch *υ* auch in dem Stadtnamen *Γύρτων* (ΓΥΡΤΩΝΙΩΝ auf Münzen von 400—200, Head Hist. num. 251) zu belegen, der von *Γόρτυν* nicht getrennt werden darf.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1889.

(Fortsetzung.)

Società R. di Napoli. Atti d. A. d. scienze fisiche e matematiche. Serie seconda. Vol. III. 1889.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1889. N. 92—94.

Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIII. Livr. 3. Harlem 1889.

Adam et Christus. Epistola ad Abraham. Carmina probata ab Academia Regia. Amsterdam.

Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.
- a. Verhandelingen. Afdeeling Letterkunde. Deel 18. 1889.
- b. Verslagen en Mededeelingen. Afdeeling Letterkunde. 3de Reeks. 5. Deel. 1889.
- c. Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. 3de Reeks. 5. Deel. 1888.
- d. Jaarboek voor 1888. Amsterdam.

Bergens Museums Aarsberetning for 1888. Bergen 1889.

Finlands Geologiska Undersökning
- a. Kartbladed 12, 13, 14.
- b. Beskrifning till kartbladed. N. 12, 13, 14, 15.

Journal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 3. Coimbra 1889.
Anales de la sociedad cientifica Argentina. Jun—Agosto 1889 = T. 27. 6 und T. 28 i. 2. Buenos Aires. 1889.

Nachträge.

H. M. S. Challenger 1873—78. Zoology. Vol. XXXII.
Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge. Band X. D. g. R. 38ster Band. Wien 1890.
Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Jahrg. VI. 2te Hälfte. 1888. Hamburg 1889.
Natural history of Victoria. Prodromus of the Zoology of Victoria; etc. Decade XVIII. Melbourne and London 1889.

December 1889.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. XLVII XLVIII. XLIX. L. LI. LII.
Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg anläßlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Theil 1. Leipzig 1890.
Fünfzehn Vorträge aus der Brandenburgisch-Preußischen Rechts- u. Staatsgeschichte v. Ad. Stölzel. Berlin 1889.
Leopoldina. Heft XXV. N. 21—22. Halle a. d. Saale.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XIX. Jahrgang 1887. Heft 1. Berlin 1889.
Heinrich von Dechen, ein Lebensbild von H. Laspeyres. Bonn 1889.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1887.
Beobachtungssystem des Königreiches Sachsen. Hälfte 1. Abth. 1 u. 2. Hälfte 2 od. Abth. III. V. Jahrg. 1887. Chemnitz 1888/89.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 24. Heft 4°. Leipzig 1889.
Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:
a. Denkschriften Mathematisch-naturwissensch. Classe. Band 55. Wien 1889.
b. Sitzungsberichte.
1. Philosophisch-historische Classe. Band CXVII. Jahrg. 1888. Band CXVIII. Jahrg. 1889.
2. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Erste Abtheilung. 1888. Band XCVII. VI. u. VII. Heft. VIII. bis X. Heft. 1889. Band XCVIII. 1—3. Heft.
3. Mathem.-naturwissensch. Classe. Abth. IIa. 1888. Band XCVII. Heft VIII. Heft IX—X. 1889. Band XCVIII. Heft I, II u. III.
4. Math. u. naturw. Classe. Abtheilung IIb. 1888. Band XCVII. Heft VIII—X. 1889. Band XCVIII. Heft I—III.
5. Math. u. naturw. Classe. Abtheilung III. 1888. Band XCVII. Heft VII—X. 1889. Band XCVIII. Heft 1—4.
c. Archiv für österreichische Geschichte. Band 74. Hälfte 1. Hälfte 2. 1889.
d. Almanach. Jahrg. 39. 1889.
e. Register zu den Bänden 91—96 der Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. XII. Wien 1888.
f. Mittheilungen aus dem Vaticanischen Archive. Band 1. Wien 1889.
g. Venetianische Depeschen vom Kaiserhofe. Band 1. Wien 1889.
Meteorologische Zeitschrift. Jahrg. 6. 1889. Heft 12. Dez. Band XXIV der Zeitschrift d. Oesterr. Ges. für Meteorologie. Wien.
Mittheilungen des Musealvereins für Krain. Jahrgang 1. Leibach 1866. Jahrg. II. Leibach 1889.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1889. Oktober, November. Krakau 1889.
Ungarische Revue. Heft X. 1889. Neunter Jahrgang. Budapest 1889.
The collected mathematical papers of Arthur Cayley. Vol. II. Cambridge 1889.

Nature. Vol. 41. N. 1049—1053.
Journal of the R. microscopical society 1889. Part 6. December. London and Edinburgh.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. L. N. 1. 1889.
a. Teckeuingar ur svenska etatens historiska Museum. Forsta häftet. Serie IV. Andra häftet. Serie VI. Tredje häftet. Serie V. By Br. E. Hildebrand och Hans Hildebrand. Stockholm.
b. Svenska Sigiller fran Medeltiden af Br. E. Hildebrand. 1. 2. Stockholm 1862—67.
c. Anglosachsiska mynt: Sv. Kongl. Mynt kabinet ordnade och beskrifna of Br. E. Hildebrand. Erste und zweite Auflage. Stockholm 1846 u. 1881.
d. Akademiens Månadsblad, årgånge 1882—1889.
e. Sveriges och svenska Konungahusets minne spenningar praktmynt och belönnings medaljer. Del 1 och 2. By Br. E. Hildebrand. Stockholm 1874—75.
f. Minnespenningar öfver enskilda svenska män och qvinnor af Bror. Emil Hildebrand. Stockholm 1860.
g. Antiqvarisk Tidskrift for Sverige del II, III 1, 2, 3—4. IV 1, 2, 3 u. 4. V 1, 2, 3. VI 1, 2, 3, 4. VII 1—3, 4. VIII 1 u. 2. IX 1 u. 2. X 1 u. 2, 3 u. 4, 5. By Br. E. Hildebrand och Hans Hildebrand. Stockholm.
Bulletin de l'Académie Imp. de sciences de St. Petersbourg. Nouvelle série 1. (XXXIII). N. 2.
Bulletin de la société Imp. des naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 2. Moscou 1889.
Bulletin de l'Académie Royale de Belgique. Année 59. série 3. tome 18. N. 9—10, N. 11. Bruxelles 1889.
Atti della R. Accademia dei Lincei 1889. Rendiconti. Vol. V. fasc. 5, 6. Roma.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle publicazioni italiane. 1889. N. 95. 96.
Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier. Tome VIII. fasc. III. Année 1888—89. Montpellier.
Journal de l'école polytechnique. 58. cahier. Paris 1889.
Société des Antiquaires de Picardie:
a. Mémoires. 3ème série. Tome X.
b. Bulletin. Année 1889. N. 1. Titelblatt u. Reg. zu B. XVI.
Annales du musée Guimet. Revue de l'histoire des religions. Xième année. Tome XIX. N. 1, 2, 3. Paris.
Annales de la société Linnéenne de Lyon. Année 1885, 86, 87. Tome 32, 33, 34.
Annales de la société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. 5ième série. Tome 9 et 10. 1886 et 1887. 6ième série. Tome I. 1888. Lyon-Paris.
Mémoires de l'Académie des sciences, belles lettres et arts de Lyon:
a. Classe des sciences. Vol. 28 et Vol. 29.
b. Classe des lettres. Vol. 24, 25, 26. Paris et Lyon.
Le procès de la nomenclature botanique et zoologique par le Dr. Saint-Lager. Paris 1886.
Recherches sur les anciens herbaria par le Dr. Saint-Lager. Paris 1886.
Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVII. N. 5.
Bibliothèque nationale. Manuscrits arabes. Fasc. 2. 1889. pag. 337—656.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 1.

Paul de Lagarde, Nachträge zu früheren Mittheilungen. — *B. Galitzine*, über das Dalton'sche Gesetz. — *F. Rechtl*, Kleine Mittheilungen. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Gauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen

26. Februar. **№ 2.** 1890.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1890.

Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Geschichte Israels: Prof. *Smend* viermal um 10 Uhr.

Alttestamentliche Theologie: Prof. *Schultz* fünfmal um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *Smend* viermal um 11 Uhr.

Einleitung in das Neue Testament: Lic. *Weiss* fünfmal um 7 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Lünemann* sechsstündig um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Wiesinger* fünfstündig um 9 Uhr.

Erklärung des Hebräerbriefs: Prof. *Häring* dreistündig, Montags, Dienstags und Mittwochs um 9 Uhr.

Kirchengeschichte des Alterthums und Mittelalters: Prof. *Wagenmann* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte der neueren Zeit von der Reformation bis zur Gegenwart: Prof. *Tschackert* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte von Hannover und Braunschweig: Prof. *Wagenmann* viermal um 7 Uhr.

Apologie des Christenthums: Prof. *Schultz* fünfmal um 12 Uhr.
Dogmatik II. Theil: Prof. *Häring* fünfmal um 11 Uhr.
Symbolik: Prof. *Tschackert* fünfmal um 4 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Wiesinger* vierstündig um 3 Uhr.
Geschichte und System der Pädagogik: Prof. *Knoke* viermal um 5 Uhr.
Praktisch-theologische Erklärung des kleinen Katechismus von Martin Luther: *Derselbe* dreistündig, Montags, Dienstags und Donnerstags um 4 Uhr.
Kirchenrecht s. unter *Rechtswissenschaft* S. 43.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Smend* Dienst. um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Wagenmann* Freitags um 6; die dogmatischen Prof. *Schultz* Donnerstags um 6 Uhr.
Die homiletischen Uebungen der praktischen Abtheilung des theologischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich; die katechetischen Uebungen Prof. *Wiesinger* am Mittwoch von 2—3 Uhr und Prof. *Knoke* Sonnabends 2—3 Uhr öffentlich; die liturgischen Uebungen *Derselbe* Sonnabends 9—10 und 11—12 Uhr öffentlich.
Ein dogmatisches Conversatorium hält Prof. *Häring* einmal öffentlich.
Kirchengeschichtliche Uebungen: Prof. *Tschackert* Montags von 5—7 Uhr privatissime und gratis.
Exegetische Uebungen hält privatissime und gratis Lic. *Weiss.*

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr und Mittwoch von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger.*
Geschichte des römischen Rechts: Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 7—8 Uhr Prof. *J. Merkel.*
Pandekten I. Teil (Allgemeine Lehren, Sachenrecht, Obligationenrecht): Montag, Mittwoch, Donnerstag, Sonnabend von 8—10, Dienstag und Freitag von 8—9 Uhr Prof. *J. Merkel.*
Pandekten II. Teil (Familien- und Erbrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 7—8 Uhr Prof. *Regelsberger.*
Pandektenpraktikum: Mont., Mittw., Freitag von 12—1 Uhr Prof. *v. Jhering.*

Exegetische Uebungen in den Digesten: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Regelsberger*.

Conversatorium über Pandekten: Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 4—5 Uhr Dr. *Goldschmidt*.

Deutsche Rechtsgeschichte: Montag bis Freitag von 7—8 Uhr Vorm. Prof. *Dove*.

Deutsches Privatrecht mit Lehnrecht: Montag bis Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Ehrenberg*.

Handels- Wechsel- und Seerecht: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr Prof. *Frensdorff*.

Preußisches Privatrecht: Dienstag bis Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth*.

Vergleichendes Erbrecht: Sonnabend von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth* (öffentlich).

Die Grundzüge des Entwurfs eines bürgerlichen Gesetzbuchs für das deutsche Reich II. Teil (Familien- und Erbrecht): Freit. von 5—6 Uhr Prof. *Planck* (öffentlich).

Der privatrechtliche Inhalt der deutschen Socialgesetzgebung: Sonnabend von 11—1 Uhr Dr. *Goldschmidt* (öffentlich).

Strafrecht: Dienst. bis Sonn. von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth*.

Deutsches Staatsrecht: Mont. bis Freit. von 9—10 Uhr Prof. *Frensdorff*.

Kirchenrecht: Montag bis Freitag von 8—9 Uhr Prof. *Dove*.

Civilprozeß: Montag bis Freit. von 10—11 Uhr Prof. *v. Bar*.

Strafprozeß: Mont., Dienst., Donnerst., Freit. von 11—12 Uhr Prof. *v. Bar*.

Vorlesungen über *Staatswissenschaft* s. S. 51.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter *Naturwissenschaften*.

Knochen- und Bänderlehre trägt Prof. *Fr. Merkel* am Dienst., Donnerstag u. Sonnabend von 11—12 Uhr vor.

Der systematischen Anatomie II. Theil, Gefäß- und Nervenlehre, lehrt Prof. *Fr. Merkel* täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Mont., Mittwoch u. Freitag, von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Anfänger hält Prof. *Fr. Merkel* mit Dr. *Disse* Montag von 5—7 Uhr u. Donnerstag von 4—5 Uhr.

Anatomische Untersuchungen leitet Prof. *Fr. Merkel* öffentlich in zu bestimmenden Stunden.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere hält vierstündlich Dr. *Disse.*

Mikroskopische Curse in der speciellen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich um 2 Uhr oder zu passender Zeit.

Physiologie mit Erläuterungen durch Versuche und mikroskopische Demonstrationen trägt Prof. *Herbst* 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr vor.

Experimentalphysiologie I. Theil lehrt Prof. *Meissner* täglich um 10 Uhr.

Physiologie der Zeugung und Embryologie lehrt Prof. *Meissner* Freitag von 5—7 Uhr.

Arbeiten im physiol. Institut leitet Prof. *Meissner.*

Allgemeine Aetiologie lehrt Prof. *Orth* Montag u. Mittwoch von 3—4 öffentlich.

Allgemeine Pathologie lehrt privatim Prof. *Orth* Montag bis Freitag von 12—1 Uhr.

Practische Uebungen in der patholog. Histologie hält Prof. *Orth* Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr.

Sections- und diagnostische Uebungen leitet Prof. *Orth* in passenden Stunden.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Dienstag, Mittwoch u. Freitag von 4—5 Uhr.

Ueber physikalische Heilmethoden mit besoderer Berücksichtigung der Elektrotherapie und mit Uebungen am Krankenbett trägt Prof. *Damsch* Montag u. Donnerstag von 4—5 Uhr vor.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Impftechnik, verbunden mit Uebungen im Impfen trägt Prof. *Damsch* zu passenden Stunden vor.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und Demonstrationen sowie mit praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich, Montag, Dienstag und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Specielle Toxicologie, I. Th., für ältere Mediciner lehrt in Verbindung mit Experimenten zweimal wöchentlich, Montag und Donnerstag von 2—3 Uhr, Prof. *Marmé.*

Die Arzneiverordnungslehre trägt Prof. *Husemann* 3 mal wöchentlich in später zu bestimmenden Stunden vor.

Ueber eßbare und giftige Pilze trägt Prof. *Husemann* öffentlich Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Ein pharmakognostisches Practicum mit mikroskopischen Uebungen hält für Pharmaceuten Prof. *Marmé* Mittwoch von 10—12 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* tägl.

Specielle Pathologie und Therapie I. Hälfte lehrt Prof. *Ebstein* täglich außer Montag, von 7—8 Uhr.

Die medicinische Klinik hält Prof. *Ebstein* täglich, und zwar fünfmal von $10^3/_4$—12 Uhr, Sonnabend von $9^1/_4$—$10^3/_4$ Uhr.

Die Untersuchung des Harns und Sputums mit practischen Uebungen leitet Prof. *Ebstein* mit Dr. *Nicolaier* 1 mal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Rosenbach* dreimal wöchentlich von 8—9 Uhr Morgens, Dienstag, Mittwoch und Freitag.

Allgemeine Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *König* täglich mit Ausnahme Sonnabends von $9^1/_2$—$10^3/_4$ Uhr.

Medicinische Poliklinik hält Prof. *Damsch* täglich von 12 Uhr an öffentlich.

Chirurgische Poliklinik hält Prof. *König* gemeinsam mit Prof. *Rosenbach* Sonnabend $10^3/_4$ Uhr öffentlich.

Einen chirurgisch-diagnostischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* zweimal wöchentlich, Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Operationscursus an Leichen hält Prof. *König* täglich von 5—7 Uhr, Sonnabend ausgenommen.

Ueber Fracturen u. Luxationen liest Dr. *O. Hildebrand* zweimal wöchentlich.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegelcursus hält Dr. *Wagenmann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Augenoperationscursus hält Dr. *Wagenmann* Sonnabend von 8—9 Uhr.

Einen Cursus über Functionsprüfung des Auges hält Dr. *Schirmer* Mittwoch u. Sonnabend von 7—8 Uhr.

Ueber die practisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegel trägt Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit vor.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik u. Poliklinik hält Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag um 8 Uhr Prof. *Runge*.

Einen gynaekologischen Operationscursus hält mit beschränkter Anzahl von Zuhörern Prof. *Runge* privatissime.

Diagnostischen und operativen Cursus am geburtshülflichen Phantom hält Prof. *Runge* Montag, Mittwoch, Donnerstag 3—4 Uhr.

Ueber Frauenkrankheiten liest dreistündig in zu verabredender Stunde Dr. *Droysen*.

Psychiatrische Klinik verbunden mit Vorlesungen über Geisteskrankheiten hält Prof. *Meyer* wöchentlich in vier Stunden Montag und Donnerstag von 3—5 Uhr.

Gerichtliche Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *Meyer* wöchentlich in zwei nach Verabredung festzusetzenden Stunden.

Hygiene, II. Theil, lehrt Dienstag, Donnerstag und Freitag früh 7—8 Uhr Prof. *Wolffhügel*.

Practische Uebungen und Excursionen im Anschluß an die Vorlesung über Hygiene hält unentgeltlich Prof. *Wolffhügel* Mittwoch und Sonnabend von 7—8 oder von 8—9 Uhr Vormittags.

Hygienische und bakteriologische Curse giebt Prof. *Wolffhügel* in passenden Stunden.

Arbeiten im hygienischen Institut leitet Prof. *Wolffhügel* täglich von 9—5 Uhr.

Die äußeren Krankheiten der Hausthiere, sowie Beurtheilungslehre des Pferdes und Rindes trägt Prof. *Esser* wöchentlich fünfmal von 8—9 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale wird Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden halten.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie mit Anhang über orientalische Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Geschichte der Philosophie: Prof. *Rehnisch*, 5 Stunden, 12 Uhr.

Logik: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Psychologie: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 7 Uhr, früh.

Ausgewählte Kapitel der Metaphysik: Prof. *Rehnisch*, zu passender Stunde, öffentlich.

Moralphilosophie mit der Lehre von der Willens- und Charakterbildung: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 9 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Donnerst. 11 Uhr, öffentlich.

In einer philosophischen Societät wird Prof. *Baumann* Xenophons Denkwürdigkeiten des Socrates behandeln, Dienstag 6 Uhr.

In einer psychologischen Societät wird Prof. *G. E. Müller* Uebungen auf dem Gebiete der experimentellen Psychologie anstellen (in noch zu bestimmenden Stunden).

In einer philosophischen Societät erklärt Prof. *Peipers* ausgewählte Abschnitte aus Kants Kritik der reinen Vernunft, Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Algebraische Analysis: Dr. *Schönflies*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 8 Uhr. Dazu unentgeltlich eine Uebungsstunde.

Integralrechnung: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 11 Uhr.

Elemente der Theorie der bestimmten Integrale: Dr. *Schönflies*, Mittwoch und Sonnabend 8 Uhr.

Theorie der Flächen II. Grades: Dr. *Burkhardt*, Montag, Dienstag, Donnerstag 4 Uhr. (Uebungen dazu, privatissime, aber unentgeltlich: Freitag 4 Uhr).

Theorie der analytischen Funktionen, zweiter Theil: Prof. *Schwarz*, Mont. bis Freit. 9 Uhr.

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Prof. *Klein*, Montag, Dienst., Donnerst., Freitag 11 Uhr.

Nicht-Euklidische Geometrie, Fortsetzung: Prof. *Klein*, Mittwoch 11—1 Uhr.

Einleitung in die Potentialtheorie: Dr. *Drude*, Dienstag, Freitag 8 Uhr.

Molecular-Mechanik: Prof. *Schering*, Dienst., Mittw., Donnerst., Freitag 7 Uhr, früh.

Akustik: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Theorie des Magnetismus: Dr. *Hugo Meyer*, Donnerstag und Freitag 11 Uhr.

Populäre Astronomie, II. Theil: Prof. *Schur*, Sonnabend 11 Uhr.

Ueber die Berechnung der Störungen der Planetenbahnen: Prof. *Schur*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Geometrische Constructionsübungen: Prof. *Schwarz*, Mittwoch und Sonnabend 3—6 Uhr, öffentlich.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* privatissime, unentgeltlich, wie bisher zweistündig wöchentlich veranstalten.

Praktische Uebungen an den Instrumenten der Sternwarte: Prof. *Schur*, täglich.

Magnetische Beobachtungen im Gauss-Observatorium leitet Prof. *Schering* in Gemeinschaft mit dem Assistenten *W. Felgenträger*, Freitag 6 Uhr Abend.

Im K. mathematisch-physikalischen Seminar wird Prof. *Riecke* ausgewählte Kapitel der mathematischen und Experimentalphysik (Donnerst. 2 Uhr) behandeln, Prof. *Schering* mathematische Uebungen Freitag 5 Uhr leiten, Prof. *Schwarz* Sonnabend 9 Uhr solche veranstalten, Prof. *Voigt* ausgewählte Kapitel der Mechanik starrer Körper (Mittwoch 10 Uhr) und Prof. *Klein* ausgewählte Kapitel nichteuklidischer Geometrie behandeln (Sonnabend 11—1 Uhr), Prof. *Schur* astronomische Uebungen (Dienstag Abend 7 Uhr) veranstalten.

Experimentalphysik: siehe *Naturwissenschaften* S. 49.

Naturwissenschaften.

Allgemeine Zoologie: Prof. *Ehlers*, Mont. bis Donnerst. 8 Uhr.

Spezielle Zoologie, erster Theil (Protozoen und Coelenteraten): Prof. *Ehlers*, Freitag und Sonnabend 8 Uhr.

Entwickelungsgeschichte des Menschen, nebst unentgeltlichem Praktikum, Untersuchung und Anleitung zur Conservirung des Eies im Brutofen: Dr. *Hamann*, Montag und Donnerstag 5 Uhr.

Die Existenzbedingungen der Thiere (Biologie), einschließlich der Wechselbeziehungen zwischen Thieren und Pflanzen: Dr. *Hamann*, unentgeltlich.

Allgemeine Einführung in die Kenntniß der Insekten: Dr. *Henking*, Dienst. und Donnerst. 4 Uhr.

Zootomischer Curs: Prof. *Ehlers*, Dienst. u. Mittw. 10—12 Uhr.

Zoologische Uebungen: Prof. *Ehlers*, wie bisher, täglich (mit Ausnahme des Sonnabends) von 9—1 Uhr.

Demonstrationen in dem K. zoologischen Museum: Dr. *Henking*, Freitag 4 Uhr.

Grundzüge der Botanik: Prof. *Berthold*, Dienst. bis Sonnab., früh 7 Uhr.

Systematik und Morphologie der Blüthenpflanzen: Prof. *Peter*, Dienstag, Donnerstag, Freitag 3 Uhr.

Biologie der Pflanzen: Dr. *Koch*, 1 Stunde unentgeltlich.

Ueber Krankheiten der Culturpflanzen: Dr. *Koch*, Mont. 6 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Phanerogamen: Prof. *Peter*, Donnerstag 5—7 Uhr.

Uebungen im Untersuchen und Bestimmen der Kryptogamen: Prof. *Peter*, Freitag 5—7 Uhr.

Botanische Excursionen und Demonstrationen: Prof. *Peter*, Sonnabend Nachmittag.

Demonstrationen im botanischen Garten: Prof. *Berthold*, öffentl.

Mikroskopisch-botanischer Kursus: Prof. *Berthold*, Sonnabend 9—1 Uhr.

Mikroskopisch-botanisches Practicum für Anfänger: Prof. *Peter*, Mittwoch Vormittag.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Leitung botanischer Arbeiten, täglich: Prof. *Peter*.

Mineralogie, erster Theil: Prof. *Liebisch*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Petrographie: Prof. *Liebisch*, dreistündig.

Tägliche Arbeiten im mineralogisch-petrographischen Institut: Prof. *Liebisch*, öffentlich.

Palaeontologie: Prof. *v. Koenen*, 5 St., Dienst. bis Sonnab. 7 Uhr.

Ueber die geologischen Verhältnisse Norddeutschlands: Prof. *v. Koenen*, Sonnabend 12 Uhr, verbunden mit Excursionen und Uebungen.

Geologische und palaeontologische Uebungen: Prof. *v. Koenen*, täglich, privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, erster Theil (Mechanik, Akustik, Optik): Prof. *Riecke*, Mont. und Freit. 4 Uhr, Dienst. und Donnerst. 5 Uhr.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Institut werden die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Drude* und Dr. *Nernst* leiten, Dienstag und Freitag 2—4 Uhr für Mathematiker und Physiker, Sonnabend 9—1 Uhr für Chemiker.

Akustik und Magnetismus: siehe *Mathematik* S. 47.

Physikalisches Colloquium für Pharmaceuten: Dr. *Hugo Meyer* in zwei zu verabredenden Stunden.

Mathematisch-physikalisches Seminar: vgl. *Mathematik* S. 48.

Allgemeine Chemie, organischer Theil (Organische Experimentalchemie): Prof. *Wallach*, täglich (außer Sonnabend), 9 Uhr.

Organische Chemie, für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Gerichtlich-chemische Analyse: Prof. *Polstorff*, Dienstag und Freitag 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (anorgan. Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die stickstoffhaltigen Kohlenstoffverbindungen mit ringförmiger Schließung des Moleküls: Dr. *Buchka*, Montag, Mittwoch, Donnerstag 8 Uhr.

Analytische Chemie: Dr. *Buchka*, Mittw. u. Donnerst. 12 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, 4 Stunden, 3 Uhr. — Vgl. unter *Medicin* S. 45.

Pflanzenernährungslehre (Agriculturchemie): Prof. *Tollens*, Montag, Dienstag, Mittwoch 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie, I. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wallach*, in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und Dr. *Buchka*, und zwar 1) Vollpracticum, Montag bis Freitag 8—12 und 3—6 Uhr; 2) Halbpracticum, je Vor- und Nachmittags, zu denselben Stunden; 3) Chemisches Anfänger-Practicum für Mediciner, Nachmittags.

Chemisches Colloquium für Mediciner mit Anschluß an das Practicum: Prof. *Wallach*, öffentlich, Montag 3 Uhr.

Praktische Uebungen im agricultur-chemischen Laboratorium leitet Prof. *Tollens*, in Gemeinschaft mit Dr. *Dubbers*, Montag bis Freitag 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Lateinische Paläographie I. Theil (bis zum 13. Jahrhundert): Prof. *Steindorff*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. 10 Uhr.

Diplomatische Uebungen: Prof. *Steindorff*, Mittwoch 10—12 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Geschichte des alten Aegyptens: Prof. *Pietschmann*, Dienst. und Freit. 5 Uhr.

Römische Geschichte bis zur Zeit der Bürgerkriege: Prof. *Volquardsen*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 8 Uhr.

Einleitung in die Culturgeschichte des Mittelalters: Dr. *von Kap-herr*, Dienstag und Freitag 11 Uhr, unentgeltlich.

Allgemeine Verfassungsgeschichte der germanischen und romanischen Völker des Mittelalters: Prof. *Weiland*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Preußische Geschichte: Prof. *Kluckhohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Geschichte der Jahre 1866—1871: Prof. *Kluckhohn*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte Italiens seit dem Beginn des Mittelalters: Prof. *Th. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donnerst. u. Freit. 10 Uhr, unentgeltlich, in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Kluckhohn*, Montag 6 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 41.

Erd- und Völkerkunde.

Allgemeine physische Erdkunde I: Prof. *Wagner*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Geographische Uebungen: Prof. *Wagner*, Sonnabend Vormittag, privatissime, unentgeltlich.

Staatswissenschaft und Landwirthschaftslehre.

Praktische Nationalökonomie (Wirthschaftspolitik) mit besonderer Rücksicht auf die Gesetzgebung des deutschen Reiches: Prof. *Cohn*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 5 Uhr.

Allgemeine Nationalökonomie: Prof. *Lexis*, Dienstag bis Freitag 10 Uhr.

Staatswissenschaftliche Uebungen: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Statistische Uebungen: Prof. *Lexis*, 2 Stunden,

Landwirthschaftliche Bodenkunde: Prof. *Kirchner*, Mittwoch und Sonnabend 11 Uhr.

Specielle Ackerbaulehre (Pflanzenbaulehre): Dr. *Rümker*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Allgemeine Thierzucht: Prof. *Kirchner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Besondere Thierzucht (Pferde- und Schafzucht): Prof. *Kirchner*, Freit. und Sonnabend 10 Uhr.

Allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierzüchtungslehre: Prof. *Griepenkerl*, Montag und Dienstag 5 Uhr.

Specielle landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Feldgraswirthschaft, Felderwirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerstag und Freitag 4 Uhr.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet von Prof. *Griepenkerl*.

Rassenkunde und Züchtungslehre der Kulturpflanzen: Dr. *Rümker*, Mittw. 12—1 Uhr.

Drainage und Wiesenbau: Dr. *Rümker*, Sonnabend 12 Uhr.

Demonstrationen und praktische Uebungen im Veredeln (Kreuzen) der Kulturpflanzen: Dr. *Rümker*, Donn. 5 Uhr, unentgeltlich.

Ausgewählte Kapitel aus der landwirthschaftlichen Thierernährungslehre: Dr. *Lehmann*, 1 Stunde.

Uebungen im landw.-physiologischen Laboratorium: Prof. *Kirchner*, Mont. bis Freit. 8—4 Uhr.

Landwirthschaftliche Excursionen: Prof. *Kirchner*, Sonnabend 3—6 Uhr.

Krankheiten der Hausthiere: Vgl. *Medicin* S. 46.

Agriculturchemie, Agriculturchemisches Practicum: Vgl. *Naturwissenschaften* S. 50.

Literatur- und Kunstgeschichte.

Buchwesen des Alterthums und des Mittelalters: Prof. *Dziatzko*, Montag, Dienstag, Donnerstag 8 Uhr.

Ausgewählte Kapitel aus der deutschen Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts: Prof. *Roethe*, Montag, Donnerstag 6 Uhr Abends.

Geschichte der romantischen Schule in Frankreich (in franz. Sprache): Lector *Ebray*, 2 mal wöchentlich, privatissime.

Shakspere's Vorgänger und Zeitgenossen: siehe *Neuere Sprachen* S. 55.

Vorträge über Pope und seine Zeitgenossen: Lector *Miller*, (in englischer Sprache).

Allgemeine europäische Kunstgeschichte des Mittelalters und der Renaissance: Prof. *Lange*, Dienstag und Freitag 6—8 Uhr Abends.

Rafaels Leben und Werke: Prof. *Lange*, Mittw. 12 Uhr, öffentl.

Kunstgeschichtliche Uebungen: Prof. *Lange*, privatissime, unentgeltlich, Montag 6—8 Uhr Abends.

Alterthumskunde.

Ueber die athenische Burg und andere griechische Cultstätten: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, Mont. u. Dienst. 4 Uhr, öffentlich.

Museographie der griechischen und römischen Kunstwerke wird Prof. *Wieseler* vortragen und durch Abbildungen erläutern; 2 bis 3 Stunden, 12 Uhr.

Griechische Ikonographie: Prof. *Dilthey*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Ausgewählte Kunstwerke läßt im K. archäolog. Seminar erklären Prof. *Wieseler*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Die Abhandlungen der Mitglieder des K. archäolog. Seminars wird Prof. *Wieseler* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnab. 10—12 Uhr.

Vgl. *Deutsche Sprache* S. 54.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Lautlehre des Sanskrit, Griechischen und Deutschen: Prof. *Bechtel*, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 8—9 Uhr.

Altnordische Grammatik: siehe unter *Deutsche Sprache* S. 54.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. Testament s. u. *Theologie* S. 41.

Altaegyptische Schrift und Sprache: Prof. *Pietschmann*, in zu verabredenden Stunden.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Syrisch lehrt dreimal, Mont. bis Mittw., 12 Uhr, Prof. *de Lagarde*.

Uebungen im Hebräisch Schreiben leitet zweimal, Donnerstag und Freitag 12 Uhr: Prof. *de Lagarde*.

Grammatik der Sanskritsprache: Prof. *Kielhorn*, Mont., Mittw., Sonnab. 7 Uhr.

Erklärung der Hymnen des 7. Mandala des Rigveda: Prof. *Kielhorn*, Mittw. und Sonnab. 8 Uhr.

In zwei Stunden wird Prof. *Kielhorn* Subandhu's Vâsavadattâ erklären lassen und Dandin's Kâvyâdarśa erklären, öffentlich.

Orientalische Kunst: vgl. *Literatur* und *Kunstgeschichte* S. 52.

Griechische und lateinische Sprache.

Metrik der Griechen und Römer: Prof. *Leo*, Mont., Mittw., Donnerst., 11 Uhr, Sonnab. 12 Uhr.

Erklärung der Gedichte des Kallimachos: Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, Mont., Mittw., Donn. 10 Uhr, Dienst. u. Freit. 4 Uhr.

Platons Gastmahl: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Tibullus: Prof. *Leo*, Dienst., Donnerst., Freit. 8 Uhr.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *v. Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 12 Uhr, lassen Lucretius B. 5 Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag 11 Uhr, und die Gedichte des Solon Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff* erklären, Dienstag und Freitag 10 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar leitet die schriftlichen Uebungen und läßt Seneca de Beneficiis erklären Prof. *Leo*, Mittw. 8—10 Uhr, öffentlich.

Paläographische Uebungen zu lateinischen Classikern: Prof. *Dziatzko*, Freit. 3 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Philologische Uebungen: Prof. *Leo*, privatissime.

Deutsche Sprache.

Einleitung in das Studium des Mittelhochdeutschen (Grammatik mit Syntax, Metrik und Poetik, Handschriftenkunde, Synonymik, Alterthümer): Prof. *Roethe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 3 Uhr.

Vergleichende Grammatik der altgermanischen Dialekte (Laut- und Flexionslehre): Prof. *Heyne*, 4 Stunden, Abends 5 Uhr.

Altnordische Grammatik: Prof. *Bechtel*, Dienstag und Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Im K. deutschen Seminar hält Prof. *Heyne* altsächsische und altfriesische Uebungen, Freit. 12 Uhr, läßt Prof. *Roethe* des Minnesangs Frühling, herausg. von Lachmann und Haupt, erklären, Dienst. 12 Uhr, und bespricht Prof. *Roethe* die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder, Donnerstag 12 Uhr, alles privatissime, aber unentgeltlich.

Im K. deutschen Proseminar läßt Prof. *Heyne* den Winsbeke erklären, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich, und hält Prof. *Roethe* althochdeutsche Uebungen für Anfänger (Otfried nach Braune's Lesebuch) Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte der deutschen Literatur: Vgl. *Literaturgeschichte* S. 52.

Neuere Sprachen.

Geschichte der französischen Literatur: Vgl. *Literaturgesch.* S. 52.

Historische Formenlehre der französischen Sprache I: Prof. *Vollmöller*, Mont., Dienst., Mittw., Donnerst. 12 Uhr.

Erklärung der ältesten französischen Sprachdenkmäler: Dr. *Cloetta*, Mont. und Freit. 11 Uhr.

Die Gedichte Bertran's de Born, nebst einer Einleitung über dessen Leben: Dr. *Andresen*, Mont. und Dienst. 10 Uhr.

Neufranzösische Uebungen auf historischer Grundlage: Dr. *Cloetta*, Dienst. und Donnerst. 11 Uhr.

Grundzüge der Lautphysiologie und wissenschaftliche Anleitung zur modern-englischen Aussprache: Prof. *Brandl*, Dienstag und Sonnab. 7 Uhr, früh.

Shakspere's Vorgänger und Zeitgenossen: Prof. *Brandl*, Mittwoch und Freitag 7 Uhr früh.

Anfangsgründe der angelsächsischen Grammatik: Dr. *Holthausen*, 2 mal wöchentlich.

Lektüre und Erklärung von Marlowe's Doctor Faustus: Dr. *Holthausen*, 2 mal wöchentlich.

Im Seminar für Romanische Sprachen hält Prof. *Vollmöller* grammatische Uebungen, Mittw. 10—12 Uhr; französische Uebungen Dr. *Andresen*, Montag 6 Uhr; leitet Dr. *Cloetta* die Erklärung von Dantes Komödie, Donnerst. 6—8 Uhr; hält Lector *Ebray* Neufranzösische Uebungen, unentgeltlich dreimal wöchentlich (a. Uebersetzung eines deutschen Schriftstellers ins Französische, b. eines französischen ins Deutsche, c. Konversation).

Im englischen Seminar hält Prof. *Brandl* Uebungen im kritischen Herausgeben mittelenglischer Texte, Freitag 6—8 Uhr Abends. Ferner stellt Prof. *Brandl* mit Lector *Miller* neuenglische Uebungen an, Montag und Freitag 6—8 Uhr, und zwar a) in Grammatik und Stilistik, b) Lectüre von Holme's Autocrat of the Breakfast Table, c) Uebersetzung von Heine, das Buch le Grand, d) Vorträge über Pope und seine Zeitgenossen, in englischer Sprache.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Mittwoch 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, 2 Stunden wöchentlich, öffentlich.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Uebungen im Ensemblespiel hält Prof. *Freiberg*.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Morgens von 7—11 und Nachm. (außer Sonnabend) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, in zu verabredenden Stunden, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke* (Montag und Donnerstag 8—10 Uhr Abends).

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 11—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* (Aula, 1 Treppe hoch links) ist Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Sommerhalbjahr Sonnabends von 2 bis 4 Uhr dem Publikum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publicum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Arbeitszimmers des K. deutschen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Mankel* (Jüdenstrasse 11), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stoppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

26. Februar. **№ 3.** 1890.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND LIBRARY 15 APR 90

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. Februar.

Riecke legt einen Aufsatz des Herrn Dr. **Nernst** vor: „über ein neues Prinzip der Molekulargewichtsbestimmung".

Wieseler kündigt einen kurzen Aufsatz an: „Verbesserungsvorschläge zu Euripides."

Sauppe legt eine „Etymologische Mittheilung *Σήματ-* (*Σῆμα*) Zeichen" von Herrn Professor **Leo Meyer** in Dorpat, Korrespondenten der Gesellschaft, vor.

Ueber ein neues Prinzip der Molekulargewichtsbestimmung.

Von

W. Nernst.

Vorgelegt von **Riecke**.

Bekanntlich können bei gleicher Temperatur nur dann verschiedenartige Gemische miteinander im Gleichgewicht sein, wenn der gesättigte Dampf jedes derselben gleiche Zusammensetzung und Dichte besitzt.

Zwei derartige coexistierende „Phasen", um den von W. **Gibbs** eingeführten Ausdruck zu gebrauchen, sind z. B. ein fester Körper in Berührung mit seiner gesättigten Lösung in irgend einem Lösungsmittel. Der Dampfdruck des festen Körpers ist also ebenso groß, wie der Partialdruck dieses Körpers in dem über seiner gesättigten

Lösung in einem beliebigen Lösungsmittel lagernden Gasgemische. Ersterer ist in den seltensten Fällen direkt zu bestimmen; letzteren hingegen könnte man unschwer ermitteln, wenn man die stets gesättigt erhaltene Lösung isotherm abdestillieren läßt. Dieselbe liefert dann ein Gasgemenge, in welchem die Bestandteile im Verhältnis des gesuchten Partialdrucks des gelösten Körpers zum Dampfdrucke des Lösungsmittels stehen; den letzteren kennt man aber mit Hülfe der van't Hoff'schen Dampfdruckformel aus der Konzentration des gelösten Körpers und dem Dampfdruck des Lösungsmittels, und wird so der Dampfdruck des festen Körpers der Messung zugänglich.

Auf zwei Flüssigkeiten A und B, die sich gegenseitig nur theilweise lösen, angewendet, führt das eingangs erwähnte Theorem zu dem von Konowalow[1]) begründeten Satz, daß sowohl die gesättigte Lösung von A in B wie diejenige von B in A Dampf von gleicher Zusammensetzung und Dichte entsendet.

Lösen sich die beiden Flüssigkeiten einander nur wenig, so läßt sich ihr Dampfdruck aus der van't Hoff'schen Dampfdruckformel berechnen, wonach die relative Dampfdruckerniedrigung, welche ein Lösungsmittel durch Auflösen eines fremden Körpers erfährt, gleich der Anzahl Moleküle des gelösten Körpers zu der des Lösungsmittels ist. Enthält nämlich die Flüssigkeit A b Moleküle von B auf 100 eigene, und ebenso die Flüssigkeit B a Moleküle von A auf 100 eigene bei gegenseitiger Sättigung, so besteht zwischen den Dampfdrucken P_0 und p_0 der reinen Lösungsmittel und denen P und p nach ihrer gegenseitigen Sättigung die Beziehung

$$(1) \qquad \frac{P_0 - P}{P} = \frac{b}{100}; \quad \frac{p_0 - p}{p} = \frac{a}{100}.$$

Sowohl die von van't Hoff wie die von Planck gegebene theoretische Ableitung läßt es unbestimmt, ob im Nenner P oder P_0 bez. p oder p_0 einzusetzen ist. Da aber Raoult's wie Beckmann's experimentelle Forschungen für die unter (1) gegebene Form sprechen, so soll mit ihr im Folgenden gerechnet werden. Beschränkt man sich auf große Verdünnungen, in unserm Falle auf einander nur verschwindend wenig lösende Flüssigkeiten, so wird natürlich P und P_0 bez. p und p_0 einander äußerst nahe gleich.

Es entsendet also jede der beiden Lösungen A und B Dampf von der Zusammensetzung den Drucken $P_0 \frac{100}{100+b} + p_0 \frac{100}{100+a}$

1) Wied. Ann. 14 219 (1881).

entsprechend. Man kann also aus der gegenseitigen Löslichkeit von A und B und den Dampfdrucken der reinen Lösungsmittel die Absorptionskoeffizienten des Dampfes von A gegenüber B — und vice versa — berechnen.

Bringen wir nun in das System einen dritten, in A und B löslichen Körper N, so wird er sich im allgemeinen zwischen den beiden „Phasen" theilen. Ist N in solcher Menge zugegen, daß er sich in den beiden Flüssigkeitschichten bis gerade zur Sättigung lösen kann, so vertheilt er sich, wie schon Ostwald[1]) gelegentlich hervorhob, im Verhältnis der Löslichkeit in den beiden flüssigen Gemischen multiplizirt mit ihren Volumen. In erster Annäherung wird dies nun auch der Fall sein, wenn N in geringerer Menge zugegen ist. Es würde dies, wie nebenbei bemerkt sei, genau der Fall sein, wenn der Dampf von N gegenüber A und B dem Henry'schen Absorptionsgesetze folgte.

Bleiben wir aber bei der vereinfachenden Voraussetzung stehen, daß N in A leicht, in B schwer löslich sei, also großentheils in das Flüssigkeitsgemisch A übergeht, gegenseitige chemische Einwirkung hier wie im Folgenden ausgeschlossen. N sei gelöst in A zur Konzentration n Moleküle auf 100 von A, in B hingegen sei seine Konzentration nahezu null; A hat also die Fähigkeit, den Körper N B zu entziehen, wie bekanntlich z. B. eine wässerige Jodlösung mit Aether geschüttelt, fast ihr gesamtes Jod an jenen abgiebt. Infolge des Dazwischentretens von N mögen sich nun die oben eingeführten Größen P, p, a, b in P', p', a', b', verwandeln. Nach van't Hoff's Formel erhalten wir

$$\frac{P_0 - P'}{P'} = \frac{n + b'}{100}; \quad \frac{p_0 - p'}{p'} = \frac{a'}{100}. \tag{2}$$

Wir machen nun die Voraussetzung, daß der Dampf von A gegenüber B und vice versa dem Henry'schen Gasabsorptionsgesetz folge —, eine Voraussetzung, welche nach van't Hoff[2]) damit identisch ist, daß beide Flüssigkeiten in Lösung wie im Gaszustande das gleiche Molekulargewicht besitzen, und welche in der übergroßen Mehrzahl der Fälle (von Elektrolyten abgesehen) erfüllt ist. Dann wird

$$\frac{a}{P} = \frac{a'}{P'}; \quad \frac{b}{p} = \frac{b}{p'}. \tag{3}$$

1) Lehrbuch d. allg. Chemie I S. 402 (1885).
2) Zeitschrift f. physikal. Chemie 4 S. 488 (1887).

Führen wir in (3) die aus (1) und (2) berechneten Werte von P, P' p, p' ein, so wird

$$(4) \qquad \frac{a-a'}{a'} = \frac{n+b'-b}{100+b}; \quad \frac{b}{100+a} = \frac{b'}{100+a'},$$

a, a', b, b' sind klein gegen 100; wenn also a sich auch erheblich (etwa 10 %) ändert, so wird trotzdem b' von b nur äußerst wenig verschieden sein; können wir außerdem b gegen 100 vernachlässigen, so wird einfach

$$(5) \qquad \frac{a-a'}{a'} = \frac{n}{100}$$

in Worten: die relative Löslichkeitserniedrigung, welche A durch Auflösen eines fremden Körpers gegenüber B erfährt, ist gleich der Anzahl Moleküle des gelösten Körpers zur Anzahl Moleküle des Lösungsmittels A.

Ersetzen wir Flüssigkeit B durch das Vakuum, so tritt an Stelle der Löslichkeit die Dampftension von A, und obige Formel geht in die bekannte van't Hoff-Planck'sche Dampfdruckformel über. Die Analogie zwischen den Vorgängen der Auflösung und Verdampfung tritt also auch hier deutlich zu Tage, und man kann, wie ich bereits gelegentlich andeutete[1]), zu den Gleichungen (4) und (5) einfacher dadurch gelangen, daß man auf die gegenseitigen „Lösungstensionen" der beiden Flüssigkeiten die für die Dampftension gefundenen Beziehungen durch Analogieschluß einfach überträgt. Es liegt nahe, auch für die „elektrolytische Lösungstension" nach ähnlichen Beziehungen zu suchen.

Beobachtungen, an denen die Richtigkeit von Formel (5) zu prüfen wäre, liegen, soviel mir bekannt, nicht vor. Eine diesbezügliche Experimentaluntersuchung bot auch aus dem Grunde einiges Interesse, weil Gleichung (5) zu einer neuen Gattung von Molekulargewichtbestimmungen für in Lösung befindliche Körper führt. Aus der Abnahme der Löslichkeit kann man darnach das Molekulargewicht in ähnlicher Weise berechnen, wie aus der Abnahme des Dampfdrucks und dem Sinken des Gefrierpunkts des Lösungsmittels.

Zu einer genaueren quantitativen Prüfung wäre es erwünscht gewesen, zwei Flüssigkeiten aufzufinden, die sich gegenseitig nur wenig, etwa 1—2 %, lösen und von denen die eine in der andern

1) Zeitschrift f. physikal. Chemie 4 383 (1889).

scharf analysiert werden kann. Wäre die Ausführung der Analyse gleichzeitig eine bequeme und schnelle, so würde diese Methode vielleicht im Laboratorium praktische Anwendung finden können. Wenn sich eine solche Versuchanordnung nun auch noch nicht hat finden lassen, so setzen die Bestimmungen, welche mit den nachfolgend aufgeführten Lösungsmitteln angestellt sind, doch wenigstens die Richtigkeit der abgeleiteten Beziehungen außer Zweifel. Als Flüssigkeit B, dem gegenüber die Löslichkeit des Lösungsmittels zu bestimmen ist, diente in allen Fällen Wasser.

1. Valeriansäure.

Valeriansäure empfahl sich zunächst wegen ihrer leichten Analysirbarkeit, indem sie mit Phenolphtalein als Indikatur scharf mittelst Kalilauge titriert werden kann. Die gesättigte wässerige Lösung enthält etwa 5 % der Säure. Leider ist das Arbeiten mit diesem höchst übelriechenden Körper ein sehr widerwärtiges und außerdem seine Reindarstellung nicht einfach.

Ich verwendete ein von Dr. König-Leipzig bezogenes Präparat vom spezifischen Gewicht 0.928 bei 15°; 5 cc desselben mit 10 cc Wasser geschüttelt brachten letzteres auf den Säuretiter 0.541 normal. Die Säure war nicht einheitlich, sondern vermutlich ein Gemisch isomer Säuren; wendete ich statt 5 cc Säure 3 bez. 8 an, so ergab sich der Titer der wässerigen Lösung 1 % kleiner bez. 1.5 % größer. Aber indem ich stets unter gleichem Verhältnis von Säure zu Wasser arbeitete, nämlich immer 5 cc Valeriansäure in einem kleinen Reagenzgläschen mit 10 cc Wasser schüttelte, erhielt ich anscheinend wohl vergleichbare Resultate; ihre verhältnismäßig unerwartet gute Uebereinstimmung mit obigen Formeln veranlaßt mich, die folgenden, ursprünglich nur zur eigenen Orientierung angestellten Versuche kurz mitzuteilen.

Dieselben sind bei 13° angestellt; die Löslichkeit der reinen sowie der mit fremdem Zusatz versehenen Säure wurde in der Weise ermittelt, daß nach der Abscheidung einer klaren wässerigen Lösung unter der leichteren Valeriansäure 2 cc vorsichtig abpipettiert und mit Kalilauge titriert wurde; die Versuchsergebnisse sind in der folgenden Tabelle niedergelegt. Kolumne I enthält die in Valeriansäure gelösten, in Wasser unlöslichen Körper N, deren Einfluß auf die Löslichkeit derselben untersucht werden sollte; II enthält die Molekulargewichte, III die Mengen x in g, welche zu den 5 cc Valeriansäure hinzugefügt wurden, IV die beobachteten Löslichkeiten L, d. h. die Anzahl cc Kalilauge, die 2 cc der wässerigen Lösung entsprachen.

Tab. I.

I	II	III	IV	V	VI
N	M	x	L	$\frac{L_0-L}{L}\cdot\frac{M}{x}$	M ber.
Benzol	78	0.182	9.90	25.2	75
„	78	0.431	9.39	20.9	89
Chloroform	119.5	0.150	10.17	24.2	118
Menthol	156	0.246	10.11	23.6	161
Campher	152	0.160	10.18	27.9	132
„	152	0.970	8.81	29.7	123
Xylol	106	0.376	9.76	20.9	122
Stearinsäure	284	0.165	10.34	23.4	291.

Tab. I lehrt zunächst, daß im Sinne unserer Entwickelungen die Löslichkeit infolge fremden Zusatzes stets kleiner wird, da L_0 die Löslichkeit der Valeriansäure ohne fremden Zusatz 10.48 betrug. Zur quantitativen Prüfung schreiben wir Gl. (5) in der Form

$$(6) \qquad \frac{L_0-L}{L} = \frac{x\,102}{M\,4.13} = 24.5\,\frac{x}{M}.$$

102 ist das Molekulargewicht der Valeriansäure und 4.13 die Anzahl g, welche x g des fremden Zusatzes gelöst enthielten, indem von den 5 cc Säure = 4.64 g 0.51 g an das Wasser abgegeben wurden. Der Ausdruck $\frac{L_0-L}{L}\cdot\frac{M}{x}$ ist in Kolumne V berechnet; der theoretische Wert dieser Konstante beträgt 24.5 und thatsächlich weisen die Zahlen der Kolumne V eine immerhin bemerkenswerte Konstanz auf und entfernen sich von dem theoretischen Werte nicht zu sehr. Als wahrscheinlichsten empirischen Wert der Konstante wähle ich 24; berechnet man mit dieser umgekehrt die Molekulargewichte M, so findet man die unter VI verzeichneten Zahlen. Man erkennt, daß obige Methode trotz ihrer rohen Form immerhin auch praktisch brauchbare Werte liefern kann; an Handlichkeit ließe sie wenig zu wünschen übrig, da man ja das gesuchte Molekulargewicht mittelst einer Titration findet, doch stehen einer Anwendbarkeit die unangenehmen Eigenschaften der Valeriansäure sehr im Wege.

Aether.

In Ermangelung besserer Methoden bestimmte ich den Aethergehalt der wässerigen Lösungen aus ihrem spezifischen Gewicht. Ein Pyknometer der Sprengel-Ostwald'schen Form enthielt mit Wasser von 18° gefüllt 20.038 g; als anstatt Wasser eine mit

Aether gesättigte wässerige Lösung unter besonderen Vorsichtsmaßregeln, um Verdunstung zu vermeiden, eingeführt wurde, sank sein Gewicht um 284.3 mg, und als Wasser anstatt mit reinem Aether in Berührung mit Aether, welcher einen fremden, in Wasser nicht löslichen Körper enthielt, gebracht wurde, war die Gewichtsabnahme d stets kleiner als 284.3 mg, zum Zeichen, daß weniger Aether an das Wasser abgegeben war. Man kann d unbedenklich dem Aethergehalte proportional setzen, und so wird Gl. (5) für diesen Fall

$$M = \frac{d \cdot 74 \cdot \alpha}{(284.3 - d)}$$

wo α die Anzahl g des fremden Körpers auf 1 g Aether, und 74 das Molekulargewicht des Aethers bedeutet.

Tab. II.

I	II	III	IV	V
N	M	α	d	M ber.
Benzol	78	0.078	265.5	81
„	78	0.212	235.0	75
Chloroform	119.5	0.083	269.6	113
Jod	254	0.087	276.3	222
Jodoform	394	0.095	279.8	437

Tab. II zeigt, daß auch hier die Löslichkeitserniedrigung der Theorie entspricht und daß dieselbe nach Maßgabe der Molekulargewichte der Körper N erfolgt. Die Abweichungen zwischen den gefundenen und den thatsächlichen Molekulargewichten liegen innerhalb der hier recht beträchtlichen Fehlerquellen bei Bestimmung von d. Der Jodmolekel kommt nach obigem in ätherischer Lösung die Molekulargröße J_2 zu, entsprechend den jüngst von Beckmann nach der Siedemethode erhaltenen Resultaten.

Phenol.

Phenol und Wasser lösen sich gegenseitig in zu beträchtlicher Menge, um einen genaueren Anschluß der Gl. (5) an die Erfahrung zu erwarten; gleichwohl ließ sich auch hier sicher nachweisen 1) daß in Phenol gelöste Körper dessen Löslichkeit in Wasser ihrem Molekulargewicht umgekehrt proportional erniedrigen, 2) daß die absolute Größe dieser Erniedrigung sich annähernd aus den Molekulargewichten des Lösungsmittels (Phenol) und der gelösten Körper (Benzol, Chloroform, Jodoform) berechnen läßt. Die Analyse des Phenols im Wasser geschah aus dem Brechungsvermögen

der wässerigen Lösung, welches ich mit Hülfe des handlichen Pulfrich'schen Totalreflektometers bestimmte.

Aethylacetat.

Auch bei diesem Lösungsmittel überzeugte ich mich leicht durch Bestimmung des Brechungsvermögens der wässerigen Lösung, daß Zusatz eines fremden Körpers die Löslichkeit des Aethylacetats in Wasser herunterdrückt.

Zur quantitativen Messung der hier obwaltenden Verhältnisse bot sich jedoch ein anderer Weg dar, welche an Sicherheit und Bequemlichkeit wenig zu wünschen übrig läßt. Kühlt man nämlich ein Gemisch der gegenseitigen Lösungen von Wasser und Aethylacetat ab, so wird offenbar Eis bei der Temperatur auszufrieren beginnen, welche der durch die Konzentration des in das Wasser übergegangenen Aethylacetats hervorgerufenen Gefrierpunktserniedrigung entspricht. Löst man nun im Ester einen andern, in Wasser unlöslichen Körper auf, so wird nach unsern Formeln die Konzentration des Esters im Wasser eine geringere werden und demgemäß der Gefrierpunkt steigen. Unter der nahe zutreffenden Voraussetzung, daß die Gefrierpunktserniedrigung, die das Wasser durch seinen Gehalt an Ester erfährt, jenem proportional ist, wird nach Gl. (5)

$$\frac{t_0 - t}{t} = \frac{m}{100 \cdot M},$$

wo t_0 und t die Gefrierpunktserniedrigungen des Wassers vor und nach dem Zusatz eines fremden Körpers zum Ester, m die Anzahl Gramme des fremden Körpers auf 100 g Molekeln des Esters und M das Molekulargewicht des fremden Körpers bedeuten.

Aethylacetat besitzt in Wasser ein normales Molekulargewicht; Messungen nach Raoult's Methode, die ich mittelst des von Beckmann angegebenen Apparats ausführte, lieferten für die Molekulargröße dieses Körpers bei Erniedrigungen von 0.371 und 1.11° die Werte 86 und 88, dem aus der Formel des Esters berechneten (88) entsprechend. Indem ich zu Wasser so lange Aethylacetat zusetzte, bis letzteres ungelöst blieb und somit der Gefrierpunkt unabhängig von dessen Menge wurde, ermittelte ich, daß bei −2.430°, dem Gefrierpunkte einer gesättigten wässerigen Lösung, 10 g Wasser 1.1 g des Esters lösen. Wasser wird vom Ester nur wenig (2—3 %) gelöst.

Die Messungen wurden nun in der Weise ausgeführt, daß ich 20 cc Aethylacetat = 18.02 g und 4.4 g Wasser in Beckmann's

Gefrierapparat einführte; dann gehen 0.4 g Wasser in den Ester, und die zurückbleibenden 4 g Wasser lösen ihrerseits 0.44 des Esters. Nach Bestimmung der Temperatur, bei der Wasser auszufrieren beginnt und das Thermometer einen konstanten Stand annimmt, wurde der in Wasser unlösliche Körper, dessen Einfluß auf die Löslichkeit des Aethylacetats untersucht werden sollte, in successive immer größeren Mengen zugeführt, wobei ich genau, wie von Beckmann beschrieben[1]), verfuhr. Die Bestimmung des Gefrierpunkts konnte mit aller Schärfe, bis auf wenige tausendstel Grad, geschehen, und zwar nach meinen bisherigen Erfahrungen mit größerer Genauigkeit, als dies bei der Bestimmung des Gefrierpunkts gewöhnlicher Lösungen möglich ist. Es rührt dies wohl daher, daß man bei diesen Eis nicht in größerer Menge ausfrieren lassen kann, ohne gleichzeitig die Konzentration der Lösung erheblich zu ändern, was wiederum auf den Gefrierpunkt zurückwirkt; um aber konstante Temperatur zu erzielen, darf wieder die Menge des ausgeschiedenen Eises nicht unter eine gewisse Größe sinken. Wenn hingegen bei meiner Versuchsanordnung Wasser selbst in größeren Mengen ausfriert, so ändert sich die Konzentration des Esters, auf die es allein ankommt, äußerst unbedeutend. Wesentlich aber ist ein energisches Umrühren der beiden im Gefrierapparat vorhandenen Flüssigkeitsschichten, damit der etwas komplizierte Gleichgewichtszustand zwischen den drei Körpern, die zugegen sind, sich richtig einstellt.

Folgende Tabelle enthält die Versuchsresultate.

Tab. III.

I	II	III	IV	V
N	M	*m*	$t_0 - t$	*M* ber.
Benzol	78	395	0.123	74
		580	0.170	77
		890	0.245	79
Naphthalin	128	309	0.061	120
		417	0.078	126
		710	0.118	139
		1180	0.184	144
Phenylbenzoat	198	195	0.022	213
		835	0.081	242

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung zwischen den durch die Gefrierpunktserhöhung gemessenen und den nach der chemischen

1) Zeitschrift f. physik. Chemie 2 (1889).

Formel berechneten Molekulargrößen nahe ebenso gut, wie es bei den nach Raoult's Methode ermittelten Molekulargewichten der Fall ist. Abweichungen bis zu 10 % kommen auch dort vor, ohne daß man sie sich erklären könnte. Größer scheinen die Abweichungen hier auch nicht zu sein, und beim Phenylbenzoat dürfte bei noch größerer Verdünnung der normale Wert erreicht werden. Es scheint so thatsächlich ermöglicht, Lösungsmittel wie Aethyläther, Aethylacetat u. dergl. zur Molekulargewichtsbestimmung im Gefrierapparate zu verwenden; doch darf nicht verschwiegen werden, daß die Gegenwart eines dritten Körpers außer Lösungsmittel und gelöstem Körper, des Wassers, bisweilen zu weiteren Komplikationen Veranlassung geben kann.

Wichtiger aber als die Aussicht, zu den bereits ziemlich zahlreich vorhandenen Methoden der Molekulargewichtsbestimmung von in Lösung befindlichen Körpern neue hinzuzufügen, scheint mir die durch die mitgetheilten Messungen wohl außer Zweifel gesetzte Thatsache zu sein, daß die von dem Vorgange der Verdampfung auf den der Auflösung in beliebigen Lösungsmitteln durch Analogieschluß übertragenen Gesetzmäßigkeiten, wie schon früher wiederholt, so auch hier an der Erfahrung sich bestätigen.

Verbesserungsvorschläge zu Euripides.

Von

Friedrich Wieseler.

Medea.

Die Vorschläge für die Medea sind meist unmittelbar nach dem Erscheinen der Arnim'schen Ausgabe dieses Drama geschrieben und in Beziehung auf dieselbe. H. von Arnim hat, wie auch andere Herausgeber, keine Kunde gehabt von meiner Recension der Schöne'schen Ausgabe der Medea in den Götting. gel. Anzeigen 1855 S. 1659 fg. Ich werde in dem Folgenden auch diejenigen von mir selbständig vorgeschlagenen Verbesserungen aufführen, die von ihm nach Anderen in den Text aufgenommen sind. Der hier ausgeschriebene Text und die Verszählung sind nach der Nauck'schen Ausgabe.

Vs 158

sagt der Chor zu Medea:

Ζεύς σοι τόδε συνδικήσει.

Darauf Medea:

ὦ μεγάλα Θέμι καὶ πότνι' Ἄρτεμι
λεύσσετ' ἃ πάσχω.

Endlich ihre Amme zum Chor:

κλύεθ' οἷα λέγει κἀπιβοᾶται
Θέμιν εὐκταίαν Ζῆνά θ' ὃς ὅρκων
θνατοῖς ταμίας νενόμισται;

Daß man an den Worten der Medea keinen Anstoß genommen hat, ist mir unbegreiflich. Man hat zur Erklärung der Anrufung der Artemis gesagt: „zu Artemis stand Medea in einem speciellen Verhältniß, da sie in den *Πελιάδες* des Euripides als Priesterin derselben auftrat". Es läßt sich noch hinzufügen, daß Artemis auch sonst als über das Thun der Menschen Aufsicht übend und ihre Frevel strafend vorkommt. Ob aber die vorliegende Stelle hierher gehört, ist mir mehr als zweifelhaft. Wie kommt es, daß die Amme von der Artemis gar nicht spricht? Mit welchem Scheine kann man sagen: „der Relativsatz ὃς ὅρκων u. s. w. soll rechtfertigen, daß die Amme hier den Zeus nennt, obgleich Medea ihn nicht namentlich angerufen hatte?" Das könnte ja ganz aussehen wie ein Vorwurf gegen Medea, der um so schwerer wiegen würde, als der Chor unmittelbar vorher ihr den Zeus genannt hatte. Daß aber Medea den Zeus nicht etwa absichtlich ignorirt, geht hervor aus ihren Anrufungen in Vs 332 und 764 ὦ Ζεῦ Δίκη τε Ζηνός. Vgl. auch was der Chor Vs 207 fg. sagt. Sicherlich waren in Vs 160 Zeus und Themis erwähnt, nicht aber Artemis. Ich schlug in den Götting. gel. Anz. a. a. O. S. 1660 vor:

ὦ μεγάλε Ζεῦ πότνιά τ' ὦ Θέμι.

Noch leichter würde es sein zu schreiben:

ὦ μεγάλε Ζεῦ καὶ ποτνιὰς Θέμι.

Die seltenere Form *ποτνιὰς* für *πότνια* findet sich bei Euripides auch Orest. Vs 318.

Vs 282 fg.

lassen die Handschriften den Kreon zu Medea sagen:

δέδοικά σ', οὐδὲν δεῖ παραμπέχειν λόγους,
μή μοί τι δράσῃς παῖδ' ἀνήκεστον κακόν,
σμμβάλλεται δὲ πόλλα τοῦδε δείματος.

Daß in dem letzten Vers ein Fehler steckt, ist schon längst bemerkt. Weil hat für *σμμβάλλεται* vermuthet *συλλαμβάνει* und H. von Arnim dieses, obwohl zweifelnd, in den Text aufgenommen. Er vergleicht Vs 946:

συλλήψομαι δὲ τοῦδέ σοι καγὼ πόνοι.

Diese Stelle ist aber wesentlich verschieden. Ich habe in den

Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1661 vermuthet, daß für *δείματος* zu schreiben sei: *δ ε ί γ μ α τ α*, ein Wort, das auch sonst bei Euripides vorkommt: „es treffen aber viele Anzeigen dafür zusammen".

Vs 336 fg.

ΜΗ. μὴ δῆτα τοῦτό γ', ἀλλά σ' αἰτοῦμαι, Κρέον —
ΚΡ. ὄχλον παρέξεις, ὡς ἔοικας ὦ γύναι.
ΜΗ. φευξούμεθ' · οὐ τοῦθ' ἱκέτευσα σοῦ τυχεῖν.
ΚΡ. τί δ' αὖ βιάζει κοὐκ ἀπαλλάσσει χθονός;

Man nimmt an, daß Medea von Kreon Vs 337 unterbrochen werde. Ich möchte lieber in Vs 336 für *ἀλλά* schreiben: *ἄ λ λ α*. Dafür spricht meines Erachtens auch Vs. 338, in Betreff dessen bei den Erklärern ein merkwürdiges Stillschweigen herrscht. Ich kann die Worte *οὐ τοῦθ'* u. s. w. nicht verstehen und glaube, daß in *σοῦ τυχεῖν* ein Fehler steckt, daß ursprünglich geschrieben war: *σ' ε ὐ τ υ χ ε ῖ ν* „nicht um in Betreff dieses, des *φεύγεσθαι*, gutes Gelingen zu haben". Bei dem Worte *αἰτοῦμαι* soll Medea Kreons Hand ergreifen. Für *χθονός* in Vs. 339 soll zu schreiben sein: *χερός*. Bei dem *ἱκετεύειν* fanden allerdings verschiedene Geberden statt, auch das Fassen der rechten Hand, vgl. Eur. Hec. 752 fg.

Ἀγάμεμνον, ἱκετεύω σε τῶνδε γουνάτων
Καὶ σοῦ γενείου δεξιᾶς τ' εὐδαίμονος.

Aber das Berühren der Knie ist die hauptsächlichste und daß dieses hier gemeint ist, geht nicht allein hervor aus Vs 324, sondern auch aus Vs 370:

οὐδ' ἂν προσεῖπον οὐδ' ἂν ἡψάμην χεροῖν.

Ist also *χθοιός* verderbt, was auch ich für wahrscheinlich halte, so wird *χ ρ ο ό ς* zu schreiben sein, was der handschriftlichen Lesart auch noch näher steht als *χερός*. *Χρώς* ist vom ganzen Körper auch unten Vs. 689 und 787 gebraucht.

In Vs. 339 ist mit Andern *τί δ' οὖν* zu schreiben.

Vs 460

habe auch ich schon vorlängst *τὸ σὸν δὲ* für *τοσόνδε* vermuthet.

Vs 584

hat nach H. von Arnim (S. 117) „die Interpunktion nach *σύ*, welche der Stelle erst recht aufhilft, zuerst Witzschel gesetzt". Ich behauptete schon in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1661 fg., daß zu schreiben sei: *ὡς καὶ σύ · μή ν υ ν - γένῃ*, während Schöne herausgegeben hatte: *ὡς καὶ σὺ μὲν νῦν — φανεῖ*.

Vs 656

hat nicht bloß Nauck sondern auch H. von Arnim Musgrave's *ἔφτισεν* statt des handschriftlichen ohne Zweifel verderbten *ἔφτεισε*

in den Text gesetzt. Ich habe schon in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1662 als das Wahrscheinlichste vorgeschlagen: *οἰκτερεῖ*, mit der Bemerkung, daß dieselbe Form auch bei Aeschylos Fragm. 210 Vs. 6 Herm. vorkomme. Dasselbe möchte lieber Nauck in der 1871 erschienenen Ausgabe des Euripides Vol. II, p. XXIV.

Vs 695

bezeichnet H. von Arnim das von ihm aufgenommene *μή που* als „Emendation von Schenkl". Auch ich habe selbständig in den Gött. gel. Anz. so geschrieben.

Vs 723 fg.

steht in den Handschriften als von Aegeus zu Medea gesprochen

οὕτω δ' ἔχει μοι· σοῦ μὲν ἐλθούσης χθόνα,
πειράσομοί σου προξενεῖν δίκαιος ὤν.

Ich habe schon in den Gött. gel. Anz. a. a. O. bemerkt, daß *χθόνα* allein unmöglich geduldet werden kann, sondern Aegeus sein Land ausdrücklich bezeichnen muß. Von den beiden dort vorgeschlagenen Aenderungen ist die leichteste und wahrscheinlichste *'μοῦ* für *σοῦ*.

Vs 734 fg.

sagt Medea zu Aegeus:

πέποιθα· Πελίου δ' ἐχθρός ἐστί μοι δόμος
Κρέων τε, τούτοις δ' ὁρκίοισι μὲν ζυγείς,
ἄγουσιν οὐ μεθεῖ' ἂν ἐκ γαίας ἐμέ·
λόγοις δὲ συμβὰς μὴ θεῶν ἐνώμοτος
φίλος γένοι' ἂν κἀπικηρυκεύματα
τάχ' ἂν πίθοι σε.

Für *μὴ* bieten in Vs 737 die Handschriften *καὶ*, für *κἀπικηρυκεύματα* in Vs 738 *κἀπικηρυκεύμασι*, jenes las aber der Scholiast.

In Vs 739 steht anstatt *τάχ'* in den Handschriften *οὐκ* und bieten dieselben *πίθοιο* statt *πίθοι σε*.

In dieser schwierigen Stelle habe ich in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 1663, indem ich Vs 735 und 736 unverändert ließ, in Vs 737 für *καὶ θεῶν ἀνώμοτος* geschrieben: *κατὰ θεῶν ἀνώμοτος*. Die Redensart *ὀμνύναι κατά τινος* ist ja bekannt.

Für *φίλος* in Vs 738 schlug Nauck vor *φηλός*. Allerdings ist jenes Wort sicherlich verderbt. Aber ein Wort mit dem Begriffe von „betrügerisch" darf man doch schwerlich der Medea dem Aegeus gegenüber in den Mund geben, wohl dagegen eins, durch welches Beweglichkeit, Schwanken bezeichnet wurde. Sollte etwa *σφηλὸς* geschrieben gewesen sein? Bei Hesychios finden wir: *σφηλόν· λοξόν. πυκνόν. εἰκίνητον. Ἄσφηλον δὲ τὸ ἀκίνητον*, also = *ἀσφαλές*.

Stesichoros nannte den Herakles ἐρίσφηλος, „sehr erschütternd", nach Etym. Magn.

Im letzten Verse ist πίθοιο nicht zu ändern, wenn man nur die handschriftliche Lesart κἀπικηρυκεύμασι im vorletzten annimmt. Für οὐκ im letzten Verse paßt recht wohl τάχ', „vielleicht wohl"; doch würde ἔτ' leichter sein.

Vs 773

sagt Medea zum Chor:

δέχου δὲ μὴ πρὸς ἡδονὴν λόγους.

Man deutet: erwarte nicht, daß ich Fröhliches sagen werde. Dieser Gedanke ist meiner Ansicht nach unpassend. Ich schlage vor, für μὴ zu schreiben: μοι, „nimm meine Worte so auf, wie es mir Freude macht, wie ich es wünsche".

Vs 789

bieten die Handschriften:

τοιοῖσδε χρίσω φαρμάκοις δωρήματα.

Daran hat keiner der Erklärer Anstoß genommen, wohl aber ein Mitglied meines archäologischen Seminars, welches in einer Arbeit über das Scenische in der Medea richtig bemerkte, daß die Sprecherin im Folgenden die Bühne nicht verläßt. Der Anstoß wird beseitigt, wenn man mit mir schreibt: τοιοῖσδ' ἔχρισα.

Vs 1065

καὶ δὴ πὶ κρατὶ στέφανος, ἐν πέπλοισι δὲ
νύμφη τύραννος ὄλλυται, σάφ' οἶδ' ἐγώ.

Da Kreusa ebensowohl durch den Kranz auf dem Haupte als durch das angelegte Gewand ihren Untergang fand (s. Vs 784fg., 983, 949fg.), so ist es wahrscheinlich, daß geschrieben war: στέφανον (sc. ἔχουσα) ἐν πέπλοισί τε.

Vs 1077fg.

sagt Medea zu ihren Kindern nach den besten Handschriften:

χωρεῖτε χωρεῖτ' · οὐκέτ' εἰμὶ προσβλέπειν
οἷα 'τ' ἐς ὑμᾶς, ἀλλὰ νικῶμαι κακοῖς.

Man hat hier mit Recht an der Verbindung von προσβλέπειν mit ἐς Anstoß genommen und Prinz deshalb vorgeschlagen: τε παῖδας. Aber leichter ist es doch jedenfalls zu schreiben: εἰμί πως βλέπειν. Daß die Kinder nach χωρεῖτ' und vor οὐκέτ' schon fortgegangen sein sollten, hat zudem keine Wahrscheinlichkeit.

Vs 1121

redet der Trabant des Iason die Medea an mit den Worten:

ὦ δεινὸν ἔργον παρανόμως εἰργασμένη.

Dieselben sind von Lenting für unecht erklärt und ihm stimmt H. von Arnim bei, indem er bemerkt, der Hauptgrund liege in παρανόμως, welches für Medeias That im Munde des Boten ein armseliger Ausdruck sei. Daß παρανόμως durchaus nicht passe, gebe auch ich zu. Aber läßt sich nicht an ein Adverbium denken, das „unsinnig, wahnsinnig" bedeutete? Das Nächststehende wäre wohl παρανόως. Das Adjektiv παράνους findet sich in Aeschyl. Agam. 1134.

Vs 1157 fg.

berichtet der Trabant des Iason über dessen Gemahlin der Medea:

ἀλλ' ἦνεσ' ἀνδρὶ πάντα· καὶ πρὶν ἐκ δόμων
μακρὰν ἀπεῖναι πατέρα καὶ παῖδας σέθεν,
λαβοῦσα πέπλους ποικίλους ἠμπίσχετο.

In den besten Handschriften steht πάτερα καὶ τέκνα σέθεν, welches letzte Wort im cod. Laurent. fehlt, während der cod. S. es bietet. Die ursprüngliche Schreibart des zweiten Verses ist allerdings nicht mit Sicherheit zu erkennen. Indessen ist doch wohl das Wahrscheinlichste, daß πατέρα verderbt ist aus κἄνδρα, wozu der Ausfall des $\bar{\nu}$ vor $\bar{\delta}$, der sich auch sonst nicht selten findet, Veranlassung gegeben haben mag.

Vs 1181 fg.:

ἤδη δ' ἂν ἕλκων κῶλον ἐκπλέθρου δρόμοι
ταχὺς βαδιστὴς τερμόνων ἀνθήπτετο,
ἡ δ' ἐξ ἀναύδου καὶ μύσαντος ὄμματος
δεινὸν στενάξασ' ἡ τάλαιν' ἠγείρετο.

Die handschriftliche Lesart in Vs. 1181 ist ἀνέλκων. Daß weder dieses noch ἕλκων paßt, ist wohl klar; aber dasselbe gilt auch von ἕρπων, einer Conjectur Usener's, welche H. von Arnim sogar in den Text aufgenommen hat. Dagegen scheint uns sehr passend: ἀνελθών. Ἀνέρχεσθαι paßt in der Bedeutung von „zurückkehren" vortrefflich, da es bei dem δίαυλος auf das Wiederanlangen am Auslaufsziel ankommt. Ja es scheint uns nöthig, daß ausdrücklich angedeutet war, daß es sich um διαύλου θάτερον κῶλον (Aesch. Agam. 344) handele. Da ein ἂν nicht fehlen kann, wird mit Musgrave in Vs. 1182 ἂν ἥπτετο zu schreiben sein. Wenn H. von Arnim den Ausdruck βαδιστὴς für auffallend hält, so glaube ich, daß derselbe absichtlich gewählt ist, um den Läufer zu Fuß gegenüber einem δρομεύς, welcher δισσοὺς διαύλους ἱππικοὺς διήνυσε (Eurip. Eleotr. Vs. 824) zu bezeichnen.

Daß Niemand an ὄμματος in Vs. 1183 Anstoß genommen hat, ist sonderbar. Gewiß war κώματος geschrieben. Das μύειν bezieht sich hier nicht auf die Augen, sondern auf die Lippen.

Vs 1185 fg.

heißt es weiter über die Glauke:

διπλοῦν γὰρ αὐτῇ πῆμ' ἐπεστρατεύετο.
χρυσοῦς μὲν ἀμφὶ κρατὶ κείμενος πλόκος
θαυμαστὸν ἵει νᾶμα παμφάγου πυρός·
πέπλοι δὲ λεπτοί, σῶν τέκνων δωρήματα,
λέπτην ἔδαπτον σάρκα τῆς δυσδαίμονος.
φεύγει δ' ἀναστᾶσ' ἐκ θρόνων πυρουμένη.

In Vs. 1188 wird ganz so gesprochen, als gehörte der χρυσοῦς πλόκος nicht zu den τέκνων δωρήματα. Sicherlich sollten aber diese Worte auch zu jenen Apposition bilden. Dazu bedarf es nicht bloß der Veränderung des δὲ hinter πέπλοι in τε, sondern auch einer, durch welche ἔδαπτον in Vs 1189 auch zum Prädicat von χρυσοῦς πλόκος wird. Zu diesem Behufe genügt eine sehr leichte Correctur in Vs 1187: θαυμαστὸν ἴεις. Das μὲν in Vs 1186 entspricht dem δ' in Vs 1190. Das διπλοῦν πῆμα besteht darin, daß der πλόκος und die πέπλοι λευκὴν (denn so ist statt λεπτὴν zu lesen) ἔδαπτον σάρκα und daß Glauke durch ihr Aufspringen und ihre Bewegung des Kopfes das Unheil noch vergrößert.

Vs 1204 fg.:

πατὴρ δ' ὁ τλήμων συμφορᾶς ἀγνωσίᾳ
ἄφνω παρελθὼν δῶμα, προσπίτνει νεκρῷ·
ᾤμωξε δ' εὐθύς, καὶ περιπτύξας δέμας
κυνεῖ.

Παρελθὼν in Vs 1205 hat Nauck für das handschriftlich überlieferte προσελθὼν eingesetzt. H. von Arnim ist ihm gefolgt, da dieses nicht das Eintreten bedeuten könne. Unter δῶμα könnte doch wohl nur die Gynaikonitis verstanden sein, die man sich als im Augenblick offen stehend zu denken hätte, und das hat wenig Wahrscheinlichkeit. Vermuthlich war δεῖμα geschrieben: „Schreckensbild", vgl. δεινὸν θέαμα Vs 1202. — Was εὐθὺς in Vs 1206 soll, ist gar nicht einzusehen. Ich dachte zunächst an εὔνις d. i. kindlos. Ueber dieses Wort und sein Vorkommen bei den Tragikern: Blomfield's Glossar. in Aesch. Persas vs 294. Aber es ist noch eine andere Veränderung möglich, ja wahrscheinlicher, nämlich ἐς τρίς, d. i. dreimal, was auch sonst bei den Tragikern in der Bedeutung von τρὶς vorkommt.

Vs 1296 fg.

sagte Iason in Beziehung auf Medea:

δεῖ γάρ νιν ἤτοι γῆς σφε κρυφθῆναι κάτω,
ἢ πτηνὸν ἆραι σῶμ' ἐς αἰθέρος βάθος.

Da *σφε* hier neben *νιν* nicht geduldet werden kann, so hat man Verschiedenes vorgeschlagen. Ich glaube nun, daß *κρυφθῆναι* hervorgegangen ist aus dem selteneren Aoristus sec. *κρυφῆναι* (Soph. Aj. 1145) und schlage vor zu schreiben: *γῆς ὕπο κρυφῆναι*. Der Tribrachys an der vierten Stelle finden wir in der Medea auch Vs 479 und 505.

Vs 1359

bieten die Handschriften:

καὶ Σκύλλαν ἢ Τυρσηνὸν ᾤκησεν πέδον.

Daß das letzte Wort verderbt ist, scheint zweifellos, obgleich H. von Arnim daran keinen Anstoß genommen hat. Man hat *σπέος*, *πέτραν*, *πέτρον* vermuthet. Uns ist das Wahrscheinlichste: *πόρον*. Vgl. Lycophr. Vs 1085: *ὑπὲρ πόρον Ταρσηνόν*. Die Verderbniß in *πέδον* entstand dadurch, daß *πόρον* in *ΠΕΡΟΝ* verschrieben war.

Rasender Herakles.

Vs 861 fg.:

εἶμί γ' οὔτε πόντος οὔτω κύμασι στένων λάβρος
οὔτε γῆς σεισμὸς κεραυνοῦ τ' οἶστρος ὠδῖνας πνέων,
οἵ' ἐγὼ στάδια δραμοῦμαι στέρνον εἰς Ἡρακλέους
καὶ καταῤῥήξω μέλαθρα καὶ δόμους ἐπεμβαλῶ,
τέκν' ἀποκτείνασα πρῶτον· ὃ δὲ κανὼν οὐκ εἴσεται
παῖδας οὓς ἔτικτ' ἐναίρων, πρὶν ἂν ἐμὰς λύσσας ἀφῇ,
ἢν ἰδοὺ καὶ δὴ τινάσσει κρᾶτα βαλβίδων ἄπο
καὶ διαστρόφους ἐλίσσει σίγα γοργωπούς κόρας,
ἀμπνοὰς δ' οὐ σωφρονίζει, ταῦρος ὡς ἐς ἐμβολήν,
δεῖνα μυκᾶται δὲ Κῆρας ἀνακαλῶν τὰς Ταρτάρου.

Eine außerordentlich verderbte Stelle, in welcher die zahlreichen Fehler meist nicht geahnt sind.

Daß man in Vs. 862 *ὠδῖνας* sich hat gefallen lassen, ist höchst wunderbar. Ohne Zweifel war von einer besonders gewaltigen Wirkung des *κεραυνὸς* die Rede. Der *κεραυνὸς* setzt die Luft in Bewegung, bringt Wind, im Besonderen Sturmwind, Wirbelwind zuwege. Man erinnere sich nur des Wortes *πρηστήρ*, das sowohl von diesem als dem Blitze gebraucht wurde, und an die Redensarten fulminis ventis afflare (Verg. Aen. IV, 246), fulminis turbo (Ammian. Marc. XVII, 8), an den *κεραυνὸς ἑλικίας* (Tzetzes zu Lykophron Vs 156), ὁ *συστροφὰς* (doch wohl *ἀνέμου* Phrynich. p. 178) *καὶ ἕλικας ποιῶν*, vgl. Schol. zu Aeschyl. Prometh. Vs 359 bei C. G. Haupt, Aeschyl. quaest. spec. primum p. 264 und 373, und Aristot. de mundo 4, p. 395 Bekker. So konnte der Dichter sehr wohl

ein Hauchen von Wirbelwinden erwähnt haben und das ist der Fall, wenn man schreibt: *κεραννοῦ γ' οἷστρος οὐ, δίνας πνέων*. Durch das *γε* wird der *κεραννὸς* sehr passend besonders hervorgehoben.

Was dann Vs 864 fg. betrifft, so ist es schon an sich lächerlich, die Lytta sagen zu lassen, daß sie die *δόμοι* auf die niedergerissenen *μέλαθρα* werfen werde. Es widerspricht aber auch dem Thatbestand, wie wir ihn unten finden, indem das Dach niedergerissen wird, der Palast selbst aber mit Ausnahme einer zerbrochenen Säule stehen bleibt, vgl. Vs 904 fg. und 1006 fg. *Δόμους* in Vs 864 muß also verderbt sein. Ferner paßt nicht, daß Lytta sagt, das Niederreißen der *μέλαθρα* werde geschehen, nachdem sie die Kinder getödtet habe, und noch weniger, daß sie sich das Tödten zuschreibt, da dasselbe, wenn es auch durch ihre Einwirkung geschah (Vs 886), doch ausdrücklich dem Herakles zugeschrieben werden müßte, wie es auch in den Worten *ὃ δὲ κανὼν* der Fall ist. Die handschriftliche Schreibart *ἀποκτείνασα* kann unmöglich richtig sein. Was endlich das *πρῶτον* soll, ist gar nicht einzusehen. Herakles tödtet ja nicht die Kinder zuerst, wenigstens das dritte erst zugleich mit seiner Gemahlin Megara, vgl. Vs 1000. Das *συμπίπτειν στέγης* (Vs 905), die *πεσήματα στέγης* (Vs 1007) haben jedenfalls schon vor der Tödtung die Kinder statt. Also auch *πρῶτον* kann unmöglich von dem Dichter herrühren. Ich schlage vor zu schreiben: *καὶ καταρρήξω μέλαθρα κἄς νόσους* (oder *καὶ νόσοις*) *σφ' ἐπεμβαλῶ τέκνʼ ἀποκτείνειν ταρακτόν.*

Νόσοι bezieht sich auf den Wahnsinn, den Lytta einflößt (Soph. Aj. 59: *μανιάδες νόσοι*, 452: *λυσσώδης νόσος*). Mit dem Ausdruck *ἐς νόσους* oder *νόσοις ἐμβάλλειν* vgl. man die bekannten *ἐς νόσον πίπτειν, νόσος ἐμπίπτει τινί.*

Σφὲ soll sich natürlich auf den im vorhergehenden Verse ausdrücklich genannten Herakles beziehen.

Ταρακτὸν bedurfte des Zusatzes von *φρένας* nicht, nicht bloß deshalb, weil durch *νόσοι* der Wahnsinn bezeichnet ist, sondern auch insofern, als Iris vorher in Vs 835 fg. der Lytta aufgetragen hatte, dem Herakles einzuflößen *μανίας καὶ παιδοκτόνους φρενῶν ταραγμούς.*

In Vs 866 hat wenigstens G. Hermann Anstoß genommen an den Worten *πρὶν ἂν ἐμὰς λύσσας ἀφῇ*. Er vermuthete: *ἐμῆς λύσσης ὑφῇ*. Nach meinem Dafürhalten mußte ausdrücklich bezeichnet sein, daß Lytta die von ihr eingeflößte Raserei von dem Herakles genommen habe. Ich schlage also vor zu schreiben: *ἀφῶ*, ohne andersweitige Aenderung.

Daß man in Vs. 867 den Ausdruck *βαλβίδων ἄπο* sich hat gefallen lassen können, ist staunenswerth. Was soll denn der Gedanke „von der Stufe, Schwelle her", wie man gedeutet hat? Offenbar war für *βαλβίδων* geschrieben: *Βακχίδων*. Die Form *Βακχὶς* gebraucht unter den Tragikern auch Sophokles Antig. 1129. *Ἄπο* wird wohl aus *νόμῳ* entstanden sein, wenigstens ist diese Herstellung die leichteste, da das *ν̄* am Anfang des Wortes wegen des *ν̄* am Schlusse des vorhergehenden leicht ausfallen konnte und *π̄* mit *μ̄* oft genug verwechselt wird. Doch kann für *ἄπο* auch *τρόπον* geschrieben gewesen sein. Daß gerade bei den Mänaden das *τινάσσειν κρᾶτα* in Schrift und Bild besonders hervorgehoben wird, ist bekannt genug.

Kaum weniger auffallend ist es, daß man an *σῖγα* im Vs 868 keinen Anstoß genommen hat. Wie paßt jenes Wort zu den Worten *δεινὰ μυκᾶται* im Vs 870? Will man etwa glauben, daß Herakles beim Verdrehen der Augen noch schweigt, unmittelbar darauf aber zu schnaufen und zu brüllen beginnt wie ein Stier? Gewiß sollen das Verdrehen der Augen und das Brüllen gleichzeitig nebeneinander ergehen. Statt *σῖγα* wird geschrieben gewesen sein: *σίλλα*, der adverbial gebrauchte Plural. neutr. von *σίλλος*. Dieses Wort kommt vor bei Lucian Lexiph. C. 3: *ἐγὼ δέ, ἢ δ' ὅς, σίλλος ὦ δέσποτα γεγένημαι σὲ περιορῶν*. Das Verbum *σιλλοῦν* erklärt Photius Lex. p. 512, 1: *τοὺς ὀφθαλμοὺς ἠρέμα παραφέρειν· οὕτως Ἀρχιππος*. Dieselbe Erklärung giebt Ael. Dion. bei Eustath. p. 204, 27, indem er nach *παραφέρειν* hinzufügt *ἐν τῷ διαφανλίζειν καὶ διασύρειν*.

Vs 906 fg.:

ἦ ἦ τί δρᾷς, ὦ Διὸς παῖ; μελάθρων
τάραγμα ταρτάρειον, ὡς
ἐπ' Ἐγκελάδῳ ποτὲ Παλλάς, εἰς δόμους πέμπεις.

Daß in diesen Worten des Chors kein Fehler stecke, ist mir unglaublich. Wenn *δρᾷς* in Vs 906 und *πέμπεις* in Vs 908 das Richtige wäre, wer könnte dann mit *Διὸς παῖ* in Vs 906 gemeint sein? Man müßte annehmen, daß Lytta bezeichnet sei und etwa schreiben: *Νυκτὸς ὦ παῖ*, also eine ziemlich starke Veränderung vornehmen, die aber nöthig sein würde, weil es nach Vs 864 keinem Zweifel unterliegen kann, daß das *δρᾶν* und das *πέμπειν* von der Lytta ausgehe. Selbst wenn es glaublich wäre, daß die in Vs 906 angeredete Person Hera sein solle, unter deren Einwirkung Lytta handele, müßte für *παῖ* ein Wort in der Bedeutung von *δάμαρ* eingesetzt werden. Man kann aber mit einer viel leichteren Veränderung abkommen, indem man in Vers 906 schreibt:

τί δρᾷ σ' und in Vs 908 πέμπει. Dann ist mit Διὸς παῖ Herakles gemeint und zu δρᾷ und πέμπει das Subjekt Lytta, welche noch Vs 899 ausdrücklich erwähnt wird in den Worten:

οὔποτ' ἄκραντα δόμοισι Λύσσα βακχεύσει.

Unter μέλαθρα ist wie in Vs 864 nur das Dach, die Decke zu verstehen, ebenso wie in Vs 905 und 1007 unter στέγη.

Etymologische Mittheilung.

Von

Leo Meyer.

Σῆματ-(Σῆμα) ‚Zeichen'.

Fast alle zunächst zu vergleichenden Bildungen haben im Griechischen noch lebendige Verbalformen zur Seite, so ἧματ- ‚Wurf' (Il. 23, 891; — ἧκε Il. 1, 382; 2, 309; ἵησιν Il. 3, 12; 21, 158; ἵη Il. 1, 479; 4, 397), βᾱματ- ‚Schritt, Gang' (Aesch. Ch. 799; Soph. Oed. Kol. 193; El. 163; — ἔβη Il. 1, 311; 424; βᾶ Il. 1, 34; 44; βήτην Il. 8, 115; 12, 330), -δᾱματ- ‚Gebundenes' (in ὑπό-δηματ- ‚Sohle' Od. 15, 369; 18, 361; ἄν-δηματ- ‚Stirnband' Pind. Bruchst. 179; — δῆσεν Il. 5, 730; 23, 854; δίδη Il. 11, 105), θᾱματ- ‚Gesetztes' (Soph. Bruchst. 498; auch in ἀνά-θηματ- ‚Aufgesetztes, Schmuck' Od. 1, 152; 21, 430; ἐπί-θηματ- ‚Deckel' Il. 24, 228; — ἔθηκεν Il. 1, 2; 3, 330; τίθησιν Il. 4, 83; 11, 392; τίθη Il. 1, 441; 446), νᾱματ- ‚Gesponnenes, Faden' (Od. 2, 98; 4, 134; — ἐπ-ένησε Il. 20, 128; νηθέντα Plat. Polit. 282, E; νήει Hes. Werke 777), λᾱματ- ‚Wille, Entschlossenheit' (Pind. Pyth. 3, 25; 8, 45; Nem. 1, 57; 3, 83; Aesch. Sieben 448; 616; 706; — λῇς Epich. 44; 94, 7; Ar. Lys. 95; λᾷ Epich. 94, 8; Ar. Lys. 1163), ἄηματ- (aus altem ἀ-ϝηματ-) ‚das Wehen' (Aesch. Ag. 1418; Eum. 905; Soph. Ai. 674; — ἄϝησι Her. Werke 516, = altind. *vāti* ‚er weht' RV. 4, 7, 10; 10, 142, 4; ἄϝητον Il. 9, 5; ἄϝη Od. 12, 325; 14, 458), κτᾱματ- ‚Besitzthum' (Il. 3, 70; 72; — κτήσατο Od. 14, 4; 450; ἐκτῆσθαι Il. 9, 402), -στᾱματ- ‚das Stehende' (in Zusammensetzungen wie ἐπί-στημα- ‚das Draufstehende, Grabdenkmal' Plat. legg. 12, 958, E; σύ-στημα- ‚aus Theilen bestehendes Ganzes' Plat. Phil. 17, D; Epin. 991, E; διά-στημα- ‚Zwischenraum' Plat. Tim. 36, A; Phil. 17, C; — ἔστη ‚er stellte sich' Il. 5, 108; 309; στῆ Il. 1, 197; 2, 20; στῆθι Il. 22, 222; 23, 97; καθ-ίστη ‚stelle' Il. 9, 202), σμᾱματ- ‚Gestrichenes, Salbe' (Philox. bei Athen. 9,

409, E. — σμησάμενοι Hdt. 4, 73; ἐπι-σμῇ Ar. Thesm. 389; σμῆν Luk. Lexiphan. 3), κνηματ- ‚Abgeschabtes' (κνήματα · ξύσματα Hippokr. in Galens Lex. — κνῇ Il. 11, 639; κνῆσθαι Plat. Gorg. 494, C; ἐξ-έκνησε Hdt. 7, 239), τρηματ- ‚Loch' (Ar. Wespen 141; Plat. Gorg. 494, B; — ξυν-έτρησαν Plat. Tim. 91, A; τέτρηται Hdt. 4, 158; δι-ετίτρη Appian Lib. 122), χρηματ- ‚Gebrauchtes, Besitzthum' (Od. 2, 78; 203; — χρῆται Aesch. Ag. 953; ἐχρήσατο Soph. Kön. Oed. 117; κέχρητο Od. 14, 421; 16, 398), ῥηματ- (aus altem ϝρηματ-) ‚Gesagtes, Wort' (Pind. Pyth. 4, 278; Nem. 4, 6; — ϝέϝρηται Il. 4, 363; ϝρηθέντι Od. 18, 413 = 20, 322), πληματ- ‚Füllung' (Hesych: πλῆμα· πλήρωμα. — πλῆτο Il. 17, 499; 21, 16; ἐν-έπλησαν Od. 17, 503; πίμπλησι Aesch. Bruchst. 57, 4), βληματ- ‚Wurf, Schuß' (Hdt. 3, 35; Eur. Schutzfl. 330; auch in Zusammensetzungen wie προ-βληματ- ‚Vorgehaltenes, Schirm' Aesch. Sieben 540; 676; — βλῆτο Il. 4, 518; 16, 570; βέβληται Il. 5, 103; ἐβλήθη Thuk. 8, 84), κληματ- ‚Gerufenes, Angeführtes' (in ἐγ-κληματ- ‚Beschuldigung, Vorwurf' Soph. Phil. 323; Trach. 361, und ἐπί-κληματ- ‚Beschuldigung, Vorwurf' Soph. Kön. Oed. 227; 529; — κέκληται Il. 10, 259; ἐκλήθην Soph. Kön. Oed. 1359), σκληματ- ‚Austrocknung' (Galen. lex. Hippokr.: σκληήματι· σκελετεία, συμπτώσει, wo zu lesen sein wird σκλήματι. — ἀπο-σκλῆναι Ar. Wespen 160; ἐξ-εσκληκότες Epich. 106; ἀπο-σκλήσῃ Antipatr. in Anth. 11, 37, 6), μνηματ- ‚Andenken' (Il. 23, 619; Od. 15, 126; — μέμνηται Il. 8, 362; μνήσει Od. 12, 38; μίμνησκε Od. 14, 169), τμηματ- ‚Abgeschnittenes, Stück' (Plat. Polit. 267, B; — τετμημένον Od. 17, 195; κατ-ετμήθη Hdt. 2, 108), πτηματ- ‚Flug' (Suidas: πτῆμα· πτῆσις οἰωνῶν. — ἐξ-έπτη Hes. Werke 98; ἐπι-πτήσεται Hdt. 7, 15), σχηματ- ‚Haltung, das Aeußere' (Aesch. Sieben 488; Soph. Phil. 223; — σχήσω Il. 17, 182; 24, 670; ἐσχήκασι Plat. legg. 6, 765, A; παρ-εσχημένος Xen. an. 7, 6, 11). — Zu πηματ- ‚Leid' (Il. 3, 50; 160) scheint παθ- ‚leiden' (πάθεν Il. 24, 7; Od. 1, 4) die nächste Grundlage zu bilden; ein Hervorgehen von πῆματ- aus πάθματ- aber, wie es gewöhnlich angenommen wird, ist sehr wenig wahrscheinlich. —

Neben κληματ- ‚Zweig' (Ar. Ekkl. 1031; Xen. Oek. 19, 8; Plat. Staat 1, 353, A), das mit κλῶν- ‚Zweig' (Eur. El. 324; Ion 423; Xen. Jagd 10, 7) und κλάδο-ς ‚Zweig' (Aesch. Schutzfl. 23; 159; Eum. 43) ohne Zweifel nahe zusammenhängt, bietet sich kein unmittelbar zugehöriges Verb, da κλᾶν ‚abbrechen' (ἐνι-κλᾶν Il. 8, 408; δια-κλάσσας Il. 5, 216; κλάσε Od. 6, 128; ἐκλάσθη Il. 11, 584; ἐναπο-κέκλαστο Thuk. 4, 34), von dem das substantivische κλάσματ- ‚Abgebrochenes, Bruchstück' (Plut. Tib. Gr. 19; Lukill. in Anth. 11, 153, 3) ausging, als solches nicht gelten kann.

Die gegebene Uebersicht weist den Weg zur Beurtheilung der Verbalgrundform, von der σῆματ- ausgegangen sein wird. Es bleibt nun noch die Frage nach der Vorgeschichte seines anlautenden Zischlauts zu erwägen.

Rein — das heißt vor unmittelbar folgendem Vocal — anlautendes σ steht so gut wie niemals an der Stelle von altem Zischlaut. Es ging vielmehr aus sehr verschiedenartigen Lautverbindungen hervor und zwar wesentlich in Folge von Lautassimilationen. Die homerische Sprache zeigt das darin noch sehr deutlich, daß sie bei Vorfügung von kurzen Vocalen, sei es präfixalen oder wortstammauslautenden, sei es dem Augment oder dem ε einer Reduplicationssilbe, das σ der in Frage stehenden Wortformen gewöhnlich verdoppelt.

So stehen neben den versbeginnenden σεύωνται ‚sie setzen sich in rasche Bewegung, sie rennen, sie stürmen daher' (Il. 11, 415) und causativ σεῦε ‚er setzte in rasche Bewegung, trieb fort' Il. 6, 133) die Formen ἐπι-σσεύεσθαι (Il. 15, 347), λαϝο-σσόϝο-ς ‚das Kriegsvolk erregend oder antreibend' (Il. 13, 128; 17, 398; 20, 48; 79), ἔσσευα (Il. 5, 208), ἔσσευε (Il. 11, 147; 14, 413), ἐσσεύοντο (Il. 2, 150; 808; 9, 80), ἐσσεύαντο (Il. 11, 549 = 15, 272), ἔσσυμαι (Il. 13, 79), ἔσσυται (Od. 10, 484; ἐπ-έσσυται Il. 1, 173; 6, 361; 9, 42), ἐσσυμένο-ς (Il. 11, 554 = 17, 663; 13, 142), ἐσσυμένως (Il. 3, 85; 15, 698; 23, 55). Zum Perfectstamm gehören wohl auch ἔσσυτο (Il. 2, 809 = 8, 58; 14, 519), ἔσσυο (Il. 16, 585; Od. 9, 447) und ἀπ-εσσύμεθα (Od. 9, 236 und 396; ἐπ-εσσύμεθα Od. 4, 454). Unzweifelhaft aoristische Form aber ist das vereinzelte augmentlose σύτο (Il. 21, 167). Bei freierer Stellung im Satz findet sich vor dem anlautenden σ des in Frage stehenden Verbs kurzer Vocal metrisch lang gebraucht Il. 17, 463 (φῶτας, ὅτε σεύαιτο) und Il. 23, 198 (ὕλη τε σεύαιτο καϝήμεναι), an welchen beiden Stellen aber die Ueberlieferung sehr schwankt.

Neben σείων ‚schüttelnd, schwingend' (Il. 5, 563; 9, 583) begegnen ἐπι-σσείων (Il. 15, 230), ἐπι-σσείησιν (Il. 4, 167), περι-σσείοντο (Il. 19, 382 und 22, 315), ὑπο-σσείουσιν (Od. 9, 385) und ἐσσείοντο (Il. 20, 59), dagegen bei freierer Stellung im Satz Il. 14, 285: ἀκροτάτη δὲ ποδῶν ὕπο σαίετο ὕλη ohne durch das σ bewirkte metrische Dehnung.

Weiter sind hier anzuführen περι-σσαίνουσι (Od. 16, 10), περί-σσαινον (Od. 16, 4) und περι-σσαίνοντες (Od. 10, 215) neben σαῖνον ‚sie wedelten' (Od. 10, 219), denen gegenüber ein augmentirtes ἔσηνε (Od. 17, 302: οὐρῇ μέν ῥ' ὅ γ' ἔσηνε) sehr auffällt. Man darf dafür wohl ἔσσηνε (? οὐρῇ μέν ῥ' ἔσσηνε) vermuthen.

Ferner gehört hieher *κονί-σσαλο-ς* ‚aufgewirbelter Staub' (Il. 3, 13; 5, 503; 22, 401), als dessen Schlußtheil das einfache *σάλο-ς* ‚unruhige, schwankende Bewegung' (Eur. Hek. 28: *ἐν πόντου σάλῳ*, Iph. Taur. 1443: *ποντίῳ λαβὼν σάλῳ*) wird gelten dürfen.

Noch ist hier zu nennen das häufige Beiwort der Schiffe *ἐύ-σσελμο-ς* ‚mit gutem Verdeck' oder ‚mit guten Ruderbänken' (Il. 2, 170; 358; 390; 613), als dessen Schlußtheil eine Nebenform zu *σέλματ-* ‚Verdeck, Ruderbank' (Hom. hymn. 6, 47; Aesch. Ag. 1442; Pers. 358) sich ergiebt, die sich von Hesych (*σελμῶν· σανίδων*) aufbewahrt findet.

Aus *ἐπί-σσωτρο-ν* ‚Metallbeschlag der Radfelgen' (Il. 5, 725; 11, 537; 20, 394; 502; 23, 505; 519. — Pollux 1, 144: *τῶν δὲ περιειλουμένων τῷ ἄξονι τροχῶν τὸ μὲν περὶ ταῖς ἀψῖσι σιδηροῦν ἐπίσωτρον, ἡ δὲ ἀψὶς καὶ σῶτρα καλεῖται*) ist das einfache *σῶτρο-ν* ‚Radfelge' (Pollux an der angeführten Stelle und 10, 53) zu entnehmen.

Weiter gehört hieher auch noch der Eigenname *Εὐ-σσωρο-ς* (Il. 6, 8: *υἱὸν Ἐυσσώρου Ἀκάμαντ' ἠΰν τε μέγαν τε*), der mit *σωρό-ς* ‚Haufen, Vorrath' (Hes. Werke 778; Hdt. 1, 22; 6, 125) als Schlußtheil gebildet sein wird. —

Eine von der so eben dargelegten abweichende Behandlung des *σ* zeigt sich in drei homerischen Zusammensetzungen mit dem beraubenden *ἀν-* (*ἀ-*), nämlich *ἀ-σήμαντο-ς* ‚ungeleitet, ungeführt' (Il. 10, 485: *ὡς δὲ λέων μήλοισιν ἀσημάντοισιν ἐπελθών*, wo vielleicht vermuthet werden darf *μήλοισ' ἀσσημάντοισιν*), *ἄ-σιτο-ς* ‚ohne Essen' (Od. 4, 788: *κεῖτ' ἄρ' ἄσιτος ἄπαστος*, wo etwa zu lesen sein würde *κεῖτ' ἄσσιτος*) und *ἀσινές-* ‚unverletzt' (Od. 11, 110 = 12, 137: *τὰς εἰ μέν κ' ἀσινέας ἐϝάᾳς*, wo etwa gemuthmaßt werden kann *τὰς εἴ κ' ἀσσινέας*).

Dann giebt es aber auch noch ein paar weitere das *σ* betreffende Ausnahmen, nämlich das reduplicirte *σέσηπε* (Il. 2, 135; daneben *σήπεται* Il. 24, 414) und die folgenden augmentirten Formen: *ἐσημήναντο* (Il. 7, 175), *ἐσύλευον* (Il. 5, 48), *ἐσύλα* (Il. 4, 105; 5, 164; 6, 28; 11, 110; 15, 524; 17, 60; 22, 368), *ἐσάωσε* (Il. 4, 12; 11, 752; 14, 259 und öfter; *ἐσάωσα* Od. 5, 130) und *ἐσάωθεν* (Od. 3, 185).

Wie weit etwa *κολοσυρτό-ς* ‚Lärm, Getümmel' (Il. 12, 147; 13, 472; Hes. theog. 880), *ἀσύφηλο-ς* ‚schnöde, ungebührlich' (Il. 9, 647; 24, 767), *οὐδενόσωρο-ς* ‚werthlos, verächtlich' (Il. 8, 178) und *ἁλοσύδνη* ‚meerentsprossen' (?) (Il. 20, 207; Od. 4, 404) hier noch in Frage kommen können, lassen wir bei ihrer geringeren etymologischen Durchsichtigkeit ununtersucht.

Ohne auf eine etymologische Untersuchung der Mehrzahl der oben aufgeführten Wörter, wie sie jüngst von einem meiner Schüler, Herrn Ludwig Weidenbaum, in einer vortrefflichen des Druckes werthen Candidatenschrift ausgeführt worden, hier näher einzugehen, mag nur einmal wieder darauf hingewiesen sein, daß das griechische *σεύεσθαι* auf dem selben Grunde ruht mit altind. *cjav-: cjávatai* ‚er setzt sich in Bewegung', für das ein paar Stellen aus dem Rgvêdas angeführt sein mögen: 1, 167, 8: *cjavantai ácjutâ dhruvâni* ‚es geräth in Bewegung das unbewegliche Feste'; 10, 124, 4: *agnís sáumas váruṇas tái cjavanti* ‚Agnis, Somas, Varunas, die bewegen sich'. Das Causativ (*cjâvájati* ‚er setzt in Bewegung') dazu findet sich beispielsweise RV. 5, 56, 4: *girím prá cjâvajanti jâmabhis* ‚(die Marute) bewegen den Berg auf ihren Fahrten' und RV. 2, 24, 2: *prá acjâvajat ácjutâ bráhmaṇas pátis* ‚Brahmanaspatis hat das Unbewegliche in Bewegung gebracht'. Von weiter zugehörigen Wörtern nennen wir noch die zusammengesetzten *hásta-cjuti-* ‚rasche Bewegung der Hände' (RV. 7, 1, 1) und *bhuvana-cjavá-* ‚weltbewegend, welterschütternd' (RV. 10, 103, 9), welches letztere in seinem Schlußtheil genau mit dem von *λαϝο-σσόϝο-ς* übereinstimmt.

Der altindischen Lautverbindung *cj* stellt sich im Griechischen auf Grund des sogenannten assibilirenden (d. i. den Zischlaut hervorrufenden) Einflusses des *j* und dann von Assimilation *σσ* (dafür im Anlaut einfaches *σ*) gegenüber, ganz wie zum Beispiel in *πέσσει* ‚er kocht' (Il. 4, 513; 24, 617), das in altindischem Gewande *pácjati* (die Medialform begegnet RV. 1, 135, 8: *pácjatai jávas* ‚es kocht' — oder ‚es reift'? — ‚die Gerste') lauten würde.

Gar nicht selten hat sich *σσ* auch aus der Verbindung des *j* mit dem aspirirten Guttural entwickelt, wie zum Beispiel in *ὀρύσσειν* ‚graben' (Od. 10, 305) aus *ὀρύχjειν*, oder in *θᾶσσον* ‚schneller, sehr schnell' (Il. 2, 440; 4, 64; 6, 143) aus *θάχjον*. Auch für *νύσσειν* ‚stoßen, stechen' (*νύσσων* Il. 16, 704; *νύξε* ‚er stieß' Il. 5, 46; 579; 11, 96) darf man solchen Ursprung des *σσ* muthmaßen, da der Gedanke an etymologischen Zusammenhang mit *ὄνυχ-* ‚Klaue, Kralle, Fingernagel' (Il. 8, 248; 12, 202; Hes. Schild 266) und altind. *nakhá-* ‚Fingernagel, Fußzehe, Vogelkralle' (RV. 1, 162, 9; 10, 28, 10) sehr nahe liegt.

Das Gegebene führt uns auch zu dem gesuchten Aufschluß über *σῆματ-*: sein anlautendes *σ* (für *σσ*) führt auf eine alte Verbindung von *j* mit aspirirtem Guttural zurück und als ihm zu Grunde liegende Verbalform ergiebt sich das altindische *khjâ: khjáti* ‚er sieht, er schaut, er betrachtet', das im Rgvêdas nur in

Verbindung mit Präfixen, später auch in unzusammengesetzten passivischen oder causativen Formen, wie dem participiellen *khjâtá-* ‚bekannt' (eigentlich ‚gesehen', oder dann auch ‚gezeigt, verkündet, angesagt'), begegnet. Wir geben einige Beispiele: RV. 8, 47, 11: *âditjâ áva hí khjáta ádhi kúlât iva spáças* ‚Âditja, schauet herab, wie von der Höhe die Späher'; RV. 7, 13, 3: *ǧâtás jád agnai bhúvanâ ví ákhjas paçún ná gaupás* ‚als du geboren, o Agnis, die Wesen beschautest, wie ein Hirt das Vieh'; RV. 10, 10, 2: *vîrás ... urvijâ pári khjan* ‚die Helden schauten weit umher'; RV. 9, 101, 7: *pátis víçvasja bhúmanas ví akhjat ráudasî ubhái* ‚als Herr der ganzen Welt betrachtete er (Sômas) beide Welthälften'.

Die Bedeutung des ‚Sehens, Aufblickens' ging bei *khjâ* ohne Zweifel von der des ‚Aufleuchtens' aus, da auch diese mehrere Male im Rgvêdas entgegentritt, wie RV. 1, 46, 10: *ví akhjat ǧihvájâ ásitas*, wo Ludwig übersetzt ‚der Schwarze leuchtete empor mit der Zunge' und Graßmann ‚schwarz an der Zunge flammt die Gluth'. Weiter gehören hieher auch wohl RV. 10, 45, 4: *sadjás ǧaǧnânás ví hí îm iddhás akhjat* ‚(Agnis) im Augenblick geboren leuchtete auf (so nach Böhtl.-R.; L. ‚schaute auf', Gr. ‚erblickt er') entflammt'; RV. 10, 127, 1: *rátrî ví akhjat âjatî purutrâ daivî aksháhbhis* ‚die Nacht leuchtete auf' (so nach B.-R.; L. ‚hat ausgeblickt') ‚hinkommend nach vielen Seiten, die Göttinn, mit ihren Augen'; RV. 1, 123, 2: *uccâ ví akhjat juvatís punarbhús â ushás agam* ‚hoch leuchtete sie auf' (so nach B.-R.; L. ‚hat sie ausgeblickt'; Gr. ‚sie blickt empor') ‚die jugendliche wiederkehrende, die Morgenröthe, sie kam heran'.

Man darf darnach für *σῆματ-*, das in altindischem Gewande als **khjâman-* zu erwarten gewesen wäre, als Grundbedeutung wohl ‚das Leuchtende' vermuthen.

Dorpat, Januar 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

December 1889.

(Fortsetzung.)

United States coast and geodetic survey. Report 1887. Part I Text. Part II Plates (sketches). Washington 1889.

a. Pennsylvania geological survey 1889. Dictionary of fossils. Vol. I. A—M. P. 4. Harrisburg 1889.

b. Annual report 1887.
c. Museum catalogue 3.
d. Atlas Northern Anthracite field. Part III, IV. A. A.
e. Atlas to report HH, and HHH.
f. South mountain sheets C. 1, 2, 3, 4. D. 2, 3, 4, 5. D. 6. Harrisbury.
Johns Hopkins Universtity studies.
a. American journal of Mathematics. Vol. XI. N. 4.
b. Historical and political science. Seventh series. VII—VIII—IX. The River towns of Connecticut. Baltimore.
c. Circulars. Vol. IX. — N. 76. Nov. 1889.
Bulletin of the Museum of comparative Zoology. Vol. XVII. N. 5. Vol. XVIII. Cambridge. U. S. A.
Proceedings of the California Academy of sciences. Second series. Vol. 1. Part 1. 2. 1888. San Francisco.
Proceedings of the Academy of natural science of Philadelphia. Part 1. Jan. Febr.—April 1889. Philadelphia 1889.
Journal of the Trenton natural history society. Vol. II. N. 1. Jan. 1889. Trenton 1889.
a. Bulletin of the Essex Institute. Vol. 20, 1—3, 4—6, 7—12. Vol. 21, 1—2—3, 4—5. 6.
b. Charter and By-laws and a list of its officers and members. Salem. Mass.
Anuario del observatorio astronómico nacional de Taenbaya para el Año de 1890. Año 10. Mexico 1889.
China. Catalogue of the Chinese Imp. maritime customs collection at the U. S international exibition. Philadelphia 1876. Shanghai 1876.

Nachträge.

Untersuchungen über die stickstofffreien Reservestoffe der Samen von Lupinus luteus und über die Umwandlungen derselben während des Keimungsprocesses von E. Schulze u. E. Steiger. Preisgekrönt von d. K. G. d. W. zu Göttingen. 3 Exemplare. Berlin 1889.
Process da strieng H. Caviezel. Chur 1889.
Proceedings of the London mathematical society. N. 359—363.
Proceedings of the R. physical society. Session 1888—89. Edinburgh 1889.
Die Indogermanischen Verwandtschaften von Berthold Delbrück. Des XI. Bandes der Abh. d. philolog.-histor. Classe d. K. Sächs. Ges. der Wissensch. N. V. Leipzig 1889.
Berichte und Verhandlungen d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Philolog.-hist. Classe. II. III. 1889.

Januar 1890.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. 1889. LIII u. 1890. I II.
Nova acta academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae naturae curiosorum. Band 52 u. 53. Halle 1888 u. 89.
Katalog der Bibliothek der K. Leopoldinischen-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Liefr. 2. 1889.
Verhandlungen des historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. Band 43 der gesammten Verhandlungen. Band 35 der neuen Folge. Regensburg 1889.
Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. Main für 1887—1888. Frankfurt a. M. 1889.
Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg. Band XI Heft 1. Hamburg 1889.
Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu ihrem 200jährigen Jubelfest 1890. Theil II, wissenschaftl. Abhandlungen, zugl. Band II der »Mittheilungen«. Leipzig 1890.
Mittheilungen des Geschichts- und Alterthumsvereins für Leisnig im Königreich Sachsen. Heft 8. Leisnig 1889.
Leopoldina. Heft XXV, Jahrg. 1889, N. 23—24. Titel u. Register. Halle a. S. 1889.

Bemerkungen zu dem Aufsatze: Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen v. R. Lipschitz in Bonn. Sonderabdruck aus »Journal für reine und angewandte Mathematik«. Heft 1. B. 106.

v. Kölliker, Histologische Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der Würzburger Phys.-med. Gesellschaft. 1889. 15. Sitzung vom 23. Nov. 1889.

Urkundliche Geschichte des Reichsritterlichen Geschlechts Eberstein. Aus den Quellen bearb. v. L. F. Freiherr von Eberstein. Band 1, 2, 3. Berlin 1889. 2. Ausgabe.

Historische Nachrichten über den zur Gräflich-Mansfeld'schen Herrschaft Heldrungen gehörenden Marktflecken Gehofen und die Aemter Leinungen und Morungen. Von Fr. v. Eberstein. Berlin 1889.

Kriegsberichte des Kön. Dän. Generalfeldmarschalls Ernst Albrecht von Eberstein aus dem zweiten schwedisch-dänischen Kriege. Herausgeg. v. L. F. Freiherr von Eberstein. Berlin 1889.

Korrespondenz zwischen Landgraf Georg II. von Hessen-Darmstadt u. s. General-Lieutenant E. A. v. Eberstein auf Gehofen und Reinsdorf. Herausgeg. von L. F. Freiherr von Eberstein. Berlin 1889.

Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical society. Vol. II fourth series. Manchester 1889.

Records of the geological survey of India. Vol. XXII. Pars 4. Calcutta 1889.

Nature. Vol. 41. 1054—1057.

Proceedings of the Royal society. Vol. XLVI N. 284.

Monthly notices of the Royal astronomical society. Vol. L. N. 2. Dec. 1889.

Verhandlungen der Kaiserl. Königl. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1889. Band XXXIX. III. u. IV. Quartal. Wien 1889.

Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt 1889. N. 13, 14, 15, 16 u. 17.

Meteorologische Zeitschrift zu Jahrgang 6. XXIV. Band der Zeitschrift der Oesterr. Ges. für Meteorologie 1889. Namen- u. Sachregister. Wien.

Ungarische Revue. Heft I. Januar 1890. 10. Jahrgang. Budapest 1890.

Foldtani Közlöny 1889. Kötet XIX, füzet 7—8, 9—10, 11—12. Budapest 1889.

Zweiter Nachtrag zum Katalog der Bibliothek und allgemeinen Kartensammlung der Kgl. Ung. geol. Anstalt 1886—1888. Budapest 1889.

Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1889. December. Krakau 1889.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVI 1889. Serie quarta Rendiconti. Vol. V. fasc. 7. 8. 2. semestre. Roma 1889.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo III fasc. VI. Nov.-Dec. Anno 1889.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 1. 2. 1889—90. Torino.

Memorie della R. Accademia delle scienze del istitut. di Bologna. Serie IV. Tomo IX. fasc. 1, 2, 3, 4. Bologna 1888—1889.

Nouveaux progrès de la question du calendrier universel et du méridian universel. R. Académie des sciences de l'institut de Bologne. Bologne 1889.

Bibliotheca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane 1890. N. 97. Firenze 1890.

Annuaire de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1890. 56. Année. Bruxelles 1890.

Envoi de la part de l'Académie des sciences de Stockholm.

a. Mémoires. Bd. 20 1—2. 21 1—2 et Atlas (Handlingar). Stockholm 1883—87.
b. Supplement aux mémoires. Bd. 9 1—2, 10 1—2, 11 1—2, 12 1—4, 13 1—4 (Bihang). Stockholm 1884—88.
c. Bulletin Arg.: 41—45. 1884—1888 (Öfverreigt). Stockholm 1885—89.
d. Observations météorologiques. Bd. 22—26. 2. Ser. Bd. 8—12. 1880—1884. (Meteorologiska Jak Hagelser). Stockholm 1885—89.
e. Biographies des membres. Bd. 2 Heft 3. (Lefnadsteckningar). Stockholm 1885.
f. Table des matières 1826—1888. (Förteckning). Stockholm 1884.
g. Mitgliederverzeichniß 1885—1889.

Academie Roy. de Copenhague

a. Mémoires. Série 6. Classe des sciences. Vol. 5 N. 12. 1889.

b. Mémoires. Série 6. Classe des lettres. Vol. II N. 6. Vol. III N. 1. 1889.
c. Oversigt over det Kongelige D. Videnskabernes Selskabsforhandlinger i. Aaret 1889. N. 2. Kobenhavn.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks 5. Deel. 1 Aflever. S'Gravenhage 1890.

Flora Batava. Aflever 287, 288. Titel and register van het 18e Deel. Leiden.

Mémoires de l'Academie Imp. des sciences de St. Petersbourg. Serie VII. Tome XXXVII N. 2. St. Pétersbourg 1889.

Repertorium für Meteorologie, hrsg. von der Kais. Akad. d. W. Band XII. St. Petersburg 1889.

Annalen des Physikalischen Central-Observatoriums. Jahrg. 1888. Theil 1. St. Petersburg 1889.

U. S. geological Survey:
Monographies: a. Geology of Quicksilver deposits of the pacific slope, and Atlas, accompanying it. Washington 1888.
b. XIV. Fossil fisches and fossil plants. Washington 1888.
c. Bulletin N. 48—53. Washington 1888—1889.

Proceedings of the American pharmaceutical association 1889. Vol. 37. Philadelphia 1889.

Bulletin of the American Geographical society. Vol. XXI N. 4. 1889. New York.

Annual report of the Curator of the Museum of comparative Zoology at Harvard College 1888—89. Cambridge U. S. A. 1889.

Die fossilen Pferde der Pampasformation. Nachtrag beschr. v. Dr. Hermann Burmeister. Buenos Aires 1889.

Journal of the college of science Imp. University Japan. Vol. III. Part. III. Tokyo 1889.

Nachträge.

Report of the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger 1873—76. Physics and Chemistry. Vol. II. 1889.

Astronomische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag in den Jahren 1885, 1886 und 1887. Enthaltend Originalzeichnungen des Mondes. Appendix zum 46., 47. und 48. Jahrgang. Prag 1890.

Orvos Természettudomanyi Ertesitö
a. I. Orvosi Szak II—III füzet.
b. II. Természettudomanyi szak III füzet.
c. III. Népszerii szak III füzet. Kolozsvart 1889.

Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. N. 74. October 1889.

Mémorial des cinquante premières années de la société d'histoire et d'archéologie de Genève 1838—1888 par Ed. Favre. Genève 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Druckfehler.

Nachrichten S. 55 ist I hinter Formenlehre der französischen Sprache zu tilgen.

Inhalt von No. 3.

Dr. *Nernst*, über ein neues Prinzip der Molekulargewichtsbestimmung. — *Friedrich Wiesler*, Verbesserungsvorschläge zu Euripides. — *Leo Meyer*, etymologische Mittheilung. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND -6 JUN 90 LIBRARY

19. März. **№ 4.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. März 1890.

Klein, Zur Theorie der Laméschen Functionen.

Wüstenfeld legt eine Abhandlung vor: »Der Imâm el Schâfi'î, seine Schüler und Anhänger bis zum J. 300 d. H.« (Erscheint im Band 36.)

de Lagarde, I. »Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette«.
II. Psalm 114 im Sidrâ rabbâ.

Hertz, Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. (Nachträglich vorgelegt von Voigt.)

Zur Theorie der Laméschen Functionen.

Von

F. Klein.

Eine Vorlesung über Lamésche Functionen, welche ich während des nun zu Ende gehenden Wintersemesters hielt, gab mir Gelegenheit, zu Auffassungen und Fragestellungen zurückzukehren, mit denen ich mich im Winter 1880—81 beschäftigt hatte[1]). Ich zweifelte von vornherein nicht, daß es gelingen müsse, auf dem damals eingeschlagenen Wege noch ein Stück weiter zu kommen. Ich hatte mir auch die Ansicht gebildet, daß eine richtige, von geometrischen, beziehungsweise physikalischen Gesichtspuncten ausgehende Theorie der Laméschen Functionen für die allgemeine Lehre von den linearen Differentialgleichungen zweiter

1) Vergl. zwei Aufsätze im 18ten Bande der mathematischen Annalen: »Ueber Lemésche Functionen«, »Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind«.

Ordnung vorbildlich sein müsse. Der K. Gesellschaft der Wissenschaften möchte ich nachstehend einige Resultate vorlegen, welche ich in der hiermit bezeichneten Richtung gefunden habe.

Wir fragen zunächst nach der zweckmäßigsten Definition der zu einem n-fach ausgedehnten Raume (R_n) gehörigen Laméschen Differentialgleichung. In dieser Hinsicht beginnt man herkömmlicher Weise mit dem System der confocalen Flächen zweiten Grades

$$\frac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \ldots . \quad \frac{x_n^2}{\lambda - e_n} = 1 \tag{1}$$

und findet durch bekannte Umformungen der Potentialgleichung die Lamésche Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = (A\lambda^{n-2} + B\lambda^{n-3} + \ldots . N)\,E, \tag{2}$$

wo

$$t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad f(\lambda) = (\lambda - e_1) \ldots . (\lambda - e_n); \tag{3}$$

ich habe schon bei früherer Gelegenheit hervorgehoben (in dem zweiten der soeben citirten Aufsätze), daß es zweckmäßig ist, die hier auftretenden Constanten $A, B, \ldots N$ zunächst als unbeschränkt veränderlich zu betrachten und dadurch der gewöhnlichen Begriffsbestimmung der Laméschen Functionen gegenüber eine Erweiterung eintreten zu lassen [1]). Nun kann man aber den durch (1) gegebenen Ausgangspunkt beanstanden. In der Potentialtheorie, wo fortgesetzt Transformationen durch reciproke Radien in Betracht zu ziehen sind, ist das System der confocalen Flächen zweiten Grades kein wirklich allgemeines Orthogonalsystem; als solches erscheint vielmehr erst das von Darboux und Moutard im Jahre 1864 aufgestellte System der confocalen Cycliden, ein System von Flächen vierter Ordnung, das sich bei Verwendung überzähliger, homogener Coordinaten $(x_1 \ldots . x_{n+2})$ [sogenannter polysphärischer Coordinaten] durch die zwei Gleichungen darstellen läßt:

$$\sum_1^{n+2} x_x^2 = 0, \qquad \sum_1^{n+2} \frac{x_x^2}{\lambda - e_x} = 0. \tag{4}$$

1) Lamé und Heine bestimmen $A, B, \ldots$ bekanntlich so, daß eine Particularlösung von (2) algebraisch wird; Hermite führt bei seinen allgemeineren, auf $n = 3$ bezüglichen Untersuchungen, für A immer noch den besonderen im algebraischen Falle eintretenden Werth $\frac{n(n+1)}{4}$ ein (wo n eine positive ganze Zahl) und läßt dann freilich B beliebig.

Herr Wangerin ist der Erste gewesen, der nachwies, daß man unter Zugrundelegung eines solchen Cyclidensystems in der That eine Theorie ganz ähnlich der Laméschen aufbauen kann[1]). Seine Rechnungen beziehen sich allerdings nur auf $n = 3$; es ist aber nicht schwer, sein Resultat auf beliebiges n zu übertragen; es tritt dann an Stelle von (2) die folgende Differentialgleichung:

$$(5) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left(\frac{4-n^2}{16}\cdot\lambda^n + \frac{n^2-2n}{16}\cdot\sum_1^{n+2} e_\varkappa\cdot\lambda^{n-1} + A\lambda^{n-2} + \cdots N\right)E,$$

wo t wiederum das Integral bezeichnet:

$$(6) \qquad t = \int\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

$f(\lambda)$ aber die Function $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet:

$$(7) \qquad f(\lambda) = (\lambda-e_1)\ldots\ldots(\lambda-e_{n+2}).$$

Offenbar kann man statt (5) auch schreiben:

$$(8) \qquad \frac{d^2E}{dt^2} = \left(\frac{2-n}{16\,(n+1)}f''(\lambda) + a\lambda^{n-2} + \cdots + n\right)E,$$

wo nun die $a, \cdots n$ beliebig. Es scheint fast, als habe man diesen Gleichungen (5), (8) bisher nur wenig Bedeutung beigelegt. Sicher kann man die Gleichung (2) als Specialfall derselben auffassen (der entsteht, wenn man e_{n+1} und e_{n+2} unendlich werden läßt), aber es lag näher, (5) oder (8) als besonderen Fall derjenigen Gleichungen (2) zu deuten, die dem Raume von $(n+2)$ Dimensionen entsprechen. Und dieser Fall schien kein besonderes Interesse darzubieten, weil man die $(n-1)$ bei ihm noch zur Verfügung stehenden Constanten keineswegs so bestimmen kann, daß eins der zugehörigen E algebraisch wird. Auch hat die Form der neuen Differentialgleichung zunächst wenig Ansprechendes. Singuläre Puncte hat dieselbe, wie dies natürlich scheint, bei $\lambda = e_1, \ldots e_{n+2}$; aber auch $\lambda = \infty$, d.h. ein Werth, der für das Cyclidensystem (4) vom geometrischen Standpuncte aus ohne jede specifische Bedeutung ist, erscheint als singulärer Punct. Die zu $e_1 \ldots e_{n+2}$ gehörigen Exponenten berechnen sich dabei als $^1/_2$ und 0, die zu ∞ gehörigen als

1) Journal für Mathematik, Bd. 82, 1876. Vergl. auch Darboux in den Comptes Rendus der Pariser Akademie, 1876, II.

$$\frac{n-2}{4}+1 \text{ und } \frac{n-2}{4}.$$

Inzwischen gelingt es durch eine ganz unbedeutende formale Abänderung unsere Gleichung in ganz anderem Lichte erscheinen zu lassen. Die bei $\lambda = \infty$ auftretenden Exponenten leiten auf den richtigen Weg. Man setze nämlich, homogen machend,

$$\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$$

und schreibe

$$E(\lambda) = \lambda_2^{\frac{n-2}{4}} \cdot F(\lambda_1, \lambda_2), \tag{9}$$

wo F jetzt eine homogene Function (eine Form) von λ_1, λ_2 vom Grade

$$\frac{2-n}{4}$$

sein wird, die ich gleich als Laméssche Form bezeichnen will. Sei ferner jetzt unter f die Form $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades verstanden:

$$f = (\lambda_1 - e_1 \lambda_2) \ldots\ldots (\lambda_1 - e_{n+2} \lambda_2). \tag{10}$$

Man erhält dann (nach kurzer Umrechnung mittelst des Euler'schen Theorems) ein Resultat, welches nur noch von der Form f als solcher abhängig ist; man findet nämlich:

$$(f, F)_2 = \varphi \cdot F, \tag{11}$$

wo $(f, F)_2$ die zweite Ueberschiebung der Formen f und F vorstellt, φ aber eine durchaus beliebige rationale ganze Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist. Dieses Resultat erscheint so einfach, daß man nicht umhin kann, dasselbe überhaupt an die Spitze der Theorie der Laméschen Functionen zu stellen und dementsprechend Laméssche Functionen, oder vielmehr Laméssche Formen, des R_n geradezu als solche Formen $\left(\frac{2-n}{4}\right)^{\text{ten}}$ Grades von $\lambda_1 \lambda_2$ zu definiren, welche, zweimal über eine gegebene f_{n+2} geschoben, sich selbst bis auf einen Factor φ_{n-2} reproduciren[1]). Die einzigen sin-

1) Das gleiche Mittel der Einführung homogener Variabler gebrauchen bereits in demselben Sinne Pick und Halphen (Berichte der Wiener Akademie, von 1887; Traité des fonctions elliptiques, Bd. II, 1888); nur handelt es sich bei ihnen um eine ganz specielle Untersuchung, nämlich um eine geschickte (nur in diesem Falle mögliche) Transformation höheren Grades der für $n = 3$ geltenden

gulären Stellen der so definirten F sind, wie bereits angedeutet, die Wurzeln von $f = 0$. Sind diese Wurzeln alle getrennt (wie wir bisher stillschweigend voraussetzten), so gehören zu jeder einzelnen derselben die soeben genannten Exponenten $^1/_2$ und 0, — rücken aber irgendwo zwei oder mehrere derselben zusammen, so erhält man höhere Exponenten, bez. irreguläres Verhalten. Der gewöhnliche Fall der durch (2) definirten Functionen entsteht, wenn f eine Doppelwurzel erhält (die man dann nach $\lambda = \infty$ wirft). Uebrigens kann man, wenn f mit beliebig vielfachen Wurzeln ausstatten will und sich vorhält, von der Form F der homogenen Variabelen λ_1, λ_2 durch Zufügung irgend welcher Factoren zu Functionen von λ zurückzugehen, sämmtliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coëfficienten unter (11) rubriciren. Die Lamésche Differentialgleichung hat also in der That eine wesentlich allgemeine Bedeutung. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe z. B. entsteht aus (11), wenn man f als eine Form sechsten Grades einführt, die ein volles Quadrat ist. Noch ein weiterer Gesichtspunct spielt hier herein. Wählt man f wieder als Form sechsten Grades, aber nun mit getrennten Wurzeln, so definirt (11) solche Formen F vom Grade $-^1/_2$, welche auf dem hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f}$ durchaus unverzweigt sind. Man überzeugt sich leicht, daß diese F unter allen Formen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coëfficienten genügen, die einzigen sind, welche die genannte Eigenschaft besitzen. Nicht so bei höherem Grade von f. Sei $n = 2p$ gesetzt, p aber > 2 genommen, so werden die allgemeinsten zum hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f_{2p+2}}$ gehörigen unverzweigten F durch die Gleichung geliefert:

$$(f, F)_2 = (\varphi_{2p-2} + \psi_{p-3}\sqrt{f}) \cdot F, \tag{12}$$

die sich von (11) durch das Glied mit $\sqrt{f}$ unterscheidet. Die Anzahl der hier in φ und ψ zusammen enthaltenen willkürlichen Constanten ist $3p-3$, der Grad von F gleich $-\frac{p-1}{2}$. Die Theorie von (11) wird als Vorbereitung der allgemeinen Theorie der Gleichungen (12) erachtet werden können[1]).

Differentialgleichung (2). Es ist wohl kein Zweifel, daß die geeignete Verwendung homogener Variabler in der Theorie der linearen Differentialgleichungen noch vielfache Vereinfachungen nach sich ziehen wird.

1) Sind F_1, F_2 irgend zwei Particularlösungen von (12), so ist der Quotient

Ich muß nun etwas genauer auf die zweite der beiden zu Anfang genannten Arbeiten aus Band 18 der mathematischen Annalen eingehen (Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind). Indem ich mir, für den besonderen Fall $n = 3$, unter Zugrundelegung der confocalen Flächen zweiten Grades (1) die geometrische Bedeutung der in der Potentialtheorie auftretenden Producte Laméscher Functionen klar machte, wurde ich dort für die zugehörige Lamésche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = (A\lambda + B)E \tag{13}$$

zu einem Theorem geführt, welches ich kurz als Oscillationstheorem bezeichnen möchte, weil in demselben von den Oscillationen die Rede ist, welche geeignete Particularlösungen $E(\lambda)$ von (13) in gegebenen Intervallen der λ-Axe ausführen. Ich bemerkte nämlich, daß man die in (13) auftretenden Constanten A, B gerade auf eine Weise so bestimmen kann, daß für zwei beliebig gegebene Segmente S, T der λ-Axe (welche nur über keinen singulären Punct hinausgreifen sollen) je eine Particularlösung $E(\lambda)$ existirt, welche, für ihr Segment, die Bedingungen befriedigt: an den beiden Enden des Segmentes gegebene Werthe von $\frac{E'}{E}$ darzubieten $\left(\text{wo } E' = \frac{dE}{dt}\right)$, innerhalb des Segmentes aber eine vorgeschriebene Anzahl von Malen zu verschwinden. Die gewöhnlich allein betrachteten, zur Gleichungsform (13) gehörigen algebraischen $E(\lambda)$ erhielt ich dabei, indem ich die Segmente S, T mit den von e_1 bis e_2, bez. von e_2 bis e_3 reichenden Stücken der

---

$\eta = F_1 : F_2$ eine auf dem hyperelliptischen Gebilde unverzweigte »Function«, welche bei jedem geschlossenen Umlaufe über die zu $\sqrt{f}$ gehörige Riemann'sche Fläche hin sich in der Gestalt $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ reproducirt. Daß es auf jedem algebraischen Gebilde, dessen $p > 1$, ∞^{3p-3} wesentlich verschiedene (durch ihre Differentialgleichung unterschiedene) derartige η-Functionen gibt, ist bekannt (vergl. z. B. meine »Neuen Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie« im 21ten Bande der math. Annalen, 1882); man hatte aber bisher, so viel ich weiß, diese η noch nicht in zwei Formen F_1, F_2 als Zähler und Nenner derart gespalten, daß F_1 und F_2 für sich genommen auf dem algebraischen Gebilde gleichfalls unverzweigt sind. Dies gelingt aber sofort allgemein, wenn man diejenigen Erläuterungen heranzieht, die ich über die auf beliebigen algebraischen Gebilden existirenden Formen neuerdings gegeben habe (Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Math. Annalen Bd. 36). Der Grad der betr. F_1, F_2 in den zum Gebilde gehörigen Formen φ ist allemal gleich $-1/2$, — in Uebereinstimmung mit dem, was im Texte speciell für hyperelliptische Gebilde bemerkt ist.

λ-Axe zusammenfallen ließ, und bei jedem einzelnen e_i $E = 0$ oder auch $E' = 0$ als Gränzbedingung vorschrieb. Hieran schloß sich der Nachweis, daß man bei allgemeiner Wahl der S, T Functionen E erhält, mittelst deren man für einen beliebigen von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begränzten Körper Reihenentwickelungen aufstellen kann, die für diesen das fundamentale Potentialproblem in derselben Weise lösen, wie dies Lamé's eigene Reihen für das dreiaxige Ellipsoid thun. Es ist leicht, alle diese Betrachtungen mutatis mutandis an die allgemeine (einem beliebigen Werthe von n zugehörige) Differentialgleichung (11) anzuknüpfen: die $(n-1)$ dortselbst in φ enthaltenen unbestimmten Constanten werden festgelegt werden können, indem man betreffs $(n-1)$ auf der λ-Axe gegebener Segmente geeignete Forderungen stellt; die fundamentale Potentialaufgabe wird sich dann für solche Raumtheile des R_n behandelen lassen, die von $2n$ confocalen Cycliden begränzt sind. Die solchergestalt entstehenden Lösungen begreifen die große Mehrzahl aller Reihenentwickelungen (und Integraldarstellungen) in sich, welche die Potentialtheorie kennt; es wird so in einem Gebiete, in welchem bislang viele Einzelheiten unvermittelt neben einander standen, Uebersicht und Ordnung eingeführt. Es ist nicht meine Absicht, dies hier genauer durchzuführen; es muß dies einer ausführlichen Einzeldarstellung vorbehalten bleiben. Die folgenden Bemerkungen sollen sich vielmehr darauf beziehen, aus dem genannten Oscillationstheoreme Folgerungen nach einer anderen Seite zu ziehen. Ich werde nämlich λ fortan als eine complexe Variable betrachten und von der conformen Abbildung handeln, welche der Quotient η irgend zweier Particularlösungen F_1, F_2 einer durch das Oscillationstheorem festgelegten Laméschen Differentialgleichung von der Halbebene λ entwirft.

Sei $f = 0$ der Einfachheit halber mit durchaus reellen, getrennten Wurzeln vorausgesetzt. Der allgemeine Charakter des in der η-Ebene gelegenen Abbildes ist dann mit Rücksicht auf die über die singulären Punkte $e_1, \ldots e_{n+2}$ früher gemachten Angaben durch ein bekanntes, zuerst von Hrn. Schwarz aufgestelltes Theorem festgelegt. Es wird sich in der η-Ebene um ein Kreisbogenpolygon handeln, dessen Inneres keinen Windungspunct einschließt, dessen sämmtliche Winkel rechte sind, und dessen $(n+2)$ Seiten selbstverständlich den aufeinanderfolgenden Stücken der λ-Axe von e_1 bis e_2, von e_2 bis e_3, ..., von e_{n+2} bis e_1 entsprechen. Ich will nun weiter, der Einfachheit halber, annehmen, daß die Segmente $S, T, \ldots .$, von denen das Oscillationstheorem

handelt, je von einem singulären Puncte e_i bis zum nächstfolgenden e_{i+1} hinreichen; daß ferner die Particularlösungen F, welche den einzelnen Segmenten zugehören (und die also innerhalb dieser Segmente je eine vorgeschriebene Anzahl von Nullstellen haben) an den Enden des Segmentes $F = 0$ oder $F' = 0$ befriedigen sollen. Die Behauptung ist, daß unter so bewandten Umständen die Länge desjenigen Kreisbogenstückes der η-Ebene, welches dem einzelnen Segmente $e_i - e_{i+1}$ zugehört, genau angegeben werden kann. Es genügt zu dem Zwecke, neben dem zu unserem Segmente gehörigen, in diesem Segmente reellen F irgend eine andere im Segmente reelle Particularlösung (F) zu betrachten und zunächst $\eta = \frac{F}{(F)}$ zu setzen. Indem sich die Nullstellen von F und (F) innerhalb des Segmentes nothwendig wechselseitig separiren, ergibt sich sofort:

Satz 1. Wenn in e_i und e_{i+1} für die zum Segmente gehörige Particularlösung übereinstimmend $F = 0$ vorgeschrieben ist, so überschlägt sich der dem Segmente in der η-Ebene zugehörige Kreisbogen genau $(m+1)$mal (unter m die Anzahl der Nullstellen von F im Segmente verstanden). Die Bilder von e_i und e_{i+1} fallen also auf dem betreffenden Kreisbogen zusammen. Von ihnen aus biegen dann die weiteren Kreisbogen, die den jenseits e_i und e_{i+1} folgenden Stücken der λ-Axe entsprechen, rechtwinklig ab, berühren sich also in ihrer gemeinsamen Einmündungsstelle.

Etwas mehr Mühe verursacht die Erledigung der anderen Fälle; ich führe dies nicht im Einzelnen aus, sondern gebe gleich die Resultate. Man erhält:

Satz 2. Ist in e_i $F = 0$, dagegen in e_{i+1} $F' = 0$ vorgeschrieben, so wird es sich in der η-Ebene, sozusagen, nur noch um $(m + 1/2)$malige Umspannung eines Kreises handeln. Die Bilder von e_i und e_{i+1} werden nämlich auf dem sie verbinden Kreisbogen derartig getrennt liegen, daß der in e_{i+1} rechtwinklig abbiegende Kreisbogen (welcher dem jenseits e_{i+1} folgenden Stücke der λ-Axe entspricht) verlängert durch e_i hindurchgeht (und dort dann den anderen, von e_i rechtwinklig abbiegenden Kreisbogen berührt).

Satz 3. Ist endlich sowohl in e_i wie in e_{i+1} $F' = 0$ gegeben, so wird unsere Polygonseite ihren Kreis nur noch wenig mehr als m-fach umspannen; die beiden weiteren Polygonseiten, welche in e_i und e_{i+1} rechtwinkelig abbiegen, werden sich auch jetzt berühren, aber in einem von e_i und e_{i+1} verschiedenen Puncte (der übrigens selbstverständlich seinerseits auch

dem Kreise angehört, längst dessen sich die erste Polygonseite erstreckt).

Die Bedeutung des Oscillationstheorems aber wird die, daß bei gegebenem f, d.h. bei gegebenen $e_1 \ldots e_{n+3}$, das zugehörige Kreisbogenpolygon der η-Ebene völlig bestimmt ist[1]), sobald ich von $(n-1)$ seiner Seiten ein Verhalten im Sinne von Satz 1, 2 oder 3 vorschreibe. Ich zweifele nicht, daß dieser Satz eine allgemeine Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzt. Denn er führt dazu, wenn die singulären Stellen einer Differentialgleichung mit den zugehörigen Exponenten gegeben sind, als weitere Bestimmungsstücke der Differentialgleichung allgemein die Längen der in der η-Ebene auftretenden Polygonseiten einzuführen.

Möge hier aus unserem Satze nur eine, ganz particuläre Folgerung gezogen werden. Sei f insbesondere vom sechsten Grade; wir nehmen die Verschwindungspuncte von f wieder getrennt und reell, und benennen sie nach ihrer Aufeinanderfolge auf der λ-Axe mit $e_1, e_2, \ldots e_6$. Ich werde nun die drei Intervalle von e_1 bis e_2, von e_3 bis e_4, von e_5 bis e_6 in's Auge fassen und für jedes derselben ein Verhalten im Sinne von Satz 2) vorschreiben, indem ich gleichzeitig die zugehörigen m sämmtlich gleich Null setze. Mögen wir jetzt η insbesondere so wählen, daß das Bild des von e_6 bis e_1 reichenden Stückes der λ-Axe in der η-Ebene geradlinig wird. Eine leichte geometrische Ueberlegung zeigt dann, daß in Folge von 2) und der allgemeinen dadurch entstehenden Lageverhältnisse, die Bilder der Intervalle von e_2 bis e_3 und von e_4 bis e_5 gleichfalls geradlinig werden und in dieselbe gerade Linie hineinfallen. Den Intervallen e_1-e_2, e_3-e_4, e_5-e_6 aber entsprechen einfach von dieser geraden Linie begränzte Halbkreise. (Das Polygon der η-Ebene läßt sich am kürzesten beschreiben als eine von einer Geraden begränzte Halbebene, aus welcher man, vom Rande aus, drei halbe Kreisscheiben herausgeschnitten hat). Wollen wir jetzt die ganze λ-Ebene in Betracht ziehen, nachdem wir dieselbe längs der drei Segmente e_1-e_2, e_3-e_4, e_5-e_6 der reellen Axe mit Einschnitten versehen haben! Offenbar entspricht derselben jetzt ein schlichtes, von drei Vollkreisen umgränztes Stück der η-Ebene. Wir erhalten hieraus ein Bild der zur hyperelliptischen Irrationalität $\sqrt{f}$ gehörigen Riemann'schen Fläche, indem wir dem genannten Stücke

1) d. h. von linearen Transformationen des η abgesehen völlig bestimmt ist.

der η-Ebene noch eines derjenigen hinzufügen, welche sich aus ihm durch Inversion an einem seiner drei Begränzungskreise ergeben. Hiermit aber ist für den Fall des hyperelliptischen Gebildes $\sqrt{f}$ diejenige conforme Abbildung geleistet, deren Möglichkeit und Bestimmtheit ich in Band 19 der mathematischen Annalen (Weihnachten 1881) für beliebige algebraische Gebilde behauptet habe[1]). Es war bis jetzt nicht gelungen, dieses letztere Theorem auf andere Art als durch Continuitätsbetrachtungen zu erweisen, die von der in der η-Ebene gelegenen Figur ihren Ausgang nehmen: hier haben wir, allerdings nur für den einfachen Fall eines hyperelliptischen Gebildes mit sechs reellen Verzweigungspuncten, eine Construction des betr. η vom gegebenen algebraischen Gebilde aus.

Es knüpft sich hieran noch eine weitere neue Bemerkung, welche auf die oben gegebene Einführung homogener Variabler zurückgeht. Bekanntlich sind λ und $\sqrt{f(\lambda)}$ in dem soeben gefundenen η eindeutig; sie stellen solche eindeutige Functionen von η vor, welche sich bei unendlich vielen linearen Substitutionen von η reproduciren (ich möchte vorschlagen, solche Functionen überhaupt automorphe Functionen von η zu nennen). Auch die Integrale

$$u_1 = \int \lambda_1 d\omega, \qquad u_2 = \int \lambda_2 d\omega,$$

wo

$$d\omega = \frac{(\lambda d\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

werden eindeutig in η. Nun hatten wir doch von vorneherein $\eta = F_1 : F_2$ gesetzt, wo F_1, F_2 Formen $(-1/2)^{\text{ter}}$ Dimension in λ_1, λ_2 waren. Man findet hieraus unter Benutzung der Differentialgleichung (11):

$$F_2 dF_1 - F_1 dF_2 = \varkappa d\omega, \tag{14}$$

wo $\varkappa$ eine unbestimmt bleibende numerische Constante. Jetzt ist

$$d\eta = \frac{F_2 dF_1 - F_1 dF_2}{F_2^2}.$$

Wir erhalten also:

$$\lambda_1 = \frac{\varkappa}{F_2^2} \cdot \frac{du_1}{d\eta}, \qquad \lambda_2 = \frac{\varkappa}{F_2^2} \cdot \frac{du_2}{d\eta}, \tag{15}$$

1) Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

so daß sich λ_1, λ_2 als eindeutige Formen $(-2)^{\text{ten}}$ Grades von F_1, F_2 darstellen. Uebrigens weist man leicht nach (oder schließt es aus (14)), daß F_1, F_2 den unendlich vielen linearen Substitutionen von η entsprechend selber binäre lineare Substitutionen von der Determinante 1 erleiden. Bei diesen bleiben dann λ_1, λ_2 ungeändert; ich schlage dementsprechend vor, dieselben als automorphe Formen von F_1, F_2 zu bezeichnen.

Auch dieses Resultat verallgemeinert sich auf beliebige algebraische Gebilde. Sei nämlich η auf einem solchen Gebilde unverzweigt. Setzt man dann η gleich dem Quotienten zweier Formen F_1, F_2, welche auf dem algebraischen Gebilde selber unverzweigt sind (vergl. die Note zu p. 90), so hat man immer Formel (14). Dabei bedeutet $d\omega$ denjenigen zum algebraischen Gebilde gehörigen Differentialausdruck, welchen ich im vorigen Jahre in meiner ersten der Societät vorgelegten Note: »Zur Theorie der Abelschen Functionen« eingeführt habe [1]).

»Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette«

von

Paul de Lagarde.

Man weiß aus meinen Mittheilungen 1 91 ff., daß ich einiges Interesse für die Geschichte der מסורה habe, obwohl ich nicht einmal ihren Namen sicher auszusprechen verstehe. Man kann sich meine Freude denken, als ich im LCB vom 25 Januar 1890 Folgendes las:

> In der alten masoretischen [so] Traditionskette, zuletzt mitgetheilt in Dikduke ha-Teamim, ed. Baer und Strack, S. 56, figuriert als das älteste Glied derselben ein מנקרי. Wie viele Verschlimmbesserungen dieser Name erlitten hat, weil man mit ihm nichts anzufangen wußte, ersieht man aus den verzweifelten [so] Versuchen, welche die Varianten bieten. Wir treffen aber denselben Namen, allerdings wiederum vielfach entstellt, in einer Erzählung, die in beiden Talmuden und in mehreren Midrasch-Parallelen mitgetheilt wird. Nur an einer dieser Stellen, in der alten Pesikta nämlich, hrsg. von Buber, Bl. 90, erscheint der Name richtig, wie bereits angegeben. Wir lernen den

1) Vergl. auch den schon oben genannten Aufsatz in Bd. 36 der mathematischen Annalen.

Träger desselben als Safra kennen, d.h. [so] als Gelehrter [so] der Massorah [so], er lebt unmittelbar in der Nähe von Tiberias, wo eben [so] der Sitz jener massoretischen [so] Studien war, und er tritt dort gegen seinen Zeitgenossen Simon ben Iochai auf. Wir können somit [so] die Persönlichkeit des ältesten Massoreten [so] sicher feststellen. Aber auch den Namen selbst können wir als einen bei den Römern [so] üblichen nachweisen. Denn er wird als Mannachius auf einer Inschrift (Corp. Inscr. Lat. IX, 1128) erwähnt; ist als Mannacius sogar der Name eines römischen Juden [so], auf einer Inschrift in der jüdischen Katakombe an der Vigna Randanini in Rom (Garrucci, Nuove Epitaf. 24).

Der in Rede stehende Artikel des LCB ist mit »A. Br.« unterzeichnet.

Auf der von Herrn »Br« angezogenen Seite der דִּקְדּוּקֵי הַטְּעָמִים findet sich als § 69 Folgendes:

Das ist die [oder: eine] Ueberlieferung, welche דוסא בר אלעזר בר אפסי überliefert hat, der [nämlich דוסא] sie von »Rabbi« יהודה dem Babylonier empfangen hat, der sie von שמעון seinem Vater empfangen hat: und dieser hat sie vom »Rab« אדא empfangen: und »Rab« אדא hat sie vom »Rab« חמנא empfangen, welcher sie an einen Mann aus »נְהַרְדַּעַ« weitergegeben hat: und er [wer?] hat sie von מְנַקְּדֵי [das sind Punctatoren: nach der aaO. unter dem Texte stehenden Glosse der Herren Baer und Strack נקדנים] empfangen, welche aus dem Lande Israels nach Babylonien vertrieben worden waren [Plural], welchen [Singular] Rufus vertrieben hatte, damit nicht im Lande Israel das Gesetz sei. Und sie summierten das Gesetz und die Propheten und die Hagiographen, die 24 Bücher, welche sie summierten ohne sich zu versehen, zwei Myriaden und drei Tausende und zweihundert und drei, nicht weniger und nicht mehr.

Wo ich nur *damit* geschrieben habe, steht im Urtexte כי היכי דלא: ich finde in mir zugänglichen Büchern keine Belehrung über כי היכי. Ich habe אפיקה für إِفْضَة genommen: auch dies mag unsicher sein. Alles Andere steht fest.

Und damit steht erstens fest, daß am angezogenen Orte gar nicht von »der masoretischen Traditionskette« im Ganzen, sondern nur (wie in § 68, wo ein Generaltitel) davon gehandelt wird, wie viel »Verse« im jüdischen Canon vorhanden sind. Es steht zweitens fest, daß Herr »Br« מנקדי gelesen hat, wo מְנַקְּדֵי gedruckt ist: die Herausgeber haben die Vokabel selbst punktiert, und das Wort ausdrücklich erklärt. Herr »Br« hat unmöglich das Buch der Herren Strack und Baer genau angesehen, und wagt gleichwohl zu »entdecken«, und das Wörterbuch des Herrn Levy, das an

wenig zuverlässiger Waare reich genug ist, mit noch mehr unzuverlässiger Waare zu »bereichern«.

Jetzt zu Bubers Pesikta [welche 1868 zu Lyck gedruckt ist]. Herr Wünsche dient den Juden sogar vor Gericht als »Sachverständiger«: er ist aber ein hastiger Dilettant schlimmster Art, und das wissen die Juden natürlich selbst in mancher Beziehung noch genauer als die NichtJuden. Ich rufe trotz dieses Urtheils hier die Hülfe des Herrn Wünsche an, um nicht sachverständigen Lesern das Urtheil zu erleichtern. Herr Wünsche hat nämlich die von Buber herausgegebene Pesikta 1885 in das Deutsche übersetzt. Bubers Seite 90[1] lautet bei Herrn Wünsche wie folgt [113 Zeile 6 von unten]:

> Ich gehe und werde mich an diesem alten Juden belustigen. Was machte er? Er nahm einen Todten und verscharrte ihn auf einer Strasse, welche der Rabbi gereinigt hatte. Der Cuthäer ging zu R. Simeon ben Jochai und sprach zu ihm: Hast du nicht die und die Strasse gereinigt? Ja wohl, versetzte der Rabbi. Wie denn aber, fuhr der Cuthäer fort, wenn nach dir noch ein Todter zum Vorschein kommt? Zeige ihn mir! sprach der Rabbi. R. Simeon ben Jochai erschaute aber im heiligen Geiste, dass der Todte von jenem Manne dahin gelegt worden war. Daher sprach er: Ich verhänge über die Oberen, dass sie hinabsinken, und über die Unteren, dass sie heraufkommen. Und so geschah es. Als er fortging, kam er an dem Versammlungshause vorüber und hörte die Stimme der Kinder der Schule von Magdala. Da sprach einer (wahrscheinlich der Lehrer der Schule): [1]) Siehe, Bar Jochai

Die Anmerkung des Herrn Wünsche lautet:

> Nach Schabb. fol. 34[a] sprach ein Alter diese Worte und er wurde zu einem Knochenhaufen.

Der Name מנקיי steht, trotz der Versicherung des Herrn »Br« in Bubers Texte nicht, und auch in des Herrn Wünsche Uebersetzung nicht. Der gemeinte Satz lautet ושמע קליה דמינקי ספרא דמגדלא. Bubers Anmerkung 180 berichtet, man lese auch (in den Parallelstellen) קליה דספרא und דנקאי ספרא [קליה], wo in נקאי ein Eigenname gesehen werde. Buber lehnt letzteres anzunehmen ab: er selbst erklärt שמע קול של תינוק מביית חספר, und beruft sich auf eine Stelle im Midrasch zu den Threnis, welche er unartiger Weise nicht genauer citiert: חד מאתיגס אתא לירושלים · על לבי ספרא בא לביית חספר ומצא ילדים אשכח מינוקי דיתבין יושבים. Was Herr Wünsche mit dem Suffixe in קליה anfangen will, ist Seine Sache.

Also in Bubers Pesikta erscheint der Name מנקיי nicht, sondern im Texte דמינקי *der Kinder*, und am Rande als eine, aber verworfene Variante נקאי [vgl. Levy[2] 3 438[a]]. Davon, daß es sich in der Pesikta um einen »Masoreten« handele, ist nicht ein Schimmer zu entdecken.

In des Herrn Wünsche Uebersetzung des Buches בראשית רבה 389 hat ein Herr Fürst ausführlich über die in der Pesîqrâ stehende Sage gehandelt, auch dem Citate aus איכה רבתי eine Seitenzahl beigefügt. Den ausgesucht albernen Text der בראשית רבה mag man bei Herrn Wünsche nachlesen: man soll nur nicht vergessen, daß weniger als Herr Wünsche gelehrte Leute (Wilnaer Ausgabe קנא[1] 12) קלא דנקאי ספרא kaum »die Stimme eines Schreibers, Namens Dankai« übersetzen werden, da das mit dem Artikel versehene קלא, falls jener Schreiber Dankai hieße, דדנקאי nach sich ziehen müßte: Symmicta 1 92$_{20}$.

Aber die Herren Baer und Strack verweisen — was Herr »Br« nicht erwähnt — auf ihrer von Herrn »Br« angeführten Seite 56 auf ein zu vergleichendes Buch RKirchheims: »ein Commentar zur Chronik aus dem 10ten. Jahrhundert, Frankfurt a. M. 1874, S. 56«. In diesem, nicht in den Diqdûqæ haθθeqomîm, erscheint מנקרי allerdings, und zwar, neben dem נקרי der Turiner Handschrift 56$_8$, aus einem Venediger Drucke 56$_{23}$, neben handschriftlichem נקרי 56$_{32}$ und נָקְדִי 56$_{36}$ und נקי' 57$_{11}$ deutlich als Eigennamen da, wo die Herren Baer und Strack ohne Variante מְנֻקְדִי drucken, und *Punctatoren* übersetzt haben wollen. Der Turiner Codex »124« wird der sein, welcher in dem 1880 erschienenen Kataloge des Herrn Bernardino Peyron Seite 2 2 A 1. 2. heißt. Allerdings enthält dieser »Rasci«-Codex nach Peyron die Paralipomena »mutila in fine«, während der Gelehrte des Herrn Buber aus 124 ein Stück abgeschrieben hat, das nur das Ende sein kann. Es lohnt aus Kirchheims Buch iij^r Folgendes herzusetzen:

> Wenn auch, was diese Traditionskette betrifft, die individuelle Existenz der darin aufgeführten Namen nicht anzuzweifeln wäre, so ist doch unzweifelhaft diese überlieferte Tradition nur fictiv und hat nicht mehr historischen Werth als die sinaitische und karäische; denn eine Wissenschaft wie die Massoreth, die in Schrift und Wort verbreitet wurde, ist keine Geheimlehre, die nur Einzelnen anvertraut wäre.

Da die Paralipomena den Canon der Juden schließen, ist in der Ordnung, daß an ihrem Ende die Schreiber melden, wie viel Verse im ganzen Canon enthalten sind. Die Turiner Hds. gibt mutatis mutandis was Baer-Strack als § 69 drucken, die Rostocker gibt es nicht. Beide Hdss. haben als wirklichen Schluß ein Stück, daß ich in beiden Redactionen, aber so drucke, daß das Entsprechende sich gegenübersteht:

Turin		Rostock
ונתעסקו בספר כללות	1	
קבוצות קבוצות תלתלים		
ואחריהם נתעסקו בו יראם		בספר הזה נתעסקו בו יראם
ומגדיאל ומאיר ועדריאל		המגדאלי ומאיר מעדריאלי
פרטו וחרטו בשבילי	5	פרטן חטרן בשמלן
		ללות קוצות תלתלים
	חטרן	
האסטרטו חניטי		
בנקרת פסילים		בנקרת פסילים
וחקקו		
לחעמידן על עיקרן	10	לחעמידן על עיקרן
ואשכרי ומשכרתיה שלמה		
מעם ה' אלהי ישראל		
		נפשם בגן עדן

Hier ist klar, daß sich T 1 2 R 6 auf Cant. 5_{11} bezieht: ich kann diese Worte wie die Segensformeln T 11 12 R 13 für meinen Zweck auf sich beruhen lassen. Es ist mir wahrscheinlich, daß בנקרת פסילים *in einer Höhle von Götzenbildern* eine Metropole des christlichen Cultus bezeichnet, vielleicht Rom selbst: man kennt ja die freundlichen Ausdrücke, welche die Religionsschriften der allezeit toleranten Juden für die Christen haben.

Die von RKirchheim benutzte Abschrift Ts ist ihm von Herrn ABerliner überlassen worden, welcher dafür von der nicht in den Buchhandel gelangten Arbeit Kirchheims 25 Exemplare bezogen hat (Vorrede viij): Eines dieser 25 werde ich besitzen, denn ich habe das Buch irgend wann erkauft. Die Abschrift Ts hat Herr Berliner nicht selbst gemacht (Vorrede ij): sie ist kaum verläßlicher als das von mir in den Mittheilungen 2 290[r] besprochene Stück (wo טרא für Véoure). Kirchheim (Mittheilungen 2 155) las בספר הזה für ואחריהם, mehrfach ן für נ, בשמלן für בשבילי: in T 7 suche ich *στιχομετρία* = אסטיכומטריא. Das scheint sicher, daß das von RKirchheim veröffentlichte Stück die sonst vielfach zu findende Liste der Verszähler durch vier neue Namen vervollständigt. »Jiream aus [der Stadt, oder aus der Familie] Magdiel« lebte nach Kirchheim v »in oder kurz nach der Zeit Saadia's«. Der in der Turiner Handschrift erscheinende נקיי wird sein Dasein vielleicht nur dem ungelehrten Freunde des Herrn Berliner verdanken, der vor מנקיי ein מן ausgelassen hat. Freilich fanden wir oben einen נקאי.

Daß der Verse zählende מנקיי in Magdala gewohnt hat, ist auffallend: ob man סָפְרָא דְמַגְדְלָא für *der Schriftgelehrte aus Magdala* sagen konnte, müssen jüdische Gelehrte wissen. Keines Falls spricht § 69 der Diqdûqæ haθθeṭomîm von mehr als von Leuten, welche

die Verse der Bibel gezählt haben: daß sie auch andere gleich nützliche und gleich geisttötende Künste getrieben haben, ist möglich, wird aber nicht gesagt.

מנקדי = נקרי [so] = נקי' [so] = מנקרי können sehr wohl ein und derselben Name, und מנקרי kann die ursprüngliche Gestalt dieses Namens sein. Von vorne herein bezweifele ich, daß ein auf יי, also auf konsonantisches y, ausgehendes מנקרי Mannac[h]ius sein könne: ich bezweifele, daß das nn und daß das erste a des Mannachius sich aus מנקרי erklären lasse. ARosenberg, das aramäische Verbum im babylonischen Talmud 52, weist mir die passiven מגליא und מכסיין מגליין nach. Bis auf Weiteres glaube ich מנקרי, wenn es überhaupt richtig ist, Menaqqay sprechen zu müssen, also *gereinigt*: صنيع *oblatus*, *consecratus*. Die Variante נקאי spricht durch ihr א für mich.

Was nun das Citat anlangt, welches Herr »Br« aus Garrucci gibt, so ist ein Buch dieses Jesuiten, das »Nuove Epitaf.« hieße, ich will nicht sagen: mir, der ich ein Bibliograph nicht bin, sondern den Beamten der Goettinger Bibliothek nicht bekannt. Ich kannte nur (aus Schuerers Programm vom Jahre 1879) Garruccis dissertazioni archeologiche, welche Herr »Br« auch in des Herrn Ascoli in den Schriften des zu Florenz abgehaltenen Orientalistencongresses zu findendem Aufsatze angeführt finden wird. In diesen dissertazioni steht seit dem Jahre 1865 »post« 2 166 folgende in der Vigna Randanini gefundene Inschrift (siehe unten):

Mannacius. sorori. Crysidi. dulcissime. proselyte.

Klar ist, daß Chrysis keine geborene Jüdin war: und darum wird auch wohl ihr Bruder Mannacius ein geborener Jude nicht sein.

Es würde sich empfohlen haben, nicht »epitaf. 24« zu citieren, sondern jenes Buch Garruccis, oder den Urdruck der betreffenden Abhandlung Garruccis in der Civiltà cattolica Serie 5 Band 6 Seite 102 ff. (vom Jahre 1863), wobei es sich verlohnt hätte zu sagen, daß 24 nicht eine Seite, sondern die Nummer der fraglichen Inschrift ist, unter den nuove epigrafi ebraiche di Vigna Randanini die vierundzwanzigste.

Der neunte Band des Corpus inscriptionum latinarum bietet auf Seite 103 unter Nummer 1128 aus Mirabella eine vom ordo civitatis Aeclanensium (le Grotte im Lande der alten Hirpiner) angeordnete Inschrift, welche anzeigt, daß dem fabricator Umbonius Mannachius eine Statue gesetzt werden solle. Juden im Lande der Hirpiner zu suchen, ist wohl trotz der Allgegenwart dieser Nation hoffnungslos: falls ein Jude je Mannachius geheißen hat, so bleibt der Name immer unsemitisch, wie die Flavius, Aurelia,

Iulianus usw. der römischen Zeit, die *Μενέλαος* = מְנַחֵם, *Ἰάσων* = יֵשׁוּעַ, *Ἰσίδωρος* = יִצְחָק der unter Griechen, die Adolf und Otto = אַבְרָהָם, Ludwig und Levin = לֵוִי, Herman = חַיִּים, Moriz = מֹשֶׁה der unter Deutschen angesiedelten Juden dadurch, daß Juden sie sich beigelegt haben, nicht jüdische Namen werden. Der Schluß wäre doch wohl unzulässig, daß, weil irgend welcher לֵוִי sich im deutschen Reiche Ludwig schreibt, der Name Ludwig in dem Galilaea der Tage Hadrians gesucht werden dürfe.

Mit den Inschriften der Vigna Randanini hat sich vor Anderen Herr Nicolaus Müller in Kiel beschäftigt. Ich habe mich an diesen mir von Rom her bekannten vortrefflichsten Kenner mit der Bitte um seine Ansicht über Mannacius gewendet. Herr NMüller hat mich zunächst belehrt, daß die Inschrift (nach Garrucci) auch von Engeström om Judarne S. 41 Nummer 43 behandelt werde: er hat mir Garruccis Fehler proselyti verbessert, die Punkte, welche ich oben gedruckt, ergänzt (ein schönes Blatt hinter dulcissime kann ich nicht nachahmen), und berichtet, die auf einer weißen, 0_{18} hohen, 0_{49} breiten, von unten nach oben gebrochenen Marmortafel stehende Inschrift sei seit 1885 an der Hinterseite eines Erwachsenen-Loculus in der Katakombe der Vigna Randanini befestigt. Herr Müller »möchte annehmen, daß die Thatsache der Nennung des Mannacius innerhalb eines jüdischen Coemeteriums die Vermuthung nahe legt, daß er in einem gleichen oder ähnlichen Verhältnisse zum Judenthume stand wie seine Schwester«, also nicht von Geburt Jude war (Brief vom 16 Februar 1890).

Bis auf Weiteres wird der Hirpinische Eigenname in den Stammtafeln der Masoreten eine Stelle nicht finden dürfen.

Psalm 114 im Sidrâ rabbâ.

Herr Pfarrer Wilhelm Brandt hat in seinem Buche über die mandäische Religion 134 ff. darauf aufmerksam gemacht, daß gewisse Stellen des zuerst von dem Schweden MNorberg als liber Adami, dann von IHPetermann als Thesaurus sive liber magnus herausgegebenen Werkes sich sehr nahe mit Stellen unseres alten Testaments berühren. Ich habe die Thatsache erst durch Brandts Buch erfahren, und weiß mich nicht zu erinnern, sie früher irgendwo, etwa bei Euting oder Noeldeke, erwähnt gefunden zu haben. Selbstverständlich wird für mich zunächst nichts Anderes

möglich sein, als weitere Kreise mit Einem der von Brandt angeführten Abschnitte des Sidra rabbâ bekannt zu machen: einige Bemerkungen daran zu knüpfen, scheint schon jetzt erlaubt.

Ich setze den vermuthlich den Lesern dieser Blätter schwer zugänglichen Text her. Petermanns nur in hundert Exemplaren abgezogene Autographie ruht auf dem A genannten, 1560 geschriebenen Pariser Codex 1, Norbergs recht seltener Druck auf dem als B bezeichneten, 1632/3 vollendeten Pariser Codex 2.

Ich bediene mich, rein mechanisch umschreibend, des hebräischen Alphabets. Ich setze Sinnzeilen ab, und interpungiere. Brandts Uebersetzung füge ich bei, soweit sie reicht, indem ich zwei Sprachfehler des meist richtig Deutsch schreibenden Holländers stillschweigend beseitige. Die Zeilen 21 22 meines Texts habe ich selbst übersetzt.

Daß ich nicht wie Norberg כדי, sondern wie Brandt כד, nur nicht mit gehaktem ד lese, merke ich nur an.[1])

Die Parallelstellen des Psalms 114 führe ich am Rande der Uebersetzung auf.

Ich schicke dem Texte eine Bemerkung zur mandäischen Grammatik vorauf, welche sich an die in meiner Uebersicht 216 gegebene Anschauung anknüpft, daß taqattala = הִתְקַטֵּל, und aus itaqattala verkürzt ist.

ThNoeldeke sucht in seiner mandäischen Grammatik 222 ff. in Formen wie עתאפראש *wird belehrt, scheidet aus* ein Ettafal. Falls Friedrich Delitzsch, was zu entscheiden ich außer Stande bin, berechtigt ist, das assyrische ittafal zur arabischen Siebenten zu ziehen (ippariš *flog*, ittapraš *flog*), so dürfte עתאפראש auch Medium einer Siebenten sein können.

Aber weder Noeldekes Erklärung der עתא Formen noch ein etwa zu machender Versuch, solche Formen aus dem assyrischen Ittafal zu deuten, reicht für alle mandäischen עתא aus, welche ja füglich — ich behaupte nicht, daß sie es sind — aus verschiedenen Urformen zusammengefallen sein können. עתאהזאיתון in meiner Zeile 23 ist ܐܬܬܚܙܬܘܢ*, und gewis ist ܐܬܚܙܝ* und ܐܬܚܙܝ* an ܐܬܬܚܙܬܘܢ* (= jetzigem ܐܬܚܙܝܬܘܢ) durchaus unschuldig.

Wie wäre es, wenn man עתא wenigstens in einzelnen Fällen als jenes von mir vermuthete *ita* ansähe? Man dürfte ttẹ in ܐܬܬܙܝܥܬ (bei mir 10 עתאזיהאת) doch wohl wie die von mir in der

1) Da HZotenberg im Catalogue § 5 versichert, es erhelle aus dem von ihm beschriebenen Codex, daß die beiden ד nur graphisch verschieden seien, bezeichne ich das Relativum nicht ausdrücklich, etwa durch einen RapheStrich.

Uebersicht 11_8 ff. behandelten Bildungen auffassen. Mein aus Pedro de Alcala geschöpftes Material ist reich, meine Lesung mandäischer Texte noch nicht ausgedehnt. Vielleicht äußert sich Noeldeke einmal über die Frage.

Meines Erachtens wäre der Beweis so zu führen, daß man alle die Fälle sammelte, in denen eine arabische Fünfte einem hebräischen Hiṭpaqqél, einem syrischen ܐܬܦܥܠ und einem mandäischen —עתא entspricht, ohne daß Letzterem ein Afqél oder Tafqél passender Bedeutung zur Seite stünde. Es ist überhaupt längst Zeit, ein vergleichendes Wörterbuch der semitischen Sprachen vorzulegen.

1 עתיגלון חייא לתיביל.
Norberg 320 דנא | זיוא נהורא וחייא:
יאמא דהיזיויא אפאך.
ויארדנא עהדאר לעוהורא:
5 טוריא ראקדיא כד איליא.
ואילאתא בדבאר משאהטא עולאואיהין:
ואראמתא מאמללא כד בנאת אנאניא בעקארא:
טוריא פאהתיא פומאיהון ויאהביא תושביהתא.
וארזיא בלילבאן מיתאבריא:
10 ארקא דהזאתאן זאהאת ועתאזיהאת.
ומליך יאמא דהיזיאן אפאך:
יאמא .. למאן הזית ואפאכת ⁘
יארדנא .. למאן הזית. ועהדארת לעוהוראך ⁘
טוריא .. למאן הזאיתון. וראקדיתון כד איליא ⁘
15 ואילאתא בדבאר .. למאן משאהטיתין עולאואיכין ⁘
ואראמאתא כד בנאת אנאניא .. למאן מאמליליתין בעקארא ⁘
טוריא .. למאן פאהתיתון פומאיכון בתושביהתא ⁘
ארזיא בלילבאן .. למאן עתאברתון ⁘
A = Petermann 175 ארקא .. למאן | הזית יעתאזיהית ⁘
20 מליך יאמא .. למאן הזית ואפאכת ⁘
ואנגאויא יאמא .. למאן עשתאגאשתון ⁘
ונסיסיא יאמא .. למאן עתאהזאיתון ⁘
מן קודאם זיוא ונהורא ומאנדא דחייא
24 יזיוא ותוקנא דאלבישתינון לבהיריא:

1 Geoffenbart ist das Leben der [*Dativus*] Tibil,
aufgegangen Glanz und Licht und Leben.
Das Meer, als es ihn sahe, kehrte um, 3^1
und der Jordan wandte sich rückwärts: 3^2
5 die Berge sprangen wie Hirsche, 4^1
und die Hinden auf dem Felde verderbten ihre Jungen.
Und die Hügel redeten mit Ehre wie die Wolkensöhne. 4^2

Die Berge öffneten ihren Mund und gaben Lobpreis,
und die Cedern auf dem Libanon wurden gebrochen.
10 Die Erde, als sie mich sahe, zitterte und ward erschüttert.
Der König des Meeres, als er mich sahe, kehrte um. 5[1]
Meer, wen sahest du, und kehrtest um?
Jordan, wen sahest du, und wandtest dich rückwärts? 5[2]
Berge, wen sahet ihr, und spranget wie Hirsche? 6[1]
15 und [ihr] Hinden auf dem Felde, warum verderbtet ihr eure Jungen?
Hügel, für wen redetet ihr wie die Wolkensöhne mit Ehre? 6[2]
Berge, für wen öffnetet ihr euern Mund mit Lobpreis?
Cedern auf dem Libanon, für wen wurdet ihr gebrochen?
Erde, wen sahest du, und wurdest erschüttert?
20 König des Meeres, wen sahest du, und kehrtest um?
und [ihr] Tiefen des Meeres, warum geriethet ihr in Verwirrung?
und [ihr] Wogen des Meeres, wem wurdet ihr sichtbar?
Vor dem Glanz und Licht und dem Wissen des Lebens
24 und dem Glanze und der Vollkommenheit, mit der ich die Erwählten bekleidet habe.

Petermann 1 174$_{11}$, Norberg 1 318 Ende, Brandt 134. Die von Petermann gesammelten Varianten 2 66 ff. sind stillschweigend benutzt.

WBrandt hat richtig gesehen, daß die Wolkensöhne der Zeile 7 dem Misverstehn eines ܒܢܝ ܕܥܢ = בְּנֵי צֹאן in ܒܢܝ ܕܥܢܢ ihr Dasein verdanken. Er hat nicht gesehen, oder auszusprechen nicht der Mühe werth erachtet, daß der König des Meeres der Zeile 11 dadurch entstanden ist, daß מָה לֹךְ unseres Canons in מֶלֶךְ zusammen gelesen worden ist. EBöhl hat 1873 von einer aramäischen Volksbibel geschrieben. Iob *ἑρμηνεύεται ἐκ τῆς συριακῆς βίβλου* (Nachwort): andere Bücher sind nach Ausweis der von ihnen gebrauchten Vokabeln (wie *θωδαθα*) ebenfalls aus einem aramäischen Originale geflossen. Ein Targum hohen Alters hat sogar für den Pentateuch 𝔊s (Mittheilungen 2 361 ff.) *'Εννά* = חִעְנָא geliefert. Nichts hindert anzunehmen, daß die Mandäer einen alten Targum des Psalms 114 benutzt haben, der uns verloren ist.

Brandt hat auch nicht erkannt, daß was die Mandäer entlehnt haben, eine ursprünglichere, vollständigere, aber überladene Gestalt unseres Psalms 114 ist, den man erst später auf den wunderbaren Durchzug durch das rothe Meer gedeutet haben mag, und der sogar im Canon eine für eine PaschaLiturgie unpassende Stelle enthält, die vom Jordan, welche jetzt auf Iosue 3 bezogen wird. Es wäre recht nützlich, wenn man einsähe, daß der Satz »il prend

son bien partout où il le trouve« auch von den Liturgikern gilt. Daraus, daß Psalm 114 ein Theil des PaschaRituals ist, folgt noch lange nicht, daß er von Hause aus geschrieben worden ist, um ein Theil eines solchen Rituals zu sein. Psalm 55 (= νδ) mag auf Abessalom, auf Achithophel, auf Doeg, auf die Feinde des Ieremias, auf Alcimus, auf Seleucus den Vierten gedichtet sein — die Kirche Aegyptens hat auf alle Fälle das Recht, seine Verse 5 bis 9 (meine von keinem Liturgiker je auch nur berochenen Orientalia 1 46) über den Toten zu lesen:

Das Herz bebt mir im Leibe:
Todesgrauen überfiel mich:
Zagen und Zittern[1]) kam über mich:
mich übermochte Schwindel.
Da sprach ich: Hätt' ich doch Flügel, Taubenflügel,
wie wollt' ich mir eine Heimstatt erfliegen![2])
gerne[3]) weit hin dehnend das Streifen,
auf der Heide Rast suchen!
wie wollt' ich eilends mir einen SchlupfOrt finden
vor wüthendem[4]) Winde, vor Wetter!

Was die Christen Aegyptens mit dem Psalm 55 gethan haben, durften auch die Männer der Synagoge mit irgendwelchem Liede ihrer eigenen Vorzeit thun.

Mit Cedern und mit dem Libanon haben die Mandäer nichts zu schaffen gehabt. Cedern zu nennen war in Sûq eššiûḳ so unpassend, wie der berühmte Satz »wenn ich durch ein Dorf reite« im Munde Laskers unpassend war. Der Jordan, von dem der Psalm spricht, ist ein ganz anderer als der so oft von den Mandäern erwähnte.

Der Ueberschuß der Mandäer trägt hebräisches Gepräge. In Zeile 6 ist חִבֵּל misverstanden, das *ὠδίνειν* und *καταφθείρειν* bedeutete: zum mandäischen Worte vergleiche ܫܚܛ und »ܝܚܛܐ«, das beides zur Wurzel חטא gehört. Aber der Ueberschuß enthält außer dem echten Texte auch die Deutungen eines Targum: ich habe zwei Bände Targum herausgegeben, und scheide (wie ich meine, sicher) die Einlagen aus. Zum Beispiel lautete Zeile 10 vermuthlich וַתָּחֹל[5]) רָאָתְנִי הָאָרֶץ (vergleiche Psalm 114₆), und ܘܐܬܬܙܝܥܬ ist Glosse des Targum. Allerdings wird, wer den Urtext her-

1) Lies ראה ורעד, Prophetae chaldaice 48.
2) Uebersicht 209—214.
3) = הנה.
4) ܣܥܐ ἐπῆλθεν ἐφώδευσεν ἐπηρέασεν.
5) Ieremias 51₂₉ gegen Psalm 97₄.

stellen will, um das Versmaß richtig zu erhalten, die Annahme nicht scheuen dürfen, daß hier und da Ein Wort oder zwei Worte uns fehlen.

Daß Psalm 114 8 רָאוּה in רְאֻהוּ zu ändern ist, scheint mir gewis. Man hatte sich mit רְאֻוּ begnügt, um nicht zwei ו nebeneinander zu haben: denn וירגז folgt.

Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.

Von

H. Hertz.

Das System von Begriffen und Formeln, durch welches Maxwell die elektromagnetischen Erscheinungen darstellte, ist in seiner möglichen Entwicklung reicher und umfassender als ein anderes der zu gleichem Zwecke ersonnenen Systeme. Es ist gewiß wünschenswerth, daß ein der Sache nach so vollkommenes System auch der Form nach möglichst ausgebildet werde. Der Aufbau des Systems sollte durchsichtig seine logischen Grundlagen erkennen lassen; alle unwesentlichen Begriffe sollten aus demselben entfernt und die Beziehungen der wesentlichen Begriffe auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt sein. Die eigene Darstellung Maxwells bezeichnet in dieser Hinsicht nicht das erreichbare Ziel, sie schwankt häufig hin und her zwischen den Anschauungen, welche Maxwell vorfand, und denen, zu welchen er gelangte. Maxwell geht aus von der Annahme unvermittelter Fernkräfte, er untersucht die Gesetze, nach welchen sich unter dem Einfluß solcher Fernkräfte die hypothetischen Polarisationen des dielektrischen Aethers verändern und er endet mit der Behauptung, daß diese Polarisationen sich wirklich so verändern, ohne daß in Wahrheit Fernkräfte die Ursachen derselben seien [1]). Dieser Gang hinterläßt das unbefriedigende Gefühl, als müsse entweder das schließliche Ergebniß, oder der Weg unrichtig sein, auf welchem es gewonnen wurde. Auch läßt dieser Gang in den Formeln eine Anzahl überflüssiger, gewissermaßen rudimentärer Begriffe

1) Die gleiche Bemerkung trifft die durch v. Helmholtz im 72. Bande des Crelleschen Journals gegebene Ableitung, nicht zwar allgemein, aber doch für diejenigen besonderen Werthe der Constanten, welche in den Endresultaten die Fernkräfte verschwinden lassen, welche also auf die hier vertretene Theorie führen.

zurück, welche ihre eigentliche Bedeutung nur in der alten Theorie der unvermittelten Fernwirkung besaßen. Als solche rudimentäre Begriffe physikalischer Natur nenne ich die dielektrische Verschiebung im freien Aether, unterschieden von der erzeugenden elektrischen Kraft und das Verhältniß beider, die Dielektricitätsconstante des Aethers. Diese Unterscheidungen haben Sinn, wenn wir aus einem Raum den Aether entfernen, die Kraft aber in demselben bestehen lassen können. Nach der Anschauung, von welcher Maxwell ausging war dies denkbar, es ist nicht denkbar nach der Anschauung, zu welcher seine Arbeiten uns geführt haben. Als eine rudimentäre Erscheinung mathematischer Natur nenne ich das Vorherrschen des Vectorpotentiales in den Grundgleichungen. Bei dem Aufbau der neuen Theorien dienten die Potentiale als Gerüst, indem durch ihre Einführung die unstätig an einzelnen Punkten auftretenden Fernkräfte ersetzt wurden durch Größen, welche in jedem Punkte des Raumes nur durch die Zustände der benachbarten Punkte bedingt sind. Nachdem wir aber gelernt haben, die Kräfte selber als Größen der letzteren Art anzusehen, hat ihr Ersatz durch Potentiale nur dann einen Zweck, wenn damit ein mathematischer Vortheil erreicht wird. Und ein solcher scheint mir mit der Einführung des Vektorpotentiales in die Grundgleichungen nicht verbunden, in welcher man ohnehin erwarten darf, Beziehungen zwischen Größen der physikalischen Beobachtung, nicht zwischen Rechnungsgrößen zu finden.

Die erwähnten Unvollkommenheiten der Form erschweren auch die Anwendung der Maxwellschen Theorie auf besondre Fälle. Aus Anlaß solcher Anwendungen habe ich mich seit längerer Zeit bemüht, die Maxwellschen Formeln zu sichten und versucht, die wesentliche Meinung derselben von der zufälligen Form, in welcher sie zuerst auftraten, abzulösen. Das Folgende ist die geordnete Zusammenstellung meiner Ergebnisse. In gleicher Richtung hat bereits seit 1885 Herr Oliver Heaviside gearbeitet. Die Begriffe, welche er aus den Maxwellschen Gleichungen fortschafft, sind dieselben, welche auch ich fortschaffe; die einfachste Form, welche diese Gleichungen dadurch annehmen[1]), ist, von Nebendingen abgesehen, die gleiche zu welcher auch ich gelange. In dieser Hinsicht also gehört Herrn Heaviside die Priorität. Trotzdem wird man, hoffe ich, die folgende Darstellung nicht für über-

1) Diese Gleichungen findet man im Philosophical Magazine, Februar 1888. Daselbst wird auf frühere Arbeiten im Electrician, 1885 Bezug genommen, welche Quelle mir unzugänglich gewesen ist.

flüssig halten. Eine endgültige Darstellung beansprucht dieselbe nicht zu sein, sondern nur eine solche, von welcher sich leichter weitere Verbesserungen anknüpfen lassen, als an die bisher gegebenen Darstellungen.

Ich theile den Stoff in zwei Theile. In dem ersten Theile A gebe ich die Grundbegriffe und die sie verknüpfenden Formeln. Es werden den Formeln Erläuterungen hinzugefügt werden, aber diese Erläuterungen sollen nicht Beweise der Formeln sein. Die Aussagen werden vielmehr als Erfahrungsthatsachen gegeben, und die Erfahrung soll als ihr Beweis gelten. Allerdings läßt sich einstweilen nicht jede einzelne Formel besonders durch die Erfahrung prüfen, sondern nur das System als Ganzes. Mit dem Gleichungssystem der gewöhnlichen Mechanik liegt ja die Sache kaum anders. In dem zweiten Theile B gebe ich an, in welcher Weise die Thatsachen der unmittelbaren Wahrnehmung systematisch aus den Formeln abgeleitet werden können, durch welche Erfahrungen sich also die Richtigkeit des Systems erweist. Ausführlich behandelt würde dieser Theil einen sehr großen Umfang annehmen, es kann sich hier daher nur um Andeutungen handeln.

A. Die Grundbegriffe und ihr Zusammenhang.

1. Elektrische und magnetische Kraft.

Das Innere aller Körper, den freien Aether eingeschlossen, kann von der indifferenten Ruhe aus Störungen erfahren, welche wir als elektrische, und andere Störungen, welche wir als magnetische bezeichnen. Das Wesen dieser Zustandsänderungen kennen wir nicht, sondern nur die Erscheinungen welche ihr Vorhandensein hervorruft. Diese letzteren sehen wir als bekannt an, mit ihrer Hülfe bestimmen wir die geometrischen Verhältnisse der Zustandsänderungen selbst. Die Störungen der elektrischen und der magnetischen Art sind so mit einander verknüpft, daß Störungen der einen Art unabhängig von denen der andern dauernd zu bestehen vermögen, daß dagegen Störungen keiner der beiden Arten zeitliche Schwankungen erleiden können, ohne dadurch zugleich Störungen der anderen Art hervorzurufen. Die Erzeugung des geänderten Zustandes erfordert den Aufwand von Energie; diese Energie wird beim Verschwinden der Störung wiederersetzt; das Vorhandensein der Störung stellt also einen Vorrath von Energie dar. In einem und demselben Punkte können sich die Zustandsänderungen einer jeden Art unterscheiden nach Richtung,

Sinn und Größe. Es ist also zur Bestimmung sowohl des elektrischen als des magnetischen Zustandes die Angabe einer gerichteten Größe oder der drei Componenten einer solchen nothwendig. Es ist aber eine erste wichtige Voraussetzung unserer gegenwärtigen Theorie, daß die Angabe einer einzigen Richtungsgröße auch hinreichend sei, um die betreffende Aenderung vollständig zu bestimmen. Gewisse Erscheinungen, z. B. die des permanenten Magnetismus, der Dispersion u. s. w. lassen sich von diesem Standpunkte aus nicht verstehen, sondern erfordern, daß die elektrischen bezw. magnetischen Zustände eines jeden Punktes durch mehr als eine Variabele dargestellt werden. Solche Erscheinungen treten dadurch selbst aus dem Rahmen unserer Betrachtung in ihrem gegenwärtigen Umfange heraus.

Diejenige Richtungsgröße, durch welche wir zunächst den elektrischen Zustand bestimmen, nennen wir die elektrische Kraft. Die Erscheinung durch welche wir sie definiren, ist die mechanische Kraft, welche ein bestimmter elektrisirter Körper im elektrisch gestörten leeren Raume erfährt. Für den leeren Raum selbst wollen wir nämlich die Componente der elektrischen Kraft in beliebiger Richtung proportional setzen der gleichgerichteten Componente jener mechanischen Kraft. Unter elektrischer Kraft in einem Punkte eines ponderabelen Körpers verstehen wir die elektrische Kraft, welche an dem betreffenden Punkte im Innern eines unendlich kleinen, unendlich gestreckten cylindrischen Hohlraumes sich findet, den wir in solcher Richtung in den Körper gebohrt haben, daß seine Richtung mit derjenigen der Kraft übereinstimmt, — eine Anforderung, welcher erfahrungsmäßig stets genügt werden kann. In welcher Beziehung auch immer die so gemessene Kraft zu der wirklichen Zustandsänderung des Körpers steht, sicherlich muß sie dieselbe gemäß unserer Voraussetzung eindeutig bestimmen. Setzen wir überall an Stelle des Wortes „elektrisch“ das Wort „magnetisch“ und an Stelle des elektrisirten Hülfskörpers den Pol einer Magnetnadel, so erhalten wir die Definition der magnetischen Kraft. Um den Sinn beider Kräfte in der conventionellen Weise festzulegen, bestimmen wir noch, daß der elektrisirte Hülfskörper mit Glaselektricität geladen und daß derjenige Pol der Magnetnadel benutzt werde, welcher nach Norden weist. Die Einheiten der Kräfte sind noch vorbehalten. Die Componenten der elektrischen Kraft in Richtung der x, y, z bezeichnen wir mit X, Y, Z, die gleichgerichteten Componenten der magnetischen Kraft mit L, M, N.

2. Die Energie des Feldes.

Der elektrische Energievorrath eines Köpervolums, in welchem die elektrische Kraft einen constanten Werth hat, ist eine homogene, quadratische Funktion der drei elektrischen Kraftcomponenten. Die entsprechende Aussage gilt für den Vorrath an magnetischer Energie. Den gesammten Energievorrath bezeichnen wir als den elektromagnetischen, er ist die Summe des elektrischen und des magnetischen.

Für einen isotropen Körper ist hiernach die Energiemenge jeder Art, berechnet auf die Volumeinheit gleich dem Produkt aus dem Quadrat der betreffenden Gesammtkraft und einer Constanten. Die Größe der letzteren kann verschieden sein für die elektrische und die magnetische Energie, sie hängt ab von dem Stoffe des Körpers und von der Wahl der Einheiten für die Energie und für die Kräfte. Die Energie wollen wir in absolutem Gaussischen Maaße messen und die Einheiten der Kräfte nunmehr festsetzen durch die Bestimmung, daß im freien Aether der Werth der Constanten gleich $\frac{1}{8\pi}$ werden soll, daß also sein soll die Energie der Volumeinheit des gestörten Aethers gleich

$$\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2).$$

Messen wir die Kräfte in dieser Weise, so sagen wir, daß wir sie in absolutem Gaussischen Maaße messen[1]). Die Dimension der elektrischen Kraft wird dieselbe wie die der magnetischen, beide werden von solcher Art, daß ihr Quadrat die Dimension einer Energie in der Volumeneinheit hat, sie werden also in der üblichen Beziehungsweise gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Für jeden isotropen ponderabelen Körper können wir nun nach dem Bisherigen setzen die Energie der Volumeinheit gleich

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2).$$

Die neu eingeführten Constanten ε und μ sind nothwendig positive reine Zahlen. Wir nennen ε die Dielektricitätsconstante, μ die Magnetisirungsconstante des Stoffes. Offenbar sind ε und μ Verhältnißzahlen, durch welche wir die Energie eines Stoffes vergleichen mit der Energie eines anderen Stoffes. Aus der Natur eines Stoffes allein geht ein bestimmter Werth derselben nicht hervor. Dies meinen wir, wenn wir sagen, Dielektricitäts- und

1) Siehe H. Helmholtz, Wiedemanns Annalen Bd. 17 pag. 42. 1882.

Magnetisirungsconstante seien keine innere Constanten eines Stoffes. Es ist nicht unrichtig wenn wir sagen, diese Constanten seien gleich Eins für den Aether, aber es enthält diese Behauptung keine Thatsache der Erfahrung, sondern eine willkürliche Festsetzung unsererseits.

Für krystallinische Körper wird die Energie der Volumeinheit gleich

$$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{11}X^2+\varepsilon_{22}Y^2+\varepsilon_{33}Z^2+2\varepsilon_{12}XY+2\varepsilon_{23}YZ+2\varepsilon_{13}XZ)$$
$$+\frac{1}{8\pi}(\mu_{11}L^2+\mu_{22}M^2+\mu_{33}N^2+2\mu_{12}LM+2\mu_{23}MN+2\mu_{13}LN).$$

Durch bestimmte Wahl der Axen läßt sich der eine oder der andere Theil dieses Ausdrucks in eine Summe von drei Quadraten transformiren. Es ist wohl wahrscheinlich daß dieselbe Wahl der Axen für den einen wie für den andern Theil diesen Dienst leistet. Die ε und μ müssen von solcher Beschaffenheit sein, daß bei der Transformation in eine Quadratsumme alle Coefficienten positiv werden.

3. Zusammenhang der Kräfte im Aether.

Wir nehmen an, daß das benutzte Coordinatensystem der x, y, z von solcher Beschaffenheit ist, daß wenn die Richtung der positiven x nach vorn, die der positiven z nach oben geht, alsdann die y von links nach rechts hin wachsen. Unter dieser Voraussetzung sind die elektrischen und magnetischen Kräfte im Aether mit einander verknüpft nach folgenden Gleichungen:

3a.
$$A\frac{dL}{dt}=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}$$
$$A\frac{dM}{dt}=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}$$
$$A\frac{dN}{dt}=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}$$

3b.
$$A\frac{dX}{dt}=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}$$
$$A\frac{dY}{dt}=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}$$
$$A\frac{dZ}{dt}=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}$$

zu welchen die ihnen nicht widersprechenden Gleichungen

3c.
$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dx}=0,\qquad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0$$

als eine den Aether vor der ponderabelen Materie auszeichnende Ergänzung hinzutreten.

Nachdem diese Gleichungen einmal gefunden sind, erscheint es nicht mehr zweckmäßig, dieselben aus Vermuthungen über die elektrische und magnetische Constitution des Aethers und das

Wesen der wirkenden Kräfte als aus bekannteren Dingen herzuleiten, wie es allerdings dem historischen Gange entsprechen würde. Viel eher ist es zweckmäßig, an diese Gleichungen die weiteren Vermuthungen über die Constitution des Aethers anzuknüpfen.

Da die Dimensionen der L, M, N und der X, Y, Z die gleichen sind, so ist die Constante A eine reciproke Geschwindigkeit. Sie ist in Wahrheit eine innere Constante des Aethers; wir wollen damit sagen, daß ihre Größe weder von dem Vorhandensein eines andern Körpers noch von willkürlichen Festsetzungen unsererseits abhängig ist.

Wir multipliciren unsere Gleichungen sämmtlich mit $\frac{1}{4\pi A} d\tau$, ferner einzeln der Reihe nach mit bez. L, M, N, X, Y, Z und addiren sie sämmtlich. Wir integriren beide Seiten der entstehenden Gleichung über einen beliebig begrenzten Raum, dessen Oberflächenelement $d\omega$ mit den Coordinatenaxen die Winkel n,x, n,y, n,z bildet. Rechts läßt sich die Integration ausführen und wir erhalten:

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}d\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi A}\int\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\}d\omega.$$

Das links stehende Integral ist die elektromagnetische Energie des Raumes; die Gleichung giebt uns also die Aenderung dieser Energie ausgedrückt durch Größen, welche sich allein auf die Oberfläche des Raumes beziehen.

4. Isotrope Nichtleiter.

In homogenen isotropen Nichtleitern verlaufen die Erscheinungen qualitativ vollkommen wie im freien Aether. Quantitativ sind Unterschiede insofern vorhanden, als erstens die innere Constante einen andern Werth hat als im Aether und als zweitens der Energievorrath der Volumeinheit in der bereits angegebenen Weise die Constanten ε und μ enthält. Wir entsprechen diesen Aussagen und genügen der Erfahrung indem wir setzen:

4a.
$$A\mu\frac{dL}{dt}=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}$$
$$A\mu\frac{dM}{dt}=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}$$
$$A\mu\frac{dN}{dt}=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}$$

4b.
$$A\varepsilon\frac{dX}{dt}=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}$$
$$A\varepsilon\frac{dY}{dt}=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}$$
$$A\varepsilon\frac{dZ}{dt}=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}$$

Denn wenn wir für einen Augenblick in dem Nichtleiter das Maaß der Kräfte so bestimmen, wie wir es im Aether gethan haben und demgemäß für X, Y, Z einführen $\frac{X}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{Y}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}}$ und für L, M, N einführen $\frac{L}{\sqrt{\mu}}, \frac{M}{\sqrt{\mu}}, \frac{N}{\sqrt{\mu}}$, so nehmen die Gleichungen genau die Form der Gleichungen des Aethers an mit dem einzigen Unterschiede, daß an Stelle der Größe A die Größe $A\sqrt{\varepsilon\mu}$ tritt. Behalten wir auf der andern Seite unser Maaß der Kräfte bei, so können wir widerspruchsfrei der Energie den geforderten Werth beilegen. Denn die Ausführung der gleichen Operation, welche wir im vorigen Abschnitt anwandten, ergiebt uns hier:

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}d\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi A}\int\left\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\right\}d\omega.$$

Die allgemeinen Aussagen, durch welche wir uns auf unsere Gleichungen haben führen lassen, versagen, wenn wir den Nichtleiter nicht mehr als homogen betrachten. Es fragt sich also, ob in diesem Falle unsere Gleichungen noch gelten. Die Erfahrung beantwortet diese Frage in bejahendem Sinne; wir können also in den Gleichungen 4a. und 4b. die Größen ε und μ als von Punkt zu Punkt veränderlich betrachten.

5. Krystallinische Nichtleiter.

Eine Darstellung der Vorgänge in solchen Körpern, welche nach verschiedener Richtung verschieden entwickelt sind, deren elektromagnetische Eigenschaften aber bei verschwindendem Anisotropismus in die der isotropen Nichtleiter übergehen, erhalten wir, wenn wir die in unsern Gleichungen links stehenden zeitlichen Aenderungen der Kräfte als ganz allgemeine lineare Funktionen der rechts stehenden räumlichen Aenderungen der Kräfte entgegengesetzter Art betrachten. Die Allgemeinheit der Form dieser linearen Funktionen und die Auswahl ihrer Constanten wird indessen beschränkt durch die Vermuthung, daß dieselbe Operation, welche uns bisher eine Gleichung für die Aenderung der Energie lieferte, dies allgemein thun wird, und durch die Forderung, daß dabei die Energie selbst die bereits festgestellte Form annehmen muß. Durch diese Ueberlegungen werden wir auf die folgenden Gleichungen hingeleitet, welche in der That zur Darstellung der wichtigsten Erscheinungen genügen:

$$A\left(\mu_{11}\frac{dL}{dt}+\mu_{12}\frac{dM}{dt}+\mu_{13}\frac{dN}{dt}\right)=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}$$

5a. $$A\left(\mu_{12}\frac{dL}{dt}+\mu_{22}\frac{dM}{dt}+\mu_{23}\frac{dN}{dt}\right)=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}$$

$$A\left(\mu_{13}\frac{dL}{dt}+\mu_{23}\frac{dM}{dt}+\mu_{33}\frac{dN}{dt}\right)=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}$$

$$A\left(\varepsilon_{11}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{12}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{13}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}$$

5b. $$A\left(\varepsilon_{12}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{22}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}$$

$$A\left(\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt}+\varepsilon_{23}\frac{dY}{dt}+\varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt}\right)=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}.$$

Die Gleichung für die Aenderung der Energie eines Raumes ergiebt das gleiche Resultat wie in Abschnitt 3 und 4. Auch in den Gleichungen des gegenwärtigen Abschnittes ist es erfahrungsmäßig nicht nöthig, die ε und μ als constant in Hinsicht des Raumes anzusehen, vielmehr können dieselben beliebig von Punkt zu Punkt veränderliche Größen sein.

6. Vertheilung der Kräfte in Leitern.

In den Körpern, welche wir bisher betrachteten, erscheint jede Aenderung der elektrischen Kraft als bedingt durch das Vorhandensein magnetischer Kräfte. Sind in einem endlichen Bereich die magnetischen Kräfte gleich Null, so fällt jede Ursache für eine solche Aenderung fort und eine vorhandene Vertheilung elektrischer Kraft bleibt sich selbst überlassen dauernd bestehen, solange nicht von den Grenzen des Bereiches her eine Störung das Innere trifft. Nicht in allen Körpern zeigen die elektrischen Kräfte dies Verhalten. In vielen Körpern schwindet eine sich selbst überlassene elektrische Kraft mehr oder weniger schnell dahin, in solchen Körpern sind magnetische Kräfte oder andere Ursachen erforderlich, um eine vorhandene Vertheilung vor der Veränderung zu bewahren. Solche Körper bezeichnen wir aus Gründen, die später hervortreten, als Leiter. Die einfachsten Annahmen, welche wir in Hinsicht derselben machen können, sind diese, daß erstens der Verlust welchen eine sich selbst überlassene elektrische Kraft in der Zeiteinheit erleidet, der Kraft selbst proportional ist, und daß zweitens unabhängig von diesem Verlust die magnetischen Kräfte hier dieselben Aenderungen hervorzubringen streben, wie in den bisher betrachteten Körpern. Führen

wir eine neue Constante λ ein, so erlaubt uns die erste Annahme zu behaupten, daß die sich selbst überlassene Kraftcomponente X sich ändern werde nach der Gleichung $A\varepsilon\frac{dX}{dt} = -4\pi\lambda AX$. Die zweite Annahme ergänzt diese erste dahin, daß, wenn magnetische Kräfte vorhanden sind, die Aenderung geschehen werde nach der Gleichung $A\varepsilon\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX$. Die Constante λ heißt die specifische elektrostatisch gemessene Leitungsfähigkeit des Körpers. Ihre Dimension ist die einer reciproken Zeit. Die Größe $\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}$ ist daher eine Zeit; es ist diejenige Zeit, in welcher die sich selbst überlassene Kraft auf den $e$ten Theil ihres Anfangswerthes herabsinkt, die sogenannte Relaxationszeit. Die letztere, nicht etwa λ selbst, ist, wie zuerst Herr E. Cohn bemerkt und hervorgehoben hat[1]), neben der ersten eine zweite innere Constante des betrachteten Körpers, eindeutig festsetzbar ohne Zuhülfenahme eines zweiten Mediums.

Unsere Ueberlegungen führen uns nun vermuthungsweise auf folgende Gleichungen, welche den Erfahrungen genügen:

$$\text{6a.}\quad A\mu\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \qquad A\mu\frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \qquad A\mu\frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

$$\text{6b.}\quad A\varepsilon\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \qquad A\varepsilon\frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \qquad A\varepsilon\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ.$$

Offenbar beziehen sich diese Gleichungen nur auf isotrope Körper, dagegen ist es, was unsere bisherigen Voraussetzungen anlangt, nicht nothwendig, daß die Körper auch homogen seien. Um indessen in Wahrheit die Vertheilung der Kräfte in anhomogenen Körpern genau darzustellen, bedürfen unsere Gleichungen noch einer gewissen Ergänzung. Aendert sich nämlich die Beschaffenheit eines Körpers von Punkt zu Punkt, so sinkt im Allgemeinen die elektrische Kraft sich selbst überlassen nicht völlig auf Null ab, sondern nimmt einen gewissen von Null verschiedenen Endwerth an. Diesen Werth, dessen Componenten X' Y' Z' sein mögen, nennen wir die in dem betreffenden Punkte wirksame elektromotorische Kraft. Wir betrachten dieselbe als unabhängig von der Zeit, sie ist im Allgemeinen um so größer, je größer die Aenderung der

1) Vergleiche dieserhalb und in Hinsicht der Art, wie hier die Größe λ eingeführt wird: E. Cohn, Sitzungsber. d. Berl. Akad. Band XXVI pag. 405.

chemischen Beschaffenheit in der Längeneinheit ist. Wir tragen der Wirkung der elektromotorischen Kraft Rechnung, indem wir den Abfall der sich selbst überlassenen elektrischen Kraft nicht ihrem absoluten Werthe proportional setzen, sondern dem Unterschiede, welcher noch vorhanden ist zwischen diesem absoluten Werthe und dem Endwerthe. Unsre Gleichungen werden so für Leiter, deren Strucktur zum Auftreten elektromotorischer Kräfte Anlaß giebt.

$$A\mu\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \qquad A\varepsilon\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda A(X - X')$$

$$\text{6c.}\quad A\mu\frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \qquad \text{6d.}\quad A\varepsilon\frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda A(Y - Y')$$

$$A\mu\frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \qquad A\varepsilon\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda A(Z - Z').$$

7. Anisotrope Leiter.

Verhält sich der Leiter nach verschiedenen Richtungen verschieden, so dürfen wir nicht mehr annehmen, daß der Abfall einer jeden Componente der sich selbst überlassenen Kraft nur abhänge von dem Werthe dieser Componente selbst, es liegt aber die Vermuthung nahe, daß er eine lineare Funktion der drei Componenten sei. Nehmen wir zu dieser Vermuthung die Voraussetzung, daß für verschwindendes Leitungsvermögen die Gleichungen sich auf die eines anisotropen Nichtleiters reduziren, so gelangen wir zu folgendem System:

$$A\left(\mu_{11}\frac{dL}{dt} + \mu_{12}\frac{dM}{dt} + \mu_{13}\frac{dN}{dt}\right) = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

$$\text{7a.}\quad A\left(\mu_{12}\frac{dL}{dt} + \mu_{22}\frac{dM}{dt} + \mu_{23}\frac{dN}{dt}\right) = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}$$

$$A\left(\mu_{13}\frac{dL}{dt} + \mu_{23}\frac{dM}{dt} + \mu_{33}\frac{dN}{dt}\right) = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

$$A\left(\varepsilon_{11}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{12}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{13}\frac{dZ}{dt}\right) = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A\{\lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z')\}$$

$$\text{7b.}\quad A\left(\varepsilon_{12}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{22}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{23}\frac{dZ}{dt}\right) = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A\{\lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z')\}$$

$$A\left(\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{23}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt}\right) = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A\{\lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z')\}.$$

Es ist sehr wahrscheinlich, daß für alle wirklichen Körper $\lambda_{12} = \lambda_{21}$, $\lambda_{31} = \lambda_{13}$, $\lambda_{32} = \lambda_{23}$ sei. Auch in den Gleichungen dieses Abschnittes können die Constanten ε, μ, λ als von Ort zu Ort ihren Werth verändernd angesehen werden.

8. Grenzbedingungen.

Man bemerkt leicht, daß die Gleichungen 7a. und 7b. alle früheren als besondere Fälle umfassen und daß selbst die Gleichungen des freien Aethers aus ihnen durch besondere Verfügung über die Constanten hervorgehen. Da nun diese Constanten Functionen des Raumes sein können, so liegt es nahe, die Grenzfläche zweier heterogenen Körper anzusehen als eine Uebergangsschicht, in welcher zwar die Constanten außerordentlich rasch von einem Werth zu einem andern übergehen, in welcher dies jedoch in solcher Weise geschieht, daß auch in der Schicht selbst jene Gleichungen immer noch gelten und endliche Beziehungen zwischen den endlich bleibenden Werthen der Constanten und den ebenfalls endlich bleibenden Kräften ausdrücken. Um aus dieser der Erfahrung genügenden Vermuthung die Grenzbedingungen abzuleiten, lassen wir der Einfachheit halber das betrachtete Element der Trennungsfläche mit der xy-Ebene zusammenfallen.

Beachten wir zunächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte zwischen den sich berührenden Körpern nicht, so ergiebt die Betrachtung der ersten beiden der Gleichungen 7a. und 7b. daß die Größen $\frac{dX}{dz}$, $\frac{dY}{dz}$, $\frac{dM}{dz}$, $\frac{dN}{dz}$ zufolge unserer Voraussetzung auch in der Uebergangsschicht endlich bleiben müssen. Bezieht sich also der Index 1 auf die eine, der Index 2 auf die andere Seite der Grenzschicht, so muß sein

$$\text{8a.}\quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= 0 \\ X_2 - X_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{8b.}\quad \begin{aligned} M_2 - M_1 &= 0 \\ L_2 - L_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die zur Grenzfläche tangentialen Componenten der Kräfte pflanzen sich also stetig durch dieselbe fort. Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen 7a. und 7b. ergiebt dann weiter daß die Ausdrücke

$$\mu_{13}\frac{dL}{dt} + \mu_{23}\frac{dM}{dt} + \mu_{33}\frac{dN}{dt} \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_{13}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{23}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{33}\frac{dZ}{dt} + 4\pi(\lambda_{31}X + \lambda_{32}Y + \lambda_{33}Z)$$

den gleichen Werth haben müssen auf der einen und auf der an-

dern Seite der Grenzschicht. Diese Aussage, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Normalkomponenten der Kraft auf beiden Seiten der Grenzfläche giebt, nimmt für isotrope Körper die einfache Form an:

$$8c.\quad \mu_1 \frac{dN_1}{dt} - \mu_2 \frac{dN_2}{dt} = 0$$

$$8d.\quad \varepsilon_1 \frac{dZ_1}{dt} - \varepsilon_2 \frac{dZ_2}{dt} = -4\pi(\lambda_1 Z_1 - \lambda_2 Z_2).$$

Schließen wir demnächst das Auftreten elektromotorischer Kräfte in der Grenzfläche nicht aus, so haben wir zu beachten, daß erfahrungsmäßig die zur Grenzfläche normale Componente dieser Kräfte, also Z', in der Uebergangsschicht selbst unendlich wird, in solcher Weise jedoch, daß das durch die Grenzfläche hindurch erstreckte Integral $\int Z' dz$ einen endlichen Werth behält, welchen uns die Versuche angeben, während sie uns über den Verlauf von Z' selbst im Unklaren lassen. Wir genügen der Voraussetzung dieses Abschnittes nunmehr durch die Annahme, daß in der Uebergangsschicht neben L, M, N, X, Y, die Größe $Z - Z'$ endlich bleibe. Z wird dann daselbst unendlich, $\frac{dZ}{dt}$ aber können wir nichtsdestoweniger endlich belassen. Wir setzen ferner

$$8e.\quad \int Z dz = \int Z' dz = \varphi_{1,2}.$$

Integriren wir nunmehr die ersten zwei der Gleichungen 7a. und 7b. nach Multiplication mit dz durch die Uebergangsschicht hindurch, so erhalten wir, da wegen der Kürze des Weges das Integral jeder endlichen Größe verschwindet, die Bedingungen:

$$8f.\quad Y_2 - Y_1 = \frac{d\varphi_{1,2}}{dy}, \qquad X_2 - X_1 = \frac{d\varphi_{1,2}}{dx},$$

$$8g.\quad M_2 - M_1 = 0, \qquad N_2 - N_1 = 0$$

Die Anwendung hiervon auf die dritten der Gleichungen 7a. und 7b. ergiebt dann als Bedingungen für die Normalkräfte, daß zu beiden Seiten der Grenzfläche die Werthe der Ausdrücke

$$\mu_{12}\frac{dL}{dt} + \mu_{22}\frac{dM}{dt} + \mu_{32}\frac{dN}{dt}$$

$$\varepsilon_{12}\frac{dX}{dt} + \varepsilon_{22}\frac{dY}{dt} + \varepsilon_{32}\frac{dZ}{dt} + 4\pi\{\lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z')\}$$

die gleichen sein müssen. Sind die Körper zu beiden Seiten der Grenzfläche homogen, so hat das Vorhandensein der elektromoto-

rischen Kräfte keinen Einfluß auf die Bedingungen, durch welche die zu beiden Seiten herrschenden Kräfte mit einander verknüpft sind.

Da unsere Grenzbedingungen nichts andres sind, als die allgemeinen Gleichungen 7a. und 7b., transformirt für besondere Verhältnisse, so können wir jede Aussage und jede Operation, welche in einem bestimmten Bereich diese allgemeinen Gleichungen betrifft, ohne Weiteres auch über die in dem Bereich vorkommenden Grenzen heterogener Körper uns erstreckt denken, vorausgesetzt nur, daß dieses Verfahren nicht mathematische Unzulässigkeiten einschließt, vorausgesetzt also, daß sich unsre Aussagen und Operationen unmittelbar oder nach geeigneter Umformung beständig in endlichen und bestimmten Ausdrücken bewegen. Wir werden der hieraus entspringenden Bequemlichkeit des Oefteren uns bedienen. Wenn wir dabei im Allgemeinen darauf verzichten, den Beweis der Endlichkeit und Bestimmtheit aller vorkommenden Ausdrücke zu erbringen, so geschieht dies nicht, weil wir diesen Beweis für überflüssig hielten, sondern nur, weil für alle in Betracht kommenden Fälle der Beweis schon seit lange erbracht oder nach bekannten Mustern zu erbringen ist.

Von den bisherigen Abschnitten vermehrte ein jeder die Zahl der von der Theorie umfaßten Thatsachen. Im Gegensatz dazu handeln die nächstfolgenden Abschnitte von Namen und Bezeichnungen. Da durch Einführung derselben die Zahl der umfaßten Thatsachen nicht vermehrt wird, so sind sie nur ein Beiwerk der Theorie; ihr Werth besteht zum Theil in der Ermöglichung einer kürzeren Ausdrucksweise, zum Theil aber auch nur darin, daß sie die Verbindung unserer Theorie mit den älteren Anschauungen der Elektricitätslehre vermitteln.

9. Elektrische und magnetische Polarisation.

Soweit sich unsere Gleichungen auf isotrope Medien beziehen, giebt jede einzelne den im nächsten Augenblick statthabenden Werth einer einzigen der in Betracht kommenden physikalischen Größen ausgedrückt als eindeutige Function der im gegenwärtigen Augenblick vorhandenen Zustände. Diese Form der Gleichungen ist eine sehr vollkommene vom mathematischen Standpunkt aus, weil sie uns von vornherein übersehen läßt, daß die Gleichungen den Ablauf eines jeden willkürlich angeregten Prozesses eindeutig

bestimmen. Sie ist sehr vollkommen auch von einem mehr philosophischen Standpunkt aus, weil sie uns sogleich in der linken Seite der Gleichung den zukünftigen Zustand, die Wirkung, erkennen läßt, in der rechten Seite der Gleichung aber als Ursache den gegenwärtigen Zustand aufweist. Diejenigen unserer Gleichungen, welche sich auf anisotrope Medien beziehen, haben nicht diese vollkommene Form, da sie auf der linken Seite nicht die Aenderungen einer einzelnen physikalischen Größe, sondern Functionen solcher Aenderungen enthalten. Da diese Functionen lineare sind, kann allerdings durch Auflösung der Gleichungen nach den einzelnen Aenderungen die gewünschte Form hergestellt werden. Ein anderes Mittel zu gleichem Zweck, welches zugleich die Gleichungen vereinfacht, ist die Einführung der Größen, welche wir Polarisationen nennen. Wir setzen:

$$\text{9c.}\quad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mu_{11}L + \mu_{12}M + \mu_{13}N \\ \mathfrak{M} &= \mu_{12}L + \mu_{22}M + \mu_{23}N \\ \mathfrak{N} &= \mu_{13}L + \mu_{23}M + \mu_{33}N \end{aligned} \qquad \text{9d.}\quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{12}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{13}X + \varepsilon_{23}Y + \varepsilon_{33}Z \end{aligned}$$

und nennen die Resultante der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die magnetische, die Resultante der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die elektrische Polarisation. Für isotrope Medien sind Polarisationen und Kräfte gleich gerichtet und das Verhältniß ersterer zu letzteren ist die Dielektricitäts- bezw. Magnetisirungsconstante. Für den Aether fallen Polarisationen und Kräfte zusammen. Führen wir die Polarisationen in die linken Seiten unserer Gleichungen ein, so giebt uns jede Gleichung die Aenderung einer einzigen Polarisationscomponente als Folge der augenblicklich vorhandenen Kräfte. Da die Kräfte lineare Functionen der Polarisationen sind, so hat es keine Schwierigkeit, auch auf der rechten Seite der Gleichungen die Polarisationen einzuführen. Wir würden hierdurch diejenige gerichtete Größe, durch welche wir die elektromagnetischen Zustände zuerst bestimmten, die Kraft, ersetzt haben durch eine andere gerichtete Größe, die Polarisation, welche uns das gleiche, aber wenig mehr leistet, als jene. Daß die Einführung der Polarisationen und Kräfte neben einander die Gleichungen wesentlich vereinfacht, ist eine erste Andeutung dafür, daß eine vollständige Darstellung der Zustände in ponderabeln Körpern die Angabe mindestens zweier gerichteten Größen für den elektrischen und zweier gerichteten Größen für den magnetischen Zustand erfordert.

Um unsere Gleichungen weiter zu vereinfachen, setzen wir

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda_{11}(X-X') + \lambda_{12}(Y-Y') + \lambda_{13}(Z-Z) \\
9e.\quad v &= \lambda_{21}(X-X') + \lambda_{22}(Y-Y') + \lambda_{23}(Z-Z') \\
w &= \lambda_{31}(X-X') + \lambda_{32}(Y-Y') + \lambda_{33}(Z-Z').
\end{aligned}
$$

Aus Gründen welche im folgenden Abschnitt hervortreten, nennen wir $u\ v\ w$ die (elektrostatisch gemessenen) Componenten der elektrischen Strömung.

Unsere allgemeinsten Gleichungen nehmen nunmehr die Form an:

$$
\begin{aligned}
A\frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} & \qquad A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u \\
9a.\quad A\frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} & 9b.\quad A\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v \\
A\frac{d\mathfrak{N}}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} & A\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w
\end{aligned}
$$

und die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit eines beliebigen Körpers erhält durch Einführung der Polarisationen die Gestalt:

$$\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z) + \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N).$$

In diesen Aussagen kommen keine Größen mehr vor, welche sich auf einen besonderen Körper beziehen. Die Aussage, daß diese Gleichungen für alle Punkte des unendlichen Raumes erfüllt sein müssen, umfaßt alle in dies Gebiet einzureihenden Probleme, und die unendliche Mannigfaltigkeit dieser Probleme entsteht nur dadurch, daß die Constanten der linearen Relationen 9c, 9d, 9e, nämlich die ε, μ, λ, X', Y', Z' in mannigfaltiger Weise Funktionen des Raumes sein können, theils stätig, theils unstätig von Punkt zu Punkt sich verändernd.

10. Elektricität und Magnetismus.

Es sei ein System ponderabeler Körper, in welchem elektromagnetische Vorgänge sich abspielen, durch den leeren Raum abgegrenzt gegen andere Systeme. Differentiiren wir die drei Gleichungen 9b bezw. nach x, y, z und addiren, so erhalten wir für alle Punkte des Systems die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right) = -4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).$$

Wir multipliciren diese Gleichung mit dem Raumelement $d\tau$ und integriren über den Raum bis zu einer beliebigen das ponderabele

System vollständig umschließenden Fläche. Das Element dieser Fläche sei $d\omega$, die auf $d\omega$ senkrechte Richtung bilden mit den Achsen die Winkel n,x, n,y, n,z. Wir erhalten, da die u, v, w an der Fläche gleich Null sind

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega$$

$$= -4\pi\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau = -4\pi\int(u\cos n,x+v\cos n,y+w\cos n,z)\,d\omega$$

$$= 0.$$

Also:

$$10a.\quad \int\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega = 4\pi e.$$

Die neu eingeführte Größe e ist offenbar eine Funktion des elektrischen Zustandes des Systems und zwar eine solche Funktion, welche durch keine inneren oder äußeren lediglich elektrodynamischen Vorgänge vermehrt oder vermindert werden kann. Diese Unzerstörbarkeit der Größe e, welche dieselbe auch gegenüber andern als rein elektrodynamischen Vorgängen bewahrt, so lange sich diese Vorgänge auf das Innere des Systems beschränken, hat die Vermuthung wachgerufen, daß e die Menge einer in dem System enthaltenen Substanz angebe. Entsprechend dieser Anschauung nennen wir e die Menge der in dem ponderabelen System enthaltenen Elektricität. Allerdings kann e positiv oder negativ sein, während die Menge einer Substanz nothwendig positiv ist. Man hat deshalb die Hypothese vervollständigt durch die Annahme zweier Elektricitäten von entgegengesetzten Eigenschaften und hat dem e dann die Bedeutung der Differenz beider beigelegt, oder man hat Hülfe gesucht in der Annahme, es bezeichne e nur die Abweichung des wirklichen Gehaltes an Elektricität von dem normalen. Stellt aber in einer dieser oder in einer andern Form e die Menge einer Substanz dar, so muß jedes Raumelement $d\tau$ seinen bestimmten Beitrag zu dem Gesammtwerthe von e liefern. Nur vermuthungsweise können wir das Raumintegral, welches uns e liefert auf die einzelnen Raumelemente vertheilen. Eine erste mögliche und augenblicklich naheliegende Vertheilung legt dem Raumelement $d\tau$ den Elektricitätsinhalt

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau$$

bei. Die so bestimmte Elektricitätsmenge des Raumelementes wollen wir die wahre Elektricität desselben nennen; dement-

sprechend nennen wir im Innern eines Körpers den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

die wahre räumliche Dichte und an der Grenzfläche verschiedenartiger Körper den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1)\cos n,x+(\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1)\cos n,y+(\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)\cos n,z\}$$

die wahre Flächendichte der Elektricität.

Eine andere mögliche und naheliegende Vertheilung von e auf die Raumelemente erhalten wir durch die Bemerkung, daß im leeren Raume Polarisationen und Kräfte identisch sind, daß wir dementsprechend also schreiben können an Stelle von 10a.

10b.
$$\begin{aligned}4\pi e &= \int(X\cos n,x+Y\cos n,y+Z\cos n,z)\,d\omega\\ &= \int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau\end{aligned}$$

und weiterhin den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau$$

als den Beitrag betrachten, welchen das Raumelement $d\tau$ zu e liefert. Die so bestimmte Elektricitätsmenge eines Raumelementes nennen wir die freie Elektricität desselben, dementsprechend

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)$$

die freie räumliche Dichte, und an Unstätigkeitsflächen

$$\frac{1}{4\pi}\{(X_2-X_1)\cos n,x+(Y_2-Y_1)\cos n,y+(Z_2-Z_1)\cos n,z\}$$

die freie Flächendichtigkeit der Elektricität. Den Unterschied zwischen der wahren und der freien Elektricität nennen wir die gebundene Elektricität. Unsere Bezeichnungsweise schließt sich derjenigen üblichen Bezeichnungsweise an, welche ihren Ursprung aus der bisherigen Anschauung von dem Zustandekommen der elektrischen Fernwirkungen nimmt. Nach dieser Anschauung wird ein Theil der in einen Nichtleiter eingeführten fremden oder „wahren" Elektricitätsmengen durch elektrische Verschiebungen[1]) in den Molekülen des umgebenden Mittels „gebunden", während der Rest

1) Welche nicht etwa mit unseren Polarisationen identisch sind.

„frei“ bleibt, seine Fernwirkungen nach außen zu entfalten. Doch weicht auch in manchen Aussagen unsere Bezeichnungsweise von der üblichen ab. Da aber die letztere schwankend und nicht immer consequent ist, so war es mir nicht möglich, eine Bezeichnungsweise zu finden, welche nicht in irgend einem Falle gegen den Sprachgebrauch verstieß. Auch insofern schwankt die übliche Ausdrucksweise, als sie unter Elektricität schlechthin ohne Unterschied bald die wahre, bald die freie Elektricität versteht, sogar in wichtigen Aussagen.

Nach dem Vorangegangenen bezeichnen wir das durch 4π dividirte und über eine beliebige geschlossene Fläche erstreckte Integral

$$\int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)\,d\omega$$

als die von dieser Fläche umschlossene wahre Elektricität. Das gleiche Integral erstreckt über eine nichtgeschlossene Fläche wollen wir die Zahl der diese Fläche im Sinne der positiven Normalen durchschneidenden elektrischen Kraftlinien nennen. Durch diese Bezeichnung knüpfen wir an die Vorstellung Faradays an, derzufolge die Kraftlinien Linien sind, welche in isotropen homogenen Körpern überall in Richtung der herrschenden Kraft laufen und zwar in einer Fülle, welche der Größe der Kraft proportional ist. Wir haben allerdings durch unsere Bezeichnung diese Vorstellung dahin vervollständigt, bezw. präcisirt, daß die Kraftlinien in beliebigen Körpern überall in Richtung der Polarisation, nicht der Kraft, laufen sollen und haben allgemein ihre Dichte der Größe der Polarisation, nicht der Kraft proportional gesetzt. Unsere Definitionen bringen es mit sich, daß die mit 4π multiplicirte Menge der in einem beliebigen Raume enthaltenen wahren Elektricität gleich ist dem Ueberschuß der in den Raum eintretenden Kraftlinien über die austretenden. Jede Kraftlinie, welche überhaupt ein Ende findet, mündet demnach an wahrer Elektricität und wir könnten die wahren Elektricitäten definiren als die freien Enden der Kraftlinien. Ist ein gewisser Raum in der Nachbarschaft der Fläche über welche unser Integral erstreckt ist, frei von wahrer Elektricität, so ist der Werth des Integrales unabhängig von der besonderen Lage der Fläche innerhalb dieses Raumes und nur abhängig von der Lage der Grenzlinie der Fläche. Für diesen Fall bezeichnen wir dann den Werth des Integrales auch als die Zahl der die Umrißlinie durchsetzenden Kraftlinien, indem wir uns die in diesem Ausdruck bleibende Vieldeutigkeit soweit nöthig durch besondere Festsetzungen beseitigt denken.

Wir wollen weiter die Aenderung der wahren Elektricität e,

in einem beliebig begrenzten Theile unseres Systems berechnen. Es möge $d\omega$ wiederum ein Element der Grenzfläche dieses Theiles sein. Wir erhalten

$$10c. \quad \frac{de_w}{dt} = -\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau = -\int(u\cos n,x+v\cos n,y+w\cos n,z)\,d\omega.$$

Verläuft nun unsere Grenzfläche lediglich in solchen Körpern, für welche die λ gleich Null sind, so verschwinden an der Fläche immer noch die u, v, w, es ist also der Inhalt des umspannten Raumes an wahrer Elektricität constant. Aus einem Raume, welcher vollständig von Körpern umgeben ist, für welche die λ gleich Null sind, vermag demnach die wahre Elektricität durch rein elektrodynamische Vorgänge nicht zu entweichen. Aus dieser Ursache nennen und nannten wir solche Körper Nichtleiter. Geht die Grenzfläche aber ganz oder theilweise durch Körper, in welchen die λ von Null verschieden sind, so ist eine Aenderung des Elektricitätsgehaltes des umschlossenen Raumes durch rein elektrische Bewegungen möglich, aus diesem Grunde bezeichnen wir Körper der letzteren Art als Leiter. Die Unterscheidung der Körper in Leiter und Nichtleiter bezieht sich also auf die wahre Elektricität, in Hinsicht der freien Elektricität können alle Körper als Leiter betrachtet werden (Verschiebungsströme). Die Menge einer Substanz kann sich in einem Raume nur mittelst Ein- und Austrittes durch die Oberfläche hindurch verändern und zwar muß durch jedes Oberflächenelement hindurch eine bestimmte Menge der Substanz treten. Mit der Thatsache, daß durch jede geschlossene Oberfläche in der Zeiteinheit die durch unser Integral angegebene Elektricitätsmenge tritt, ist die Annahme vereinbar, daß durch die Flächeneinheit jedes Oberflächenelementes die Menge

$$u\cos n,x + v\cos n,y + w\cos n,z$$

trete. Entsprechend dieser Annahme nennen und nannten wir u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung und das über eine nicht geschlossene Oberfläche genommene Integral

$$\int(u\cos n,x + v\cos n,y + w\cos n,z)\,d\omega$$

den diese Fläche durchfließenden elektrischen Strom. Es muß indeß hervorgehoben werden, daß selbst wenn die Stofflichkeit der Elektricität zugegeben ist, die obige specielle Bestimmung ihrer Strömung in Leitern eine weitere Hypothese einschließt. Dem gefundenen Systeme der Bewegung kann ein willkürliches in jedem Augenblicke geschlossenes Stromsystem überdeckt werden, ohne

daß dadurch die Ab- oder Zunahme der Elektricität in irgend einem Punkte sich änderte.

Ist ein Theil unseres Systemes durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unelektrischen Zustand in seinen gegenwärtigen gelangt, oder kann er durch lediglich elektromagnetische Veränderungen in den unelektrischen Zustand zurückkehren, so ist in allen Nichtleitern dieses Theiles die wahre Elektricität gleich Null. Für solche Theile eines Systemes treten dann also zu den allgemeinen Gleichungen noch die folgenden, mit ihnen verträglichen als Beschränkungen der zulässigen Anfangszustände hinzu:

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{ds} = 0$$

für das Innere der Nichtleiter;

$$(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1)\cos n,x + (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1)\cos n,y + (\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1)\cos n,s = 0$$

für die Grenze zweier heterogener Nichtleiter.

Ganz analoge Betrachtungen wie in Hinsicht der elektrischen, lassen sich anstellen in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen. Indem wir auf diese eingehen und dabei die Gleichungen 9a. benutzen, nennen wir für das Innere eines Körpers

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{ds}\right)$$

die wahre räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper den Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi}\left\{(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\cos n,x + (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1)\cos n,y + (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)\cos n,s\right\}$$

die wahre Flächendichtigkeit des Magnetismus und das über einen bestimmten Theil des Raumes genommene Integral dieser Größen den in diesem Theil enthaltenen wahren Magnetismus. Das über eine nicht geschlossene Fläche genommene Integral

$$\int(\mathfrak{L}\cos n,x + \mathfrak{M}\cos n,y + \mathfrak{N}\cos n,s)\,d\omega$$

nennen wir die Zahl der durch diese Fläche, bezw. den Umfang dieser Fläche tretenden magnetischen Kraftlinien. Ferner nennen wir für das Innere eines Körpers

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{ds}\right)$$

die freie räumliche Dichte, an der Grenze zweier Körper

$$\frac{1}{4\pi}\{(L_2-L_1)\cos n,x+(M_2-M_1)\cos n,y+(N_2-N_1)\cos n,z\}$$

die freie Flächendichtigkeit des Magnetismus. Die Unterschiede zwischen Leitern und Nichtleitern fallen hier fort, da die Gleichungen 9a. keine den $u\,v\,w$ der Gleichungen 9b. entsprechende Glieder enthalten. In Hinsicht des freien Magnetismus können alle Körper als Leiter aufgefaßt werden.

Ist ein System oder ein Theil eines solchen durch lediglich elektromagnetische Vorgänge aus dem unmagnetischen Zustand hervorgegangen, oder kann es durch solche Vorgänge in denselben zurücksinken, so gelten für dies System oder diesen Theil des Systems die Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}=0$$

für das Innere der Körper und

$$(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cos n,x+(\mathfrak{M}_2-\mathfrak{M}_1)\cos n,y+(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)\cos n,z=0$$

für die Grenzflächen heterogener Körper, welche Gleichungen zu den allgemeinen als mit diesen verträgliche Bestimmungen über die möglichen Anfangszustände hinzutreten.

11. Erhaltung der Energie.

Es bezeichne S die elektromagnetische Energie eines Raumes τ, welcher durch die Oberfläche ω begrenzt wird. Wir berechnen die Aenderung von S, indem wir die Gleichungen 9a. und 9b. multipliciren sämmtlich mit $\frac{1}{4\pi A}d\tau$, alsdann der Reihe nach mit L, M, N, X, Y, Z, Alles addiren und integriren über den Raum τ. Wir erhalten:

11a.
$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\int\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\}dw$$
$$-\int(uX+vY+wZ)\,d\tau.$$

Erstrecken wir den Raum τ über ein vollständiges elektromagnetisches System, d. h. bis zu einer Fläche an welcher die Kräfte verschwinden, so wird unsere Gleichung

$$\frac{dS}{dt}=-\int(uX+vY+wZ)\,d\tau.$$

Die Erhaltung der Energie verlangt demnach, daß in jedem System, welches der Einwirkung von außen nicht unterliegt, in der Zeit-

einheit ein Energiebetrag von der Größe des rechts stehenden Integrals in anderer als elektromagnetischer Form auftritt. Die Erfahrung genügt dieser Forderung, sie belehrt uns weitergehend, daß jedes einzelne Raumelement $d\tau$ zum Gesammtbetrage der umgesetzten Energie den Beitrag $(uX+vY+wZ)\,d\tau$ liefert und zeigt uns, in welchen neuen Formen diese Energie auftritt. Allerdings leistet dieses die Erfahrung genau gesprochen nicht allgemein, sondern einstweilen nur in Hinsicht der folgenden besonderen Fälle. Im Innern eines homogenen isotropen Leiters nimmt die in der Zeiteinheit und Volumeinheit auftretenden Energiemenge nach der Theorie sowohl als nach der Erfahrung die Formen an:

$$\lambda(X^2+Y^2+Z^2) = \frac{1}{\lambda}(u^2+v^2+w^2),$$

sie ist stets positiv und entspricht einer Wärmeentwickelung — der Joule'schen Wärme. An der Grenze zweier homogenen isotropen Körper nimmt in der Uebergangsschicht die in der Volumeinheit auftretende Energiemenge die Form an $uX'+vY'+wZ'$, eine Integration über die ganze Dicke der Uebergangsschicht ergiebt daraus für die in der Flächeneinheit der Grenze auftretende Energiemenge den Betrag

$$(u\cos n,x+v\cos n,y+w\cos n,z)\,.\,\varphi_{1,2}$$

welchen Ausdruck ebenfalls die Erfahrung bestätigt. Es kann dieser Ausdruck positiv oder negativ sein, er kann einem Verschwinden oder Entstehen fremder Energieformen entsprechen. Entweder ist die umgesetzte fremde Energie hier gleichfalls Wärme — Peltier'sche Wärme — in diesem Falle bezeichnen wir die thätigen elektromotorischen Kräfte als thermoelektrische. Oder es wird neben Wärme auch chemische Energie umgesetzt, in diesem Falle bezeichnen wir die Kräfte als elektrochemische. Fassen wir nunmehr einen beliebig begrenzten Theil unseres Systems ins Auge und berechnen die Zunahme der gesammten Energie dieses Theiles, also der Größe

$$\frac{dS}{dt}+\int(uX+vY+wZ)\,d\tau,$$

so finden wir nach dem Vorigen diese Zunahme gleich einem über die Oberfläche des Raumes genommenem Integral. Die Aenderung des Energievorrathes dieses und damit eines jeden Raumes wird also richtig berechnet, wenn wir annehmen, die Energie trete nach Art einer Substanz durch die Oberfläche ein, und zwar in solcher

Fülle, daß durch die Flächeneinheit einer jeden Oberfläche die Menge

$$\frac{1}{4\pi A}\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y+(MX-LY)\cos n,z\}$$

tritt. Eine geometrische Discussion dieses Ausdrucks ergiebt, daß unsere Annahme identisch ist mit der Aussage, die Energie bewege sich überall in einer Richtung, welche auf den Richtungen der magnetischen und der elektrischen Kraft senkrecht steht und in solcher Fülle, daß in dieser Richtung in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eine Menge trete gleich dem Produkt der beiden Kräfte, dem Sinus des eingeschlossenen Winkels und dem Faktor $\frac{1}{4\pi A}$. Es ist dies die höchst bemerkenswerthe Theorie des Herrn Poynting über die Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde[1]). Bei Beurtheilung der physikalischen Bedeutung derselben muß erstens hervorgehoben werden, daß die Zerlegung unseres Oberflächenintegrales in seine Elemente eine hypothetische war und daß das Ergebniß derselben nicht immer ein wahrscheinliches ist. Ruht ein Magnet dauernd neben einem elektrisirten Körper, so muß zufolge dieses Resultats die Energie der Nachbarschaft sich in beständiger Bewegung befinden, allerdings in geschlossenen Bahnen. Ein größeres Bedenken scheint mir in der Frage zu liegen, wie weit bei unsern gegenwärtigen Kenntnissen von der Energie die Lokalisation derselben und ihre Verfolgung von Punkt zu Punkt überhaupt Sinn und Bedeutung hat. Derartige Betrachtungen sind noch nicht durchgeführt bei den einfachsten Energieumsätzen der gewöhnlichen Mechanik; es ist daher die Frage noch unerledigt, ob und in welchem Umfange der Begriff der Energie eine solche Behandlungsweise zuläßt.

12. Ponderomotorische Kräfte.

Die mechanischen Kräfte, welche wir im elektromagnetisch gestörten Felde zwischen den ponderabelen Körpern wahrnehmen, sehen wir an als die Resultanten mechanischer Druckkräfte, welche durch das Vorhandensein der elektromagnetischen Störungen im Aether und in den übrigen Körpern wachgerufen werden. Zufolge dieser Anschauung sind die auf einen ponderabeln Körper wirkenden mechanischen Kräfte vollständig bestimmt durch den elektromagnetischen Zustand seiner unmittelbaren Umgebung, ohne daß es darauf ankäme, welche Ursachen weiterhin diesen Zustand her-

1) J. H. Poynting, Phil. Transactions 1884. II. p. 343.

vorgerufen haben. Wir setzen ferner voraus, daß die unterstellten Druckkräfte von solcher Art sind, daß sie keine Resultanten ergeben, welche das Innere des Aethers selbst in Bewegung zu setzen streben. Ohne diese Voraussetzung wäre unser System nothwendig unrichtig oder doch unvollständig, denn ohne sie könnte man von elektromagnetischen Kräften im ruhenden Aether allgemein gar nicht reden. Eine nothwendige Folge dieser Voraussetzung ist es, daß die an den ponderabeln Körpern zu beobachtenden mechanischen Kräfte dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen.

Es fragt sich nun ob sich Druckkräfte angeben lassen, welche diesen Anschauungen entsprechen und geeignet sind, die wirklich beobachteten Resultanten zu ergeben. Maxwell und in allgemeinerer Form von Helmholtz haben Formen der Druckkräfte angegeben, welche allen Ansprüchen genügen für statische und stationäre Zustände. Aber für den allgemeinen veränderlichen Zustand als gültig angenommen würden diese Drucke das Innere des Aethers selbst in Bewegung setzen. Wir nehmen deshalb an, daß die vollständigen Formen noch nicht gefunden seien, vermeiden es, bestimmte Angaben über die Größe der Drucke zu machen und ziehen es vor, die ponderomotorischen Kräfte abzuleiten mit Hülfe der Voraussetzungen, welche wir bereits angegeben haben, mit Hülfe des Prinzips von der Erhaltung der Energie und mit Hülfe der folgenden Erfahrungsthatsache: Werden die ponderabelen Körper eines elektrisch oder magnetisch erregten Systems, welches dem statischen Zustand stets unendlich nahe bleibt, gegen einander bewegt und gleichzeitig die in jedem Element der Körper befindliche Menge der wahren Elektricität und des wahren Magnetismus als unveränderlich und an dem Elemente haftend behandelt, so findet die zur Bewegung der Körper verbrauchte mechanische Arbeit ihre einzige Compensation in der Vermehrung der elektromagnetischen Energie des Systems, ist also dieser gleich.

Es bleibt die Frage offen, ob sich überhaupt Formen der Druckkräfte angeben lassen, welche den von uns gestellten Anforderungen allgemein und genau genügen. Sollte dies nicht der Fall sein, so enthält die Gesammtheit unserer Voraussetzungen einen innern Widerspruch, welche durch eine Correction an einer oder an mehreren dieser Voraussetzungen gehoben werden muß. Die erforderlichen Verbesserungen sind aber jedenfalls von solcher Art, daß sie in keiner der bisher beobachteten Erscheinungen ihre Wirkung geltend machen. Im Uebrigen ist hervorzuheben, daß wenn sich hier eine Lücke in unserer Theorie findet, dies nicht eine

Lücke in den Grundlagen, sondern eine solche in den Ausläufern der Theorie ist. Denn die erregten mechanischen Kräfte sind von unsern Standpunkte aus eine secundäre Folgeerscheinung der elektromagnetischen Kräfte; wir könnten die Theorie der letzteren behandeln, ohne die ersteren auch nur zu erwähnen, wie wir denn ja auch alle übrigen minder wichtigen Folgeerscheinungen des elektromagnetischen Zustandes von der Besprechung ausgeschlossen haben.

B. Ableitung der Erscheinungen aus den Grundgleichungen.

Wir theilen die durch unsre Gleichungen dargestellten Erscheinungen ein in statische, stationäre und dynamische. Damit eine Erscheinung zu den statischen oder stationären rechne, ist nöthig, daß sie keine Aenderungen der elektrischen und magnetischen Kräfte mit der Zeit bedinge, daß also die linken Seiten der Gleichungen 9a und 9b verschwinden. Damit eine Erscheinung weitergehend als eine statische bezeichnet werde, ist außerdem nöthig, daß sie überhaupt nicht von Aenderungen in der Zeit begleitet werde, daß also insbesondere durch sie kein dauernder Energieumsatz in andre Formen bedingt werde. Hierfür ist die hinreichende und nothwendige Bedingung, daß auch die Größen u, v, w in den Gleichungen 9a und 9b verschwinden.

Statische Erscheinungen.

Wenn in den Gleichungen 9a und 9b die linken Seiten und die u, v, w verschwinden, so zerfällt das System in zwei von einander unabhängige Systeme, von welchen das eine nur die elektrischen, das andere nur die magnetischen Kräfte enthält. Wir erhalten so zwei Gruppen von Problemen, von denen die eine als Elektrostatik, die andere als Lehre vom ruhenden Magnetismus bezeichnet zu werden pflegt.

13. Elektrostatik.

Vom Auftreten elektromotorischer Kräfte sehen wir in diesem Abschnitt ab, weil, wenn dieselben das Zustandekommen des statischen Zustandes überhaupt gestatten, ihre Wirkung zu schwach

ist, um in den interessirenden Problemen in Betracht zu kommen. Hiernach müssen alsdann in den Leitern, woselbst die λ nicht verschwinden, die Kräfte $X\,Y\,Z$ verschwinden. In den Nichtleitern nehmen die Gleichungen 9a die Form an

$$13a. \qquad \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0.$$

Die Kräfte besitzen demnach ein Potential φ, dessen negativen Differentialquotienten sie gleich gesetzt werden können. Da die Kräfte überall endlich sind, ist φ überall stetig, es kann auch durch die Leiter hindurch fortgesetzt werden und ist alsdann in diesen als constant zu betrachten. An einer Grenzfläche setzen sich die zur Grenzfläche tangentialen Differentialquotienten von φ stetig durch die Fläche fort. Bezeichnet im Uebrigen e_f die räumliche Dichte der freien Elektricität, so genügt nach Abschnitt 10 das Potential φ überall im Raume der Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi e_f$, welche im freien Aether die Form $\Delta\varphi = 0$ annimmt, und deren sinngemäße Umformung für die Trennungsfläche heterogener Körper daselbst die Bedingung ergiebt

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -4\pi e'_f,$$

unter e'_f die Flächendichtigkeit der freien Elektricität verstanden. Aus der Gesammtheit dieser Bedingungen folgt für φ der bis auf eine willkürlich bleibende Constante eindeutig bestimmte Werth: $\varphi = \int \frac{e_f}{r} d\tau$, das Integral über den ganzen Raum, unter sinngemäßer Berücksichtigung der Grenzflächen erstreckt. Bei gleicher Vertheilung des Potentials und der Kräfte in verschiedenen Nichtleitern sind also die freien Elektricitäten die gleichen. Die entsprechenden Mengen der wahren Elektricitäten aber sind verschieden und stehen für das Innere zweier homogenen Nichtleiter im Verhältniß der Dielektricitätsconstanten. Die Bedingung dafür, daß die Dichtigkeit der wahren Elektricität im Innern der Nichtleiter gegebene Werthe e_w habe, ist, wenn wir uns für den Augenblick auf isotrope Körper beschränken:

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\varepsilon\frac{d\varphi}{dz}\right) = -4\pi e_w,$$

welche an der Grenze zweier isotroper Körper die Form annimmt

$$\varepsilon_2\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \varepsilon_1\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -4\pi e'_w,$$

unter e'_w die Flächendichte der wahren Elektricität verstanden.

Werfen wir noch unser Augenmerk auf den Energievorrath eines elektrostatischen Systemes. Wir erhalten denselben der Reihe nach in den Formen:

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{X}X+\mathfrak{Y}Y+\mathfrak{Z}Z)\,d\tau = -\frac{1}{8\pi}\int\left(\mathfrak{X}\frac{d\varphi}{dx}+\mathfrak{Y}\frac{d\varphi}{dy}+\mathfrak{Z}\frac{d\varphi}{dz}\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\varphi\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \tfrac{1}{2}\int\varphi e_w\,d\tau = \tfrac{1}{2}\int\int\frac{e_w e_l}{r}\,d\tau\,d\tau.$$

Die Integrationen sind dabei über allen Raum erstreckt gedacht, in welchem elektrische Störungen vorkommen, also bis zu Grenzen, an welchen die Störungen verschwinden, und die sinngemäße Umformung der Integrale an den Grenzflächen ist stillschweigend unterstellt. Die Zunahme, welche ein jeder dieser Ausdrücke erleidet, wenn bei eintretender Bewegung der ponderabelen Körper die an den Körperelementen haftenden Mengen der wahren Elektricität constant bleiben, ist nach Abschnitt 12 gleich der von den mechanischen Kräften bei dieser Bewegung geleisteten Arbeit. Besteht also unser System aus zwei Elektricitätsmengen E_1 und E_2, welche im Aether in einem gegen ihre eigenen Dimensionen sehr großen Abstand R von einander sich befinden, so vermindert sich bei Vermehrung des Abstandes beider um dR die elektrische Energie des Raumes um $\frac{1}{2}(E_1E_2+E_2E_1)\frac{dR}{R^2}$, der Ausdruck $\frac{E_1E_2}{R^2}$ stellt also die mechanische Kraft dar, mit welcher beide Elektricitäten sich von einander zu entfernen trachten. Das Coulombsche Gesetz, welches in den älteren Theorien den Ausgangspunkt aller Betrachtung bildete, erscheint jetzt als ein entferntes Endresultat.

In Hinsicht der allgemeinen Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte müssen wir uns hier begnügen, darauf hinzuweisen, daß die letzten beiden für die Energie des Systems erlangten Ausdrücke dieselben sind, deren Aenderung auch nach der gewöhnlichen Elektrostatik die bei der Bewegung der Körper geleistete Arbeit ergiebt, und daraus zu folgern, daß wir aus den Aenderungen dieser Ausdrücke dieselben Kräfte berechnen werden, von welchen die gewöhnliche Elektrostatik ausgeht und welche an der Erfahrung geprüft sind. Insbesondere wird sich zeigen lassen,

daß auf ein Körperelement, welches die Menge c an wahrer Elektricität enthält, die mechanischen Kraftcomponenten eX, eY, eZ einwirken. Wir kommen dadurch auf die Aussagen zurück, durch deren Hülfe wir zuerst die elektrischen Kräfte einführten.

14. Ruhender Magnetismus.

Die Gleichungen, welche die Componenten ruhender magnetischer Kräfte verbinden, sind die gleichen, welche zwischen den Componenten ruhender elektrischer Kräfte obwalten. Alle Bemerkungen des vorigen Abschnittes lassen sich daher hier unter entsprechender Aenderung der Bezeichnungen wiederholen. Wenn gleichwohl die in diesem Gebiet interessirenden Probleme sich auch in mathematischer Beziehung von denen der Elektrostatik unterscheiden, so liegt das vorzugsweise an folgenden Gründen:

1) Es fällt hier die Klasse der als Leiter zu bezeichnenden Körper fort.

2) In allen Körpern, mit Ausnahme solcher, welche permanenten oder remanenten Magnetismus zeigen, kommt wahrer Magnetismus nicht vor. Im Innern derartiger Körper, sofern sie isotrop sind, gilt daher für das magnetische Potential ψ nothwendig stets die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{d\psi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{d\psi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{d\psi}{dz}\right)=0$$

welche an der Grenze derartiger Körper übergeht in die Gleichung

$$\mu_2\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_2-\mu_1\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_1=0.$$

Etwas verwickeltere, aber leicht angebbare Gleichungen gelten für das Innere und die Grenzen krystallinischer Körper und kommen in Betracht, wenn wir die Erscheinungen der sogenannten Magnekrystallkraft behandeln wollen.

3) Während die Dielektricitätsconstante aller bekannten Körper größer als Eins ist, ist die Magnetisirungsconstante für viele Körper auch kleiner als Eins. Solche Körper bezeichnen wir als diamagnetische, im Gegensatz dazu die übrigen als paramagnetische. Die freie magnetische Dichte an der Oberfläche eines an den leeren Raum grenzenden isotropen Körpers ist gleich dem $(1-\mu)$ fachen der im Innern des Körpers normal zur Oberfläche gerichteten Kraft.

Bei gleichem Sinn der Kraft ist also das Vorzeichen der Belegung eines diamagnetischen Körpers demjenigen der Belegung eines paramagnetischen Körpers entgegengesetzt.

Die Lehre vom ruhenden Magnetismus gewinnt ferner ein besonderes Ansehen durch den Umstand, daß gerade die in Hinsicht der magnetischen Erscheinungen wichtigsten Körper, Eisen- und Stahlsorten, sich der Theorie nur in ganz roher Annäherung fügen. Diese Körper zeigen permanenten und remanenten Magnetismus, es ist also in ihnen die Polarisation des ponderabelen Stoffes theilweise unabhängig von der herrschenden Kraft, und also der magnetische Zustand nicht vollständig durch eine einzige Richtungsgröße zu definiren. Da außerdem die Beziehungen zwischen der Kraft und den durch sie bewirkten Störungen keine linearen sind, so treten diese Körper aus doppeltem Grunde aus dem Rahmen der gegenwärtigen Theorie heraus. Um sie nicht ganz von der Betrachtung ausschließen zu müssen, ersetzen wir sie durch den jedesmal nächststehenden zweier Idealkörper, des vollkommen weichen Eisens oder des vollkommen harten Stahles. Ersteres definiren wir als einen Körper, welcher unsern Gleichungen folgt, und für welchen μ einen sehr großen Werth hat. Indem wir diesen Werth je nach der Natur des behandelten Problems verschieden wählen, erzielen wir eine weitere Annäherung. Den vollkommen harten Stahl definiren wir als einen unsern Gleichungen folgenden Körper von den Magnetisirungsconstanten Eins, in dessen Innern wahrer Magnetismus vorkommen kann in beliebiger Vertheilung, jedoch so, daß die Gesammtmenge des in jedem Stahlstück vorhandenen wahren Magnetismus wiederum von Null nicht abweicht.

Stationäre Zustände.

Für den Zustand der stationären Bewegungen gelten in den Nichtleitern die gleichen Bedingungen, wie für den statischen Zustand; in den Leitern, welche wir in diesem Abschnitt der Einfachheit halber als isotrop vorausetzen, nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen 9a, 9b, 9e die Form an:

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0 \qquad \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = 4\pi A u$$

$$\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0 \qquad 15a. \qquad \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} = 4\pi A v \qquad 15b.$$

$$\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0 \qquad \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} = 4\pi A w$$

15c. $$u = \lambda(X - X'), \quad v = \lambda(Y - Y'), \quad w = \lambda(Z - Z').$$

Differenziren wir die Gleichungen 15b beziehlich nach x, y, z und addiren sie, so folgt

15d. $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

welche Gleichung an Flächen, an welchen sich die Strömungen sprungweise ändern, die Form annimmt:

15e. $$(u_2 - u_1)\cos n, x + (v_2 - v_1)\cos n, y + (w_2 - w_1)\cos n, z = 0.$$

Fügen wir die Gleichungen 15d und 15e den Gleichungen 15a und 15c hinzu, so erhalten wir ein System, welches lediglich die elektrischen Kräfte enthält. Dasselbe kann ohne Rücksicht auf die magnetischen Kräfte behandelt werden und giebt uns die Theorie der Stromvertheilung. Sind die Componenten u, v, w der Strömung gefunden, so ergiebt uns weiter die Behandlung der Gleichungen 15b die von diesen Strömungen ausgeübten magnetischen Kräfte.

15. Vertheilung stationärer Ströme.

Es erhellt aus den Gleichungen 15a, daß die Kräfte auch im Innern der durchströmten Leiter noch als die negativen Differentialquotien einer Function φ, des Potentials, dargestellt werden können, welches durch die Bedingung bestimmt ist, daß überall sein muß:

15f. $$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\lambda\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda\frac{d\varphi}{dz}\right) = -\frac{d}{dx}(\lambda X') - \frac{d}{dy}(\lambda Y') - \frac{d}{dz}(\lambda Z').$$

An der Grenzfläche zweier heterogener Leiter nimmt diese Gleichung die Form von

15g. $$\lambda_2\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 - \lambda_1\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = -(\lambda_2 X_2' - \lambda_1 X_1')\cos n, x - (\lambda_2 Y_2' - \lambda_1 Y_1')\cos n, y - (\lambda_2 Z_2' - \lambda_1 Z_1')\cos n, z,$$

also an der Grenze eines Leiters gegen einen Nichtleiter die Form:

$$\frac{d\varphi}{dn} = -X' \cos n, x - Y' \cos n, y - Z' \cos n, z. \qquad 15h.$$

Zu diesen Grenzbedingungen kommt noch in solchen Grenzflächen, in welchen die elektromotorischen Kräfte unendlich werden, nach Abschnitt 8 die weitere Bedingung hinzu:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int (X \cos n, x + Y \cos n, y + Z \cos n, z)\, dn \\ &= \int (X' \cos n, x + Y' \cos n, y + Z' \cos n, z)\, dn \\ &= \varphi_{1,2}. \end{aligned} \qquad 15i.$$

Die Gesammtheit dieser Bedingungen bestimmt φ eindeutig für das ganze Innere der Leiter bis auf eine Constante, welche von den Zuständen außerhalb der Leiter abhängig bleibt. Für homogene Leiter nehmen die Gleichungen 15f—15i die einfacheren Gestalten an:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \text{ für das Innere der Leiter,} \\ \lambda_1 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 &= \lambda_2 \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 \text{ für die Grenze zweier Leiter,} \\ \frac{d\varphi}{dn} &= 0 \text{ für die Grenze gegen einen Nichtleiter,} \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \varphi_{1,2} \text{ an einer elektromotorisch wirksamen Grenzfläche.} \end{aligned} \qquad 15k.$$

Die so erlangten Gleichungen gestatten die unmittelbare Anwendung auf Probleme der Stromvertheilung in dreifach ausgedehnten Körpern. Ihre Anwendung auf die Strömung in flächenförmig ausgedehnten Leitern oder auf lineare Stromträger ist leicht und ergiebt die Definition des Widerstands, das Ohmsche Gesetz für geschlossene Strombahnen, die Kirchoffschen Sätze für beliebige Verzweigungen, sowie die übrigen allgemeinen Sätze über die Vertheilung stationärer Ströme.

16. Magnetische Kräfte stationärer Ströme.

Um zunächst überall aus den nunmehr bekannten Stromkomponenten u, v, w die durch sie hervorgerufenen Kräfte L, M, N zu bestimmen, führen wir als Hülfsgrößen die sogenannten Componenten des Vectropotentiales ein, indem wir setzen:

$$U = \int \frac{u}{r} d\tau, \quad V = \int \frac{v}{r} d\tau, \quad W = \int \frac{w}{r} d\tau.$$

$$L = 0,\ M = 0,\ N = Aidx\frac{d\frac{1}{r}}{dy'} = -\frac{Aidx}{r^2}\cdot\frac{y'}{r},$$

welche Formeln der Ampèreschen Regel und dem Biot-Savart'schen Gesetz Ausdruck verleihen.

Die gefundenen Werthe der Kräfte müssen zufolge der Gleichungen 15b überall da, wo die u, v, w verschwinden, also überall außerhalb der durchströmten Leiter ein Potential ψ besitzen, dessen negativen Differentialquotienten wir sie gleich setzen können. Rühren die Kräfte nur her von einer einzigen geschlossenen linearen Strombahn, so kann dies Potential dargestellt werden in der Form

$$\psi = -Ai\int\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\omega + \text{constans} \qquad 16b.$$

worin $d\omega$ das Element einer beliebigen durch die Strombahn gelegten Fläche, n die Normale dieser Fläche bedeutet und die Integration über den ganzen von der Strombahn begrenzten Bereich der Fläche zu erstrecken ist. Als positiv ist dabei diejenige Seite der Fläche gerechnet, von welcher aus gesehen der positiv gerechnete Strom im Sinne der Drehung des Uhrzeigers fließt. Durch bekannte Integraltransformationen werden nämlich die negativen Differentialquotienten des angegebenen Ausdrucks überall in die für L, M, N gefundenen Formen gebracht, diese Differentialquotienten sind also überall außer in der Strombahn selbst endlich und stätig, und wenn auch das in ψ enthaltene Integral an der Fläche ω unstätig wird, so kann dem ganzen ψ nichtsdestoweniger die erforderliche Stätigkeit verliehen werden, indem wir die darin enthaltene Constante als unendlich vieldeutig betrachten und jedesmal einen um $4\pi Ai$ geänderten Werth derselben benutzen, sobald wir die Fläche ω durchschreiten. Das Potential wird dadurch selbst unendlich vieldeutig und ändert sich um $4\pi Ai$, sobald wir nach einmaliger Umkreisung der Strombahn zum Ausgangspunkte zurückkehren.

Dem Integralausdruck, welcher in ψ vorkommt. können verschiedene Deutungen untergelegt werden. Er kann zunächst betrachtet werden als das Potential einer magnetischen Doppelschicht. Durch Verfolg dieser Auffassung gelangen wir zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus. Es kann andererseits mit Gauss der Werth jenes Integrals in einem bestimmten Punkte gedeutet werden als der sphärische Winkel, unter welchem von dem Punkte aus gesehen die Strombahn erscheint. Von hieraus ergiebt uns

ein leichter Uebergang die Richtigkeit der Aussage: es stelle jenes Integral für einen Punkt die Zahl der Kraftlinien dar, welche ein in dem Punkte aufgestellter Einheitspol durch die Strombahn sendet. Das ganze Potential einschließlich seiner Vieldeutigkeit kann hieran anknüpfend gedeutet werden durch die Aussage: es sei die Differenz seiner Werthe in zwei Punkten gleich der mit Ai multiplicirten Zahl der Kraftlinien, welche in bestimmter Richtung die Strombahn durchschneiden, wenn ein Einheitspol auf beliebigem Wege aus dem einen Punkt in der andern übergeführt wird.

Die letztgenannte Deutung ist von unserm Standpunkte aus die angemessenste, auch erlaubt sie uns unter Berufung auf die Lehren der Abschnitte 12 und 14 die folgenden Schlüsse an einander zu reihen. Erstens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen Magnetpol oder auch ein System unveränderlicher Magnetismen in der Nähe eines constant gehaltenen linearen Stromes zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien des Magnetpoles oder des magnetischen Systemes, welche bei der Bewegung die Strombahn in bestimmter Richtung durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke und der Constanten A. Zweitens: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen constant gehaltenen Strom in einem beliebigen magnetischen Felde zu verschieben, ist gleich der Zahl der Kraftlinien, welche bei der Verschiebung von der Strombahn durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stärke des Stromes und der Constanten A. Endlich also im Besonderen: Die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen constant gehaltenen Strom 1 in der Nähe eines constant gehaltenen Stromes 2 zu verschieben, ist gleich der Zahl der magnetischen Kraftlinien der Strombahn 2, welche von der Strombahn 1 bei der Bewegung durchschnitten werden, multiplicirt mit der Stromstärke in 1 und der Constanten A. Mit dem gleichen Rechte ist diese Arbeit auch gleich der Zahl der Kraftlinien des Stromes 1, welche bei der Verschiebung die Strombahn 2 durchschneiden, multiplicirt mit der Stromstärke in 2 und der Constanten A. Beide Aussagen führen zu dem gleichen Resultat; wir beweisen dies, indem wir das Produkt aus der Intensität der einen Strombahn und der Zahl der sie durchsetzenden Kraftlinien der andern Strombahn durch einen in Hinsicht beider symmetrischen Ausdruck darstellen. Beziehen sich nämlich die Bezeichnungen i, ds, auf die Strombahn 1, i', ds', U', V', W', L', M', N' auf die Strombahn 2, so ist die mit Ai multiplicirte Zahl der Kraftlinien von 2, welche 1 durchsetzen gleich:

$$Ai\int(L'\cos n,x+M'\cos n,y+N'\cos n,z)\,d\omega$$

$$=A^2i\int\Big\{\Big(\frac{dV'}{dz}-\frac{dW'}{dy}\Big)\cos n,x+\Big(\frac{dW'}{dx}-\frac{dU'}{dz}\Big)\cos n,y+\Big(\frac{dU'}{dy}-\frac{dV'}{dx}\Big)\cos n,z\Big\}d\omega$$

$$=-A^2i\int(U'\cos s,x+V'\cos s,y+W'\cos s,z)\,ds$$

$$=-A^2ii'\int\int\frac{\cos s,x\cos s',x+\cos s,y\cos s',y+\cos s,z\cos s',z}{r}\,ds\,ds'$$

$$=-A^2ii'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

worin ε den Winkel bezeichnet, welchen die beiden Stromelemente im Raum mit einander bilden. Der erlangte Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf beide Strombahnen. Man weiß, daß in der That die Aenderungen dieses Ausdrucks, des mit A^2ii' multiplicirten Neumannschen Potentiales der einen Strombahn auf die andre die zur gegenseitigen Verschiebung geschlossener Ströme erforderliche Arbeit und daraus die zwischen den ruhenden Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte ergeben. Man weiß auch, daß diese Aussage Alles enthält, was man in Hinsicht der zwischen Strömen auftretenden ponderomotorischen Kräfte mit Sicherheit behaupten kann.

Wir berechnen noch die magnetische Energie eines Raumes, in welchem die stationären Stromkomponenten $u\ v\ w$ und die unveränderlichen magnetischen Dichten m vertheilt sind, unter der beschränkenden Voraussetzung, daß sich magnetisirbare Körper in dem Raume nicht vorfinden. Bezeichnen wir mit ψ das Potential der Magnetismen m, so erhalten wir die Energie successive in den Formen:

$$\frac{1}{8\pi}\int(L^2+M^2+N^2)\,d\tau = \qquad 16c.$$

$$= \frac{A}{8\pi}\int\Big\{L\Big(\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dx}\Big)+M\Big(\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dy}\Big)$$
$$+N\Big(\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}-\frac{1}{A}\frac{d\psi}{dz}\Big)\Big\}d\tau$$

$$= \frac{A}{8\pi}\int\Big\{U\Big(\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}\Big)+V\Big(\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}\Big)+W\Big(\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}\Big)\Big\}d\tau$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int\psi\Big(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\Big)d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}A^2\int(Uu+Vv+Ww)d\tau+\tfrac{1}{2}\int\psi m d\tau,$$

oder in Anwendung auf lineare Ströme

$$= \tfrac{1}{2}A^2\int\int\frac{ii'\cos\varepsilon}{r}dsds'+\tfrac{1}{2}\int\psi m d\tau,$$

wobei in dem ersten Theil der letzten Form die Integration sowohl nach ds als nach ds' über alle vorhandenen Ströme auszudehnen ist. Es erhellt aus dieser letzten Form, daß die Verschiebung unveränderlicher Magnete und unveränderlicher Ströme gegeneinander die magnetische Energie des Raumes nicht verändert. Es findet daher auch die mechanische Arbeit, welche bei solcher Verschiebung verbraucht wird, nicht in der Aenderung der magnetischen Energie des Raumes ihre Compensation, wie es bei der Verschiebung unveränderlicher Magnete gegen einander der Fall ist, sondern es muß von dem Verbleib der aufgewandten Arbeitsmenge anderweitig Rechenschaft abgelegt werden. Es erhellt ferner aus der gleichen Form, daß die Verschiebung constant gehaltener Ströme gegen einander allerdings eine Aenderung der Energie des Raumes bedingt, welche dem absoluten Werth nach der aufgewandten mechanischen Arbeit gleich ist. Aber die Berücksichtigung der Vorzeichen ergiebt, daß diese Aenderung nicht in solchem Sinne erfolgt, daß dieselbe als Compensation der verlorenen mechanischen Energie könnte angesehen werden, sondern in entgegengesetztem Sinne. Es ist also in diesem Falle noch Rechenschaft abzulegen über den Verbleib des Doppelten der Arbeitsmenge, welche die mechanischen Kräfte bei der relativen Verschiebung der Strombahnen leisten. Diese Rechenschaft wird am Ende des folgenden Abschnittes abgelegt werden.

Dynamische Erscheinungen.

Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit der möglichen Formen des veränderlichen Zustandes sind bisher verhältnißmäßig wenige Gruppen von Erscheinungen der Beobachtung entgegengetreten. Wir führen diese Gruppen auf, ohne das Gebiet durch eine systematische Eintheilung damit erschöpfen zu wollen.

17. Induction in geschlossenen Bahnen.

In einem sich verändernden magnetischen Felde müssen zufolge der Gleichungen 9a nothwendiger Weise elektrische Kräfte verbreitet sein. Diese Kräfte sind im Allgemeinen sehr schwach, weil ihre Werthe den sehr kleinen Faktor A enthalten, sie sind aus diesem Grunde der Wahrnehmung nur zugänglich durch den Strom, welchen sie in geschlossenen Leitungsbahnen erregen oder dadurch, daß sich ihre Wirkung in sehr langen, bis auf einen kleinen Bruchtheil ihrer Länge geschlossenen linearen Bahnen addirt. Die in den Versuchen meßbar werdenden Wirkungen geben uns daher stets nur die Integralwirkung der elektrischen Kraft in einer geschlossenen Bahn, also das Integral $\int(Xdx+Ydy+Zdz)$ genommen über eine in sich zurücklaufende Linie. Nach einer schon benutzten bekannten Integraltransformation ist dies Linienintegral gleich dem Flächenintegral

$$\int\left\{\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\cos n,x+\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\cos n,y+\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\cos n,z\right\}d\omega$$

genommen über eine von der fraglichen Linie rings begrenzte, übrigens aber beliebige Fläche ω. Unter Benutzung der Gleichungen 9a wird aber dieser Ausdruck gleich

$$A\frac{d}{dt}\int(\mathfrak{L}\cos n,x+\mathfrak{M}\cos n,y+\mathfrak{N}\cos n,z)\,d\omega.$$

In Worten ausgedrückt ist demnach die in einer geschlossenen Strombahn sich zeigende elektromotorische Kraft gleich der mit A multiplicirten Aenderung der Anzahl der die Strombahn durchsetzenden magnetischen Kraftlinien, berechnet auf die Zeiteinheit. Rührt insbesondere die Induction her von einem geschlossenen

veränderlichen Strome, und ist die Nachbarschaft magnetisirbarer Körper ausgeschlossen, so ist die erregte elektromotorische Kraft nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes gleich dem mit A' multiplicirten Produkt des Neumannschen Potentials der beiden Strombahnen auf einander und der auf die Zeiteinheit berechneten Aenderung der Intensität des inducirenden Stromes. Diese Sätze, von welchen der erstere der allgemeinere ist, umfassen in ihren Folgerungen vollständig die thatsächlich beobachteten Erscheinungen in ruhenden Leitern.

Die Induction in bewegten Leitern liegt im Grunde außerhalb des Gebietes auf welches sich die gegenwärtige Untersuchung beschränkt. Handelt es sich aber um lineare Leiter, so können wir diese Form der Induction an die Induction in ruhenden Leitern anschließen durch die Aussage, daß es für die elektromotorische Kraft in einer geschlossenen Bahn gleichgültig sei, ob das unmittelbar umgebende magnetische Feld sich ändert in Folge von Bewegung ponderabeler Körper oder in Folge rein elektromagnetischer Zustandsänderungen, dafern nur die Aenderung des unmittelbar umgebenden magnetischen Feldes die gleiche sei. Zufolge dieser Aussage und des Vorangegangenen ist die in einer bewegten Stromleitung inducirte elektrische Kraft gleich der mit A multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Strombahn in bestimmter Richtung durchschnitten werden. Das Produkt aus dieser elektrischen Kraft und der Intensität des Stromes in der bewegten Strombahn giebt nach Abschnitt 11 die in der Strombahn vermittelst der Induction erzeugte thermische oder chemische Arbeit an. Dieselbe ist demnach zufolge der Ergebnisse des vorigen Abschnittes, ergänzt durch eine genaue Berücksichtigung der Vorzeichen gleich der mechanischen Arbeit, welche die den Stromkreis bewegenden äußeren Kräfte leisten müssen. Wird also ein constant gehaltener Strom bewegt gegen feste Magnete, so compensirt die in dem Stromkreis erzeugte thermische und chemische Energie die geleistete mechanische Arbeit, während die magnetische Energie des Systems unberührt bleibt. Wird dagegen ein constant gehaltener Strom bewegt gegen einen anderen constant gehaltenen Strom, so compensirt die in dem einen Stromkreise in Folge der Bewegung mehrauftretende chemische und thermische Energie die geleistete mechanische Arbeit; die gleiche in dem andern Stromkreise in Folge der Bewegung mehrauftretende Energie compensirt die Verminderung der magnetischen Energie des Feldes. Oder genauer gesprochen, es compensirt die Summe der erstgenannten Energiemengen die Summe der

letztgenannten. Die am Schlusse des Abschnittes 16 geforderte Rechenschaft ist damit abgelegt.

18. Elektrodynamik ungeschlossener Ströme.

In Hinsicht der möglichen Erfahrung ist dieses Gebiet das reichste von allen, denn es umfaßt alle diejenigen Probleme, welche wir nicht als besondere Fälle anderen Gebieten zutheilen können. In Hinsicht der wirklichen Erfahrung ist es indessen bislang sehr arm. Die Schwingungen ungeschlossener Inductionsapparate oder sich entladender Leydener Flaschen können in hinreichender Annäherung nach den Grundsätzen des vorigen Abschnittes behandelt werden und im eigentlichen Verstande gehören demnach hierher bislang nur die elektrischen Wellen und Schwingungen von kurzer Wellenlänge, welche erst kürzlich die Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben. Für die theoretische Behandlung dieses Abschnittes genüge es daher hervorzuheben, daß eine Eintheilung der elektrischen Kraft in einen elektrostatischen und einen elektrodynamischen Theil in diesen allgemeinen Problemen weder eine klar zu fassende physikalische Bedeutung noch einen nennenswerthen mathematischen Nutzen mit sich führt, daher von uns im Gegensatz zu früheren Behandlungsweisen zweckmäßig vermieden wird.

19. Lichtbewegung in isotropen Körpern.

In das Gebiet der Optik verweisen wir diejenigen elektrodynamischen Bewegungen, welche der Zeit nach rein periodisch sind und deren Periode einen sehr kleinen Bruchtheil der Secunde, sagen wir den billionten Theil derselben nicht überschreitet. Keines der Mittel, durch welches wir befähigt sind, solche Bewegungen wahrzunehmen, gestattet uns die magnetischen und elektrischen Kräfte als solche zu erkennen; was wir wahrzunehmen vermögen sind lediglich die geometrischen Verhältnisse nach welchen sich die vorhandene Bewegung in verschiedener Richtung mit verschiedener Intensität fortpflanzt. Auch die mathematische Darstellung der Erscheinungen wird sich daher darauf beschränken dürfen, nach Elimination der entgegengesetzten Art die Ausbreitung einer der beiden Kraftarten zu verfolgen, und es wird gleichgültig sein, an welche von beiden Arten dabei die Betrachtung anknüpft. Beschränken wir uns auf homogene isotrope Nichtleiter, so erhalten wir aus den Gleichungen 4a. und 4b. durch Elimination, das eine Mal der elektrischen, das andere Mal der magnetischen Kraft-

componenten die hier zu benutzen Formen

$$A^2\varepsilon\mu\frac{d^2L}{dt^2} = \Delta L \qquad A^2\varepsilon\mu\frac{d^2X}{dt^2} = \Delta X$$

19a. $A^2\varepsilon\mu\frac{d^2M}{dt^2} = \Delta M$ 19b. $A^2\varepsilon\mu\frac{d^2Y}{dt^2} = \Delta Y$

$$A^2\varepsilon\mu\frac{d^2N}{dt^2} = \Delta N \qquad A^2\varepsilon\mu\frac{d^2Z}{dt^2} = \Delta Z$$

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dt} = 0 \qquad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{d\varepsilon} = 0$$

deren Lösungen, rein periodische Bewegungen vorausgesetzt, stets auch Lösungen der Gleichungen 4a. und 4b. sind. Jedes der beiden Gleichungssysteme 19a. und 19b. läßt die Möglichkeit von Transversalwellen, die Unmöglichkeit von Longitudinalwellen erkennen; jedes der beiden Systeme ergiebt für die Geschwindigkeit der möglichen Wellen den Werth $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}$, aus jedem der beiden Systeme lassen sich die Erscheinungen der geradlinigen Ausbreitung, der Beugung, der Interferenz des natürlichen und des polarisirten Lichtes ableiten und die verschiedenen Arten der Polarisation verstehen. Ein Zurückgreifen auf die Gleichungen 4a. und 4b. ergiebt dabei, daß die Richtungen der gleichzeitigen elektrischen und magnetischen Kraft in einem jeden Punkte einer ebenen Welle beständig auf einander senkrecht stehen.

Lassen wir die Grenzebene zweier isotropen, homogenen Nichtleiter mit der xy-Ebene zusammenfallen, so gelten an dieser Grenzebene zufolge des Abschnittes 8 und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß wir es nur mit periodischen Bewegungen zu thun haben, die Bedingungen:

$$L_1 = L_2 \qquad X_1 = X_2$$

19c. $M_1 = M_2$ 19d. $Y_1 = Y_2$

$$\mu_1 N_1 = \mu_2 N_2 \qquad \varepsilon_1 Z_1 = \varepsilon_2 Z_2$$

Jedes dieser Systeme von Grenzgleichungen ergiebt zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere beider Körper die Gesetze der Reflexion, der Brechung, der totalen Reflexion, also die Grundlagen der geometrischen Optik. Jedes derselben läßt auch erkennen, daß die Intensität reflectirter und gebrochener Wellen von der Art ihrer Polarisation abhängig ist und ergiebt

für diese Abhängigkeit sowie für die Phasenverzögerung der total reflectirten Wellen die Fresnel'schen Formeln. Leiten wir diese Formeln aus den Gleichungen der elektrischen Kräfte 19b. und 19d. her, so entspricht unsere Entwickelung der von Fresnel selbst gegebenen Ableitung dieser Formeln. Halten wir uns an die Gleichungen der magnetischen Kraft 19a. und 19c., so nähern wir uns dem von F. Neumann zur Ableitung der Fresnel'schen Gleichungen angegebenen Pfade. Von unserem allgemeineren Standpunkte aus läßt sich nicht allein von vorn herein überblicken, daß beide Wege zum gleichen Ziele führen müssen, sondern auch erkennen, daß beide mit gleicher Berechtigung beschritten werden können. Daß in den wirklich beobachteten Erscheinungen der Reflexion die elektrischen und magnetischen Kräfte nicht völlig mit einander vertauschbar sind und beide Wege verschieden erscheinen, hat seinen Grund in dem Umstande, daß für alle in Betracht kommenden Körper die Magnetisirungsconstanten fast gleich und gleich Eins sind, während die Dielektricitätsconstanten merklich verschieden sind und daß also hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften der Körper deren optisches Verhalten bestimmen.

Bildet die xy-Ebene die Grenze unseres Nichtleiters gegen einen vollkommenen Leiter, so gelten in dieser Ebene die Gleichungen

$$19e.\quad N = 0 \qquad 19f.\quad \begin{matrix} X = 0 \\ Y = 0. \end{matrix}$$

Dieselben lassen zusammen mit den zugehörigen Gleichungen für das Innere des Nichtleiters erkennen, daß bei jedem Einfallswinkel und jedem Azimuth der Polarisation die Reflexion eine totale ist. Da die wirklichen Leiter zwischen den vollkommenen Leitern und den Nichtleitern die Mitte halten, so wird die Reflexion an ihnen einen Uebergang bilden zwischen der totalen Reflexion und der Reflexion an durchsichtigen Körpern. Da die Metallreflexion eine derartige Stellung einnimmt, so läßt sich übersehen, daß unsere Gleichungen geeignet sein werden, ein allgemeines Bild auch der Metallreflexion zu geben. Wie weit in die Einzelheiten hinein aber die Wiedergabe durch passende Wahl der Constanten sich erstrecken läßt, scheint bisher noch nicht genügend untersucht zu sein.

Daß die Erscheinungen der Dispersion die Einführung mindestens zweier elektrischen oder zweier magnetischen Größen erfordern und deshalb außerhalb des Bereichs unserer gegenwärtigen Theorie liegen, ist schon im ersten Abschnitt erwähnt worden.

20. Krystalloptik.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf die Lichtbewegung im Innern eines homogenen vollkommen durchsichtigen Krystalles, von welchem wir des Weiteren voraussetzen, daß die Symmetrieaxen der elektrischen und der magnetischen Energie zusammenfallen. Legen wir die Coordinatenaxen diesen gemeinschaftlichen Symmetrieaxen parallel und setzen der Einfachheit halber für

$$\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \mu_{11},\ \mu_{22},\ \mu_{33} \quad \text{jetzt} \quad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$$

so nehmen die in Betracht kommenden Gleichungen 5a. und 5b. die Form an:

20a.
$$A\mu_1\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$
$$A\mu_2\frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}$$
$$A\mu_3\frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$$

20b.
$$A\varepsilon_1\frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}$$
$$A\varepsilon_2\frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}$$
$$A\varepsilon_3\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

Diese Gleichungen werden integrirt durch die Annahme ebener Wellen geradlinig polarisirten Lichtes, welche den folgenden Aussagen entsprechen: Auf der elektrischen Polarisation steht die magnetische Kraft, auf der magnetischen Polarisation die elektrische Kraft senkrecht. Die Richtung der beiden Kräfte tritt im Allgemeinen aus der Wellenebene heraus, die Richtung der beiden Polarisationen liegt in der Wellenebene. Die Richtung, welche auf den beiden Polarisationen senkrecht steht, ist also die Wellennormale; die Richtung, welche auf den beiden Kräften senkrecht steht, ist die Richtung, in welcher sich zufolge Abschnitt 11 die Energie fortpflanzt, sie heißt in der Optik der Strahl. Jeder gegebenen Lage der Wellennormale entsprechen im Allgemeinen zwei mögliche Wellen von verschiedener Polarisation, verschiedener Geschwindigkeit und verschiedener Lage des zugehörigen Strahles. Lassen wir in einem bestimmten Augenblicke vom Nullpunkt des Coordinatensystems ebene Wellen mit allen möglichen Lagen der Wellennormale ausgehen, so umhüllen diese Wellenebenen nach der Zeiteinheit eine Fläche, die sogenannte Wellenfläche. Jede einzelne Wellenebene berührt die Wellenfläche in einem Punkte des durch den Nullpunkt gelegten zugehörigen Strahles. Als Gleichung der von den Wellenebenen umhüllten Fläche wird gefunden:

$$20c.\quad \left(\frac{x^2}{\varepsilon_1}+\frac{y^2}{\varepsilon_2}+\frac{z^2}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{x^2}{\mu_1}+\frac{y^2}{\mu_2}+\frac{z^2}{\mu_3}\right)-\frac{x^2}{\varepsilon_1\mu_1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\mu_2}\right)$$
$$-\frac{y^2}{\varepsilon_2\mu_3}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_3}+\frac{1}{\varepsilon_3\mu_1}\right)-\frac{z^2}{\varepsilon_3\mu_3}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\mu_2}+\frac{1}{\varepsilon_2\mu_1}\right)+\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\mu_1\mu_2\mu_3}=0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche vierten Grades schneidet die Coordinatenebenen in je zwei Ellipsen. In einer der Coordinatenebenen schneiden sich die beiden Ellipsen in vier Punkten, welches vier Nabelpunkte der Fläche sind; in den beiden andern Coordinatenebenen umschließt die eine Ellipse die andere, und zwar gelten diese Aussagen, welches auch die Werthe der ε und μ sind. Für alle wirklichen Krystalle ist mit sehr großer Annäherung $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$; für diesen Fall reduzirt sich die allgemeine Form der Gleichung auf die der Fresnel'schen Wellenfläche und von den beiden Ellipsen, in welchen die Fläche jede der Coordinatenebenen schneidet, reduzirt sich je eine auf einen Kreis.

Man weiß, daß sich an die Betrachtung der Wellenfläche und ihrer Ausartungen in besonderen Fällen die Erklärung der Doppelbrechung, der Reflexion an Krystallflächen, vieler der in Krystallen beobachteten Interferenzerscheinungen anknüpft. Andere Thatsachen der Krystalloptik lassen sich hinwiederum nicht bewältigen durch den Verfolg einer einzigen elektrischen und einer einzigen magnetischen Richtungsgröße, diese Thatsachen liegen daher außerhalb des Bereiches unserer Theorie in ihrem gegenwärtigen Umfang.

Wir haben in den Nummern 17—20 die Aufzählung derjenigen Fälle des veränderlichen Zustandes erschöpft, deren Wichtigkeit bislang zur Entwickelung besonderer Theorien Veranlassung gegeben hat.

Bonn, im März 1890.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1890, als dem Geburtstage des Stifters, Carl Gustav Beneke, wurde vorschriftsgemäß in öffentlicher Sitzung der Fakultät das Ergebniß der Preisbewerbung für das Jahr 1890 verkündet.

Die im Jahre 1887 gestellte Aufgabe lautete wie folgt:

Zenonis, Cleanthis, Chrysippi stoicorum principum et disci-

pulorum quae supersunt reliquiae ad res ethicas politicas divinas spectantes colligantur et pertractentur ita, ut libri cujusque quantum quidem fieri possit et argumentum illustretur et vestigia apud posteriores scriptores latentia indagentur.

Es sind zwei Bewerbungsschriften rechtzeitig eingegangen, über welche das Urtheil der Fakultät folgendermaßen lautet:

Die erste Bewerbungsschrift, mit dem Motto:

Μέτρον τοῦ βίου τὸ καλόν

behandelt Zenon, Kleanthes, Ariston, Chrysippos. Sie kann aber nur für Zenon und allenfalls Ariston als vollendet gelten. Kleanthes und Mehreres von Chrysippos ist so gut wie eine bloße Reproduction älterer Arbeiten, anderes giebt nur wenig obenhin zusammengerafftes Material. Nur Chrysippos *περὶ παθῶν* ist noch sorgfältiger behandelt.

Der Verfasser ist auf die Textkritik der Bruchstücke und die literärgeschichtliche Forschung über die einzelnen Schriften und Schriftsteller fast gar nicht eingegangen, und auch die Analyse der Hauptautoren, denen die Bruchstücke entnommen sind, ist kaum gefördert. Der Verfasser hat vielmehr seiner eigenen Angabe nach nur einen sehr engen Kreis der einschläglichen Literatur selbst durchforscht. Sein Interesse ist fast ausschließlich dem Erfassen der Lehrmeinungen der Stoa zugewandt, jedoch auch nach dieser Seite treten bedeutende und gesicherte Ergebnisse nicht hervor. Der Preis kann ihm also nicht zuerkannt werden.

Die zweite Arbeit trägt das Motto:

Ἐν οἰκίαις μείζοσι παραπίπτει τινὰ πίτυρα καὶ πόσοι πυροὶ τινές.

Sie hat sich auf die Sammlung der Bruchstücke des Chrysippos beschränkt, von welchem sie allerdings alle Schriften, nicht bloß die in dem Thema bezeichneten, heranzieht.

Beigegeben ist eine Reihe von umfassenden und eindringenden Untersuchungen, vornehmlich über das Verhältniß der Quellenschriftsteller zu einander und zu den verlorenen Schriften.

Die Sammlung der Fragmente giebt die ausgeschriebenen Stellen nur mit kritischem Apparate versehen ohne jede Erklärung und nur durch die gewählte Anordnung verbunden. Die Bearbeitung ist also unvollendet. Das Fortlassen von Zenon und Kleanthes begründet der Verfasser damit, daß er nicht hätte reproduciren wollen und eine Vermehrung der Bruchstücke über das bisher gesammelte hinaus nicht zu leisten wäre.

Die Fakultät kann diese Ansicht nicht theilen, sie würde es vielmehr lebhaft bedauern, wenn der Verfasser bei der Veröffentlichung seines Werkes die Reste der älteren Stoa ausschließen

wollte, ja es dürfte angezeigt sein, noch die nächsten Anhänger des Chrysippos bis auf Antipatros zuzuziehen. Indessen unter der Voraussetzung, welche sich der Verfasser von der singulären Bedeutung des Chrysippos gebildet hat, und angesichts der Masse antiker Literatur, welche er mit Recht zu durchforschen unternommen hat, steht die Fakultät nicht an, diese Einschränkung des Themas als praktisch zulässig gelten zu lassen und somit seine Chrysippea als den Versuch einer Lösung der gestellten Aufgabe anzusehen.

So unfertig hiernach die Fragmentsammlung auch noch erscheint, so ist doch des werthvollsten neuen Materials soviel erschlossen und ist in den Forschungen über die Quellenschriftsteller so viel theils festgestellt, theils mit Scharfsinn und Umsicht vermuthet, daß das Werk in seiner Vollendung eine bedeutende Förderung der Wissenschaft sowohl nach philologischer wie nach philosophischer Seite verspricht, und die Fakultät trägt deßhalb kein Bedenken, dem Verfasser den ersten Preis zuzuerkennen.

Die Eröffnung des mit dem Motto:

Ἐν οἰκίαις μείζοσι παραπίπτει τινὰ πίτυρα καὶ ποσοὶ πυροὶ τινές

versehenen Briefes ergab als Verfasser Herrn

Dr. phil. Hans von Arnim Fredenwalde zu Halle a./Saale.

Für das Jahr 1893 stellt die philosophische Fakultät folgende neue

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe:

Die Bahnbewegung des in mehrfacher Beziehung so sehr interessanten Biela'schen Kometen hat im Jahre 1861 durch Hubbard insofern eine ausgezeichnete Bearbeitung gefunden, als dieser Astronom die Beobachtungen der beiden Componenten des Kometen während der Erscheinungen in den Jahren 1845/46 und 1852 mit Berücksichtigung der inzwischen durch die großen Planeten verursachten Störungen mit einander in Verbindung gebracht und daraus Elementensysteme hergeleitet hat, welche den Vorausberechnungen für die freilich erfolglosen Nachforschungen während der zu erwartenden Wiedererscheinungen als Grundlage gedient haben.

Die philosophische Fakultät stellt nun die Aufgabe, daß eine strenge, nach einheitlichen Grundsätzen und mit Benutzung der neusten und besten Hülfsmittel in Bezug auf die Oerter der Vergleichsterne und die angewandten Sonnen- und Planeten-Tafeln sowie die Planetenmassen

ausgeführte Untersuchung mit Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Störungen auch über die vorhergegangenen Erscheinungen in den Jahren 1832, 1826, 1805/6 bis zu 1772 zurück ausgeführt werde und daß diese Untersuchung, wenn auch der Komet nach 1852 nicht wieder aufgefunden worden ist, mit Innehaltung der dazu erforderlichen Genauigkeitsgrenzen in der Rechnung und mit Rücksicht auf die fernerhin erfolgten größeren Störungen bis zum Jahre 1872 ausgedehnt werde, um neue Aufschlüsse über die noch nicht aufgeklärte Beziehung dieses Kometen zu dem nach Klinkerfues' Anzeige von Pogson aufgefundenen kometenartigen Object zu erhalten. Es wird dabei Gewicht darauf gelegt, daß die Störungswerthe in der einzureichenden Abhandlung nicht nur in ihrer Gesammtwirkung von einer Erscheinung zur andern, sondern wenigstens für die hauptsächlich in Betracht kommenden Planeten Erde und Jupiter in den Endresultaten in geeigneten Abständen für den ganzen Zeitraum mitgetheilt werden, um zu Zeiten der wiederholten großen Annäherungen des Kometen die Wirkungen einzeln erkennen zu können; ferner dürfte noch die Frage zu erörtern sein, ob die von Winnecke besprochenen Anzeichen einer schon im Jahre 1805 angedeuteten Duplicität des Kometen (siehe Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Jahrgang 15) bei der gesonderten Behandlung der Bewegung der beiden Componenten eine Bestätigung finden.

Es wird hierbei daran erinnert, daß nach statutarischer Bestimmung bei der Stellung und der Bearbeitung der Beneke'schen Aufgaben das Gebiet der sogenannten speculativen Philosophie zu vermeiden ist.

Bewerbungsschriften sind entweder in deutscher oder in lateinischer oder in französischer oder in englischer Sprache, auf dem Titelblatte mit einem Spruche versehen, bis zum 31. August 1892 an uns einzusenden. Der Bewerbungsschrift ist ein versiegelter Brief beizugeben, welcher auf der Außenseite mit dem Spruche der Abhandlung bezeichnet ist und innerhalb Namen, Stand und Wohnort des Verfassers angiebt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein.

Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse bezeichnet sein, an welche die Arbeit für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist.

Der erste Preis beträgt 1700 Mark, der zweite 680 Mark.

Die etwaige Zuerkennung dieser Preise erfolgt am 11. März 1893, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1890 und bis zum 31. August 1891 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgange 1888 auf Seite 132 und im Jahrgange 1889 auf Seite 345.

Göttingen, den 1. April 1890.

Die philosophische Fakultät
der Dekan.
C. A. Volquardsen.

Preisstiftung
der Witwe Petsche geb. Labarre.

Gemäß den Statuten der genannten unterm 10. März 1873 genehmigten Stiftung schreibt die juristische Facultät folgende Preisaufgabe aus:

„Der Zwangsvergleich, seine geschichtliche Entwicklung und heutige Gestalt."

Der Preis „250 Mk. Zweihundertfünfzig Mark" kann nur einer solchen Arbeit zuerkannt werden, deren Verfasser in diesem oder dem folgenden Semester als Studierender unserer Universität angehört. Die Preisarbeiten müssen spätestens am 1. Januar 1891 dem Dekan der juristischen Fakultät übergeben werden, ohne Namensunterschrift, jedoch mit einem versiegelten den Namen des Verfassers enthaltenden Zettel. Arbeit und Zettel müssen ein gleichlautendes Motto tragen.

Göttingen, den 26. April 1890.

F. Regelsberger
z. Z. Dekan der juristischen Fakultät.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1890.

Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissensch. zu Berlin. III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.

Preisschriften gekrönt u. herausgeg. von der Fürstlich Iablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. N. X. Der mathematisch-naturwissensch. Section. XXVII. A. Looss. Leipzig 1889.

Deutsches meteorologisches Lehrbuch für 1888. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. 1. Hälfte. Abth. 1 u. 2 des Jahrbuches d. K. Sächsischen meteorologischen Instituts. VI. Jahrg. 1888. Chemnitz 1889.

Neues Lausitzisches Magazin. Band 65. Heft 2. Görlitz 1889.

Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 1—2. Jan. 1890. Halle a. S.

Jahresbericht u. Abhandlungen des naturwissensch. Vereins in Magdeburg. 1888. Magdeburg 1889.

Eine Wächterstimme für die Gemeinde des wahren Christenthums. Febr. 1890. Heft 2. Jahrg. 2. 1890. Haydau b. Altmorschen.

Nature. Vol. 41. Nr. 1058—1060.

Proceedings of the Royal society. Vol. XLVI. Nr. 285, 286.

Proceedings of the London mathematical society. N. 364—367.

Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. L. Nr. 3. Jan. 1890.

Journal of the R. microscopical society 1889. Part 6a. Supplementary number. December 1890. Part. 1.

Reports from the laboratory of the R. college of physicians, Edinburgh. Vol. II. Edinburgh and London 1890.

Proceedings of the Canadian Institute Toronto. Third series. Vol. VII. Fasc. Nr. 1. Whole N. Vol. XXV. Nr. 152. Toronto.

A bibliography of Indian geology: published by order of h. Ex. the Governor General of India in Council. Preliminary issue. Calcutta 1888.

Corpus inscriptionum Indicarum. Vol. III. By John Faithfull Fleet. Calcutta 1888.

Mémoires de l'academie Imp. des sciences de St. Petersbourg. VII. série. Tome XXXVII. N. 3. St. Petersbourg 1889.

Bulletin de l'Académie R. des sciences des lettres et des beaux arts de Belgique. Année 59. 3. série. Tome 18. Nr. 12. Année 60. 3. série. Tome 19. N. 1.

Annales de la faculté des lettres de Bordeaux 1888. N. 2. Paris 1888.

Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. Livr. 1. Harlem 1890.

Atti della società Toscana di science naturali in Pisa:

a. Memorie. Vol. X.

b. Processi verbali. Vol. VI adunanza del di 7 Juglio 1889.

c. » » Vol. VII » » » 17 Nov. 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 4.

F. Klein, Zur Theorie der Laméschen Functionen. — *Paul de Lagarde*, I. „Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette". II. Psalm 114 im Sidrâ rabbâ. — *H. Hertz*, Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. — Beneke'sche Preisstiftung. — Preisstiftung der Witwe Petsche geb. Labarre. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS ENGLAND
18 JUL 90
LIBRARY

28. Mai. **№ 5.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. Mai.

Ehlers legt vor: »Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des indischen Archipels. Vorläufige Mittheilung von Dr. Clemens Hartlaub.«
Wieseler: Scenische Untersuchungen.
de Lagarde: Exodus 1_{11}.
Riecke: Ueber die Pyroelektricität des Turmalins.
Voigt: Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne.

Exodus 1_{11}.

Von

Paul de Lagarde.

Der Eigenname רַעְמְסֵס findet sich in der in Palaestina heimischen Gestalt des jüdischen Canons fünf mal.

Der ältere Elohist, der nach meinen Mittheilungen 3 228 etwa um das Jahr 600 vor Christus schrieb, redet in der Genesis 47_{11} von אֶרֶץ רַעְמְסֵס, was man zunächst (vorausgesetzt, daß man die Punctation zu ändern sich entschließt) als die irgendwie mit einem Ramessês in Beziehung stehende Landschaft verstehn wird. Den Namen Ramesses schrieben die Aegypter[1]) mit zwei, Râ und mes zu lesenden, Ideogrammen und darauf folgenden zwei —‖—: mithin

1) Der Kürze halber verweise ich auf EAWallis Budges Catalogue of the Egyptian antiquities des Harrow School Museum (Sir Gardner Wilkinson) 21 § 37.

muß רַעְמְסֵס gesprochen werden, wenn die Konsonanten רעמסס wirklich jenen Königsnamen wiederzugeben bestimmt sind. 𝔊 meint mit seinem *Ραμεσσῆ* wohl einen Genetiv, der sich zu *Ραμεσσῆς* verhielte, wie *τοῦ Μανασσῆ* zu einem nicht unbelegbaren ὁ *Μανασσῆς* (𝔥s ռամեսսէ könnte von 𝔭s ܪܥܡܣܣ beeinflußt sein), wie *Μωυσῆ* zu *Μωυσῆς*: nähere Untersuchung muß vorbehalten bleiben.

רַעְמְסֵס ist Exodus 12_{37} wie Numeri 33_3 33_5 der Ort, von welchem der Auszug der in Aegypten utilisierten Israeliten ausgieng.

Exodus 1_{11} bauen die noch in Aegypten weilenden Israeliten dem Pharaon עָרֵי מִסְכְּנוֹת, und zwar אֶת־פִּתֹם וְאֶת־רַעַמְסֵס. Bei 𝔊 der römischen Ausgabe *πόλεις ὀχυράς, τήν τε πειθὼ καὶ ῥαμεσσῆ καὶ ὤν, ἥ ἐστιν ἡλιούπολις.* Seit 1868 ist es unerlaubt, diese Gestalt des Septuagintatextes für die echte zu halten. Denn seit 1868 ist aus Cerianis Monumenta sacra et profana 2 127 [seit 1880 aus meinen Fragmenta quinque 78, demnächst aus meiner B(ibliotheca) S(yriaca) 50_{31}] bekannt, daß die in einer Abschrift des Jahres 697 vorliegende syrische Uebersetzung der Septuaginta das vor *ῥαμεσσῆ* stehende *καὶ* als dem Aquila, Symmachus, Theodotion angehörig, also als eine dem Texte Aegyptens fremde Zuthat bezeichnet. Allerdings ist zu dem ܐ* ܗܘ ܐ ܘ↓ܠܪܥܡܣܣܐ jenes Syrers zweierlei zu bemerken. Erstens, daß er dem Eigennamen die Form wenigstens halb bewahrt hat, in der er bei 𝔖 vorliegt (ܠܪܥܡܣܣܝܣ): das thut der Mann aber in den meisten Fällen sogar ganz. Zweitens, daß *ܘ↓ܠܪܥܡܣܣܐ genau genommen ※*καὶ*↙ *τὴν ῥαμεσσῆ* wiedergibt. Allein das erklärt sich daraus, daß ohne den Zusatz des ܠ der Text unverständlich geworden wäre: ThSRoerdam libri Judicum et Ruth, Vorrede Seite 18 24. Danach hätte der Text 𝔐s zu lauten וְאֶת־פִּתֹם רַעְמְסֵס, das von Ramessês gegründete, im RamessêsLande belegene פתם. Mit Nothwendigkeit folgt, daß es auch noch andere פתם gegeben hat als dieses: was für die Deutung des Namens פתם von Erheblichkeit sein dürfte.

𝔊 hat das RamessesLand auch Genesis 46_{28}. Dort bietet 𝔐 וְאֶת־יְהוּדָה שָׁלַח לְפָנָיו אֶל־יוֹסֵף לְהוֹרֹת לְפָנָיו גֹּשְׁנָה וַיָּבֹאוּ אַרְצָה גֹּשֶׁן, und 𝔊 *τὸν δὲ Ἰούδαν ἀπέστειλεν ἔμπροσθεν αὐτοῦ πρὸς Ἰωσὴφ συναντῆσαι αὐτῷ καθ' Ἡρώων πόλιν εἰς γῆν Ῥαμεσσῆ*, wo in z *καθ' Ἡρώων πόλιν*, in D *εἰς γῆν Ῥαμεσσῆ* fehlt, und die letzten Worte 𝔐s [BS 49_7] von einem Späteren durch ※*καὶ ἦλθεν* [so] *ἐν γῇ Γεσέμ*↙ ergänzt werden.

So viel steht fest, daß גֹּשֶׁן und *γῆ Ῥαμεσσῆ* diesem Uebersetzer, der doch in Aegypten Bescheid wußte, für identisch galten.

𝔨 hat Genesis 46_{28} ⲉⲑⲣⲉϥⲓ ⲉ̀ⲃⲟⲗ ϧⲁϫⲱϥ ϩⲁ ⲡⲉⲑⲱⲙ ϯⲃⲁⲕⲓ ϧⲉⲛ ⲡⲕⲁϩⲓ ⲛ̀ⲣⲁⲙⲉⲥⲥⲏ, das bedeutet, *Ἡρώων πόλις* ist ihm ⲡⲉⲑⲱⲙ. Der

Unglückliche! sein Werk heißt deshalb bei dem Herrn Akademiker ADillmann, Exodus ² 7 [1880], »die hier ganz unzuverlässige memphitische Uebersetzung«. Herr Dillmann weiß, daß diese Uebersetzung »*Ἡρώων πόλις*, wie sonst auch Etham, durch Pithom wiedergibt«. Zunächst: ℓ schreibt Genes. 46_{28} nicht ⲡⲉⲑⲱⲙⲁⲁ, sondern ⲡⲉⲑⲱⲙⲁⲁ, was zu denken gibt. Weiter: אֵתָם kommt nach Brecher 10, Jones 120¹ [Hiller 805, Simonis 458] vier Mal vor: ℓ bietet Exod 13_{20} ⲟⲑⲱⲙ (ich setze für die Feigen, die stets nicht lesen können, wann sie nicht verstehn wollen, die griechischen Cursiven daneben) = *οθομ*, Num 33_{6} 33_{7} ⲁⲟⲩⲑⲁⲙ = *βουθαν*, und Num 33_{8} gar nichts, da dort 𝔊, und also auch seine Töchter, nicht 𝔐s Text haben.

Jenes לְהוֹרֹת לְפָנָיו der Genesis 46_{28} ist von Allen, denen der Glaube in den Knochen liegt »Gottes Wort« müsse, weil »Gottes Wort«, auch verständlich sein, Jahrhunderte hindurch verstanden worden. 𝔊s *συναντῆσαι αὐτῷ* steht oben: wer Tromm befragt, wird an dem Glauben irre werden, daß לְהוֹרֹת לְפָנָיו und *συναντῆσαι αὐτῷ* sich decken. Aquila (*φωτίζειν εἰς τὸ πρόσωπον αὐτοῦ*) und Symmachus (*δηλῶσαι αὐτῷ*) sind sogar ohne Tromm an 𝔊 irre geworden. Herr Dillmann meint, 𝔊 habe לְהַרְאוֹת gefunden: dies hat (wie Dillmann bemerkt) 𝔖 = ܠܡܚܙܝܗ ܩܕܡܘܗܝ, und der Samariter = למחזי לקדמיו. Herr Dillmann hier:

> durch וירא אליו 29 wird diese Lesart gesichert: also: mit dem Auftrag, *dass er* (Jos.) *vor ihm erscheinen*, ihm entgegenkommen *solle nach Goschen.*

und zu 29

> *und*

Ioseph

> *gab sich ihm*

dem Iacob

> *zu sehen*: zeigte sich ihm; ein gewählterer Ausdruck, wie er sich für die Erscheinung eines so hohen Herrn wohl ziemt.

Herr Dillmann hat nicht genau gelesen: וַיֵּרָא אֵלָיו und לְהַרְאוֹת לְפָנָיו zeigen verschiedene Construction, haben mithin auch verschiedenen Sinn, und darum ist das von Plüschke aufgestellte Gesetz, das Dillmann zu Genesis ⁵ 19 in maiorem apologetarum gloriam wohl hätte citieren dürfen (mein Psalterium Hieronymi 163), hier auch nicht einmal in einer Modification anwendbar.

Vater Iacob (so etwa denkt sich Herr Dillmann den Hergang) schickt seiner Durchlaucht dem Reichskanzler (ⲁⲉ ⲫⲛⲟⲩϯ ⲉⲫⲱⲛϩ) Ioseph die Weisung, vor ihm (in Gala?) zu »erscheinen« — hier ist offenbar Iacob der »hohe Herr« (man las HvKleist) —, und

Ioseph zieht sich zum Wiedersehen mit dem lange entbehrten alten Vater die große Uniform an, und »erscheint« — hier ist abermals Iacob »der hohe Herr«. Isaias 1 12.

נִרְאָה לִפְנֵי und נִרְאָה אֶל und ihren Unterschied zu besprechen, gestattet der beschränkte Raum dieser Blätter nicht.

EKautzsch und ASocin bemerken in ihrer Uebersetzung der Genesis: »Mit להורות ist nichts anzufangen, aber mit dem להראות bei .... ebensowenig«. Sie führen das mit seltenem, und gewis unbekömmlichem Muthe weiter aus.

Herr ADillmann ist in den SBAW 1885 889 ff. noch einmal auf die Angelegenheit zurückgekommen. Daselbst 891:

> Nimmt man dann zu dem bis jetzt Gesagten noch hinzu (Naville [the Store-City of Pithom ... London 1885] p. 6. f.), dass für *καθ' Ἡρώων πόλιν εἰς γῆν Ῥαμεσσῆ*, was die LXX in Gen. 46, 28 f. für גֹּשְׁנָה setzen, die Memphitische Uebersetzung ϩⲁⲡⲉⲑⲱⲙ[so] ϯⲃⲁⲕⲓ ϧⲉⲛ ⲡⲕⲁϩⲓ ⲛⲣⲁⲙⲁⲥⲥⲏ, d. h. »bei

Stern § 551.

> Pithom[so] der Stadt im Lande des Ramses« gibt, man also damals noch gewusst zu haben scheint, dass das spätere Hero

bei oder an der Stelle des älteren Pithom gelegen hat, so ..... Erfreulich ist, daß ⲓ̅ nicht mehr denunciiert wird, und daß nicht mehr ⲡⲓⲑⲱⲙ, sondern ⲡⲉⲑⲱⲙ erscheint. Aber daß jene sechs griechischen Worte zu nichts da sein sollen als um גֹּשְׁנָה zu übertragen, das will mir nicht einleuchten.

Unter der Regierung der Kaiser Valentinian und Theodosius ereignete sich nach Sozomenus ζ 15 10 (Hussey) Folgendes: *φασὶ τοῦ ναοῦ τούτου τότε καθαιρουμένου, τινὰ τῶν καλουμένων ἱερογλυφικῶν χαρακτήρων, σταυροῦ σημείῳ ἐμφερεῖς ἐγκεχαραγμένοις τοῖς λίθοις ἀναφανῆναι· παρ' ἐπιστημόνων δὲ τὰ τοιάδε ἑρμηνευθεῖσαν σημᾶναι ταύτην τὴν γραφὴν ζωὴν ἐπερχομένην.* Späte *ἐπιστήμονες τὰ τοιάδε* werden sonst verschollene Königsnamen Aegyptens mittelbar an Masqûdî gebracht haben.

So ist wohl möglich, daß als die Genesis in das Griechische übersetzt wurde — das wird mehr als ein halbes Jahrtausend vor jenem Valentinianus geschehen sein —, man noch gewußt hat, daß *Ἡρώων πόλις* und ⲡⲉⲑⲱⲙ Ein und dieselbe Stadt bezeichnen. Als charakteristisch hebe ich hervor, daß Herr ADillmann Exodus [2] (1880) 7 Genesis [5] (1886) 432 Numeri [2] (1886) 203 für *Ἡρώων πόλις*, und was daranhängt, EQuatremères mémoires sur l'Egypte 1 151—189 nicht citiert, während er am 30 Juli 1885 SBAW 895 »die bekannte Abhandlung von Quatremère ... hier voraussetzt«: Lehrer und Lernende der ersten Fakultät werden im Allgemeinen kaum den

Namen Quatremères, geschweige denn Quatremères Bücher, oder gar den Inhalt dieser Bücher kennen: es war mithin schon früher nothwendig jene »bekannte« Abhandlung anzuziehen.

𝔐s Text ist doch wohl verderbter — und herstellbarer — als Herr Dillmann meint.

Daß 28^2 ויבאו ארצה גשן in 𝔊 fehlt, habe ich schon angemerkt. Ich vermuthe, daß auch 29 גשנה zu viel ist.

28 להורת לפניו ist = *καθ' Ἡρώων πόλιν*, und enthält den Accusativ להירו.. פלין, nur mit hebräischen Zeichen geschrieben. גשנה ist, wie schon bemerkt, = *εἰς γῆν Ραμεσσῆ*.

Ich übersetze: Den Iuda entsandte er vor sich her an Ioseph nach Heroopolis in der Provinz des Ramesses. Als Iuda den Thatbestand gemeldet hatte, hieß Ioseph anspannen, und fuhr seinem Vater Iacob [an die Landesgrenze] entgegen.

Für die Aegyptologen wird hier noch viel zu thun sein: meines Erachtens nur für sie.

[*Hero* zu ⲛⲓ-ⲁϩⲱⲣ Peyron 17^1 = الاهراء Castle 884?] $\frac{27}{5}$ 89

Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne.

Von

W. Voigt.

Bezüglich des in der Ueberschrift genannten Problemes liegen einander scheinbar stark widersprechende Beobachtungen vor.

Während Herr von Helmholtz[1]) u. A. beim gleichzeitigen Erklingen zweier einfacher Töne von den Schwingungszahlen n_1 und n_2, von denen $n_2 < n_1$ sein mag, noch Töne von den Schwingungszahlen

$$n_2 - n_1 \text{ und } n_2 + n_1$$

wahrgenommen hat, so findet Herr R. König[2]) Töne von den Schwingungszahlen

$$n_2 - \nu n_1, \quad (\nu + 1) n_1 - n_2,$$

— vorausgesetzt, daß ν eine ganze Zahl ist, also νn_1 und $(\nu + 1) n_1$ die Schwingungszahlen derjenigen beiden harmonischen Obertöne

1) v. Helmholtz, Pogg. Ann. XCIX p. 497, 1865, Akustik (Braunschweig 1870) p. 239.

2) R. König, Pogg. Ann. CLVII p. 177, 1876, Quelques expériences d'Acoustique, (Paris 1882) p. 87, Wied. Ann. XXXIX p. 395, 1890.

des tieferen Tones sind, welche den höheren unmittelbar einschließen; die vorgenannten Töne dagegen vermochte Herr König in so wenigen und unsichern Fällen zu hören, daß er die Ansicht ausspricht:

L'existence de sons différentiels et de sons d'addition ne peut être démontrée jusqu'à présent avec quelque certitude par aucune expérience [1]).

Was die Erklärung der beobachteten Erscheinungen angeht, so hat Herr von Helmholtz bekanntlich die Annahme gemacht, daß in den Fällen, wo Combinationstöne gehört werden, die primären Töne durch Schwingungen von so großer Amplitude hervorgebracht werden, daß die Anwendung der gewöhnlichen lineären Differentialgleichungen nicht mehr zulässig ist. Zugegeben indeß, daß in dem Fall der Sirene und der Zungenpfeifen, wo neben den Schwingungen zugleich Luftströmungen stattfinden, diese Voraussetzungen zutreffen, so ist doch in dem besonders wichtigen Falle von Stimmgabeltönen, die fast allein einfache Sinusschwingen liefern, diese Annahme umsomehr abzuweisen, als durch neue Beobachtungen von Herrn Kayser [2]) gezeigt ist, daß bei solchen innerhalb weitester Grenzen der Intensität die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles constant ist, also die lineären Schallgleichungen merklich erfüllt sind.

Herr König hingegen erklärt die von ihm beobachteten Töne, wie zuerst Lagrange [3]), aus den Stößen der primären Töne und weist durch besondere sinnreiche Experimente nach, daß unser Ohr die Eigenschaft besitzt, regelmäßig wiederkehrende einzelne Impulse, deren Intensität periodisch wechselt, zu einem Ton zusammenzufassen von der Höhe, welche ein einfacher Ton mit gleicher Periode besitzt.

Das Princip der Erklärung scheint mir hierdurch für diejenigen Fälle der Zusammenwirkung zweier einfacher Töne, welche die Benutzung der lineären Schallgleichungen gestatten, völlig sichergestellt zu sein, — es fehlte aber bisher noch die strenge theoretische Ableitung der verschiedenen möglichen Combinations- oder Stoßtöne aus demselben.

Als ich diese nun kürzlich versuchte, bemerkte ich sehr bald, daß aus dem aufgestellten Princip je nach Umständen sowohl

---

1) Berichtigung des Pogg. Ann. CLVII p. 236 unter III ausgesprochenen Satzes in des Autors Buch „Quelques expériences d'Acoustique", p. 147, No. III.

2) H. Kayser, Wied. Ann. VI p. 465, 1879.

3) Lagrange, Misc. Soc. Taur. 1759.

die Helmholtz'schen — ich benutze der Kürze wegen diese Bezeichnung — Differenz- und Summationstöne als die König'schen Stoßtöne folgen, und daß die für das eine und andere maßgebenden Bedingungen sicher bei den König'schen, sehr wahrscheinlich bei den Helmholtz'schen Beobachtungen vorgelegen haben.

Die Ableitung der hiermit skizzirten Resultate bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung. —

Der allgemeinste Ansatz für eine aus zwei einfachen Sinusschwingungen zusammengesetzte Bewegung ist:

$$u = a_1 \sin(\tau_1 t - \delta_1) + a_2 \sin(\tau_2 t - \delta_2). \qquad 1.)$$

Hierin ist τ_λ kurz für $2\pi/T_\lambda$ gesetzt; es ist τ_λ also mit der Schwingungszahl n_λ proportional und mag beiläufig „Schwingungsindex" genannt werden. Der absolute Werth der Verzögerungen δ_1 und δ_2 kann durch Veränderung des Anfangspunktes für die Zeit t um gleiche Beträge geändert worden; gegeben zu denken ist nur die Differenz $\delta_2 - \delta_1 = \delta$. Wir setzen demgemäß $\delta_1 = 0$ $\delta_2 = \delta$.

Maxima und Minima von u finden statt für Werthe t_λ von t, gegeben durch die Gleichung:

$$0 = a_1\tau_1 \cos\tau_1 t_\lambda + a_2\tau_2 \cos(\tau_2 t_\lambda - \delta); \qquad 2.)$$

die ihnen entsprechenden Werthe von u seien mit U_λ bezeichnet, sodaß also gilt:

$$U_\lambda = a_1 \sin\tau_1 t_\lambda + a_2 \sin(\tau_2 t_\lambda - \delta). \qquad 3.)$$

Die Wurzeln t_λ der Gleichung (2) folgen im Allgemeinen kei nem einfachen Gesetz, indessen sind zwei specielle, in gewisser Hinsicht extreme Fälle leicht zu erledigen.

I. Es sei

$$a_1\tau_1 = a_2\tau_2$$

d. h. die lebendige Kraft beider zur Wechselwirkung gelangenden einfachen Schwingungen sei gleich[1]).

Dann schreibt sich die Gleichung (2)

$$\cos\tfrac{1}{2}((\tau_2 + \tau_1)t_\lambda - \delta) \cdot \cos\tfrac{1}{2}((\tau_2 - \tau_1)t_\lambda - \delta) = 0;$$

sie ergiebt zwei Gattungen von Wurzeln, die durch t'_λ und t''_λ bezeichnet seien und deren Werthe folgen aus

---

1) Dieser Fall ist von demjenigen gleicher Amplitude $a_1 = a_2$, der mitunter für theoretische Betrachtungen benutzt wird, wohl zu unterscheiden.

4.)
$$(\tau_2+\tau_1)t'_h-\delta = (2h+1)\pi,$$
$$(\tau_2-\tau_1)t''_h-\delta = (2h+1)\pi.$$

Die ihnen entsprechenden beiden Gattungen extremer Werthe von u, nämlich U'_h und U''_h finden wir am einfachsten, indem wir schreiben:

$$U_h = (a_2+a_1)\sin\frac{(\tau_2+\tau_1)t_h-\delta}{2}\cos\frac{(\tau_2-\tau_1)t_h-\delta}{2}$$
$$+(a_2-a_1)\sin\frac{(\tau_2-\tau_1)t_h-\delta}{2}\cos\frac{(\tau_2+\tau_1)t_h-\delta}{2}.$$

Da nämlich $\sin\left(\frac{2h+1}{2}\pi\right) = (-1)^h$ ist, so giebt sich:

5.)
$$U'_h = (-1)^h(a_2+a_1)\cos\frac{(\tau_2-\tau_1)t'_h-\delta}{2},$$
$$U''_h = (-1)^h(a_2-a_1)\cos\frac{(\tau_2+\tau_1)t''_h-\delta}{2}.$$

Diese Werthe ergeben aber, wenn man sie durch die stetig wachsenden t_h entsprechende Sinuslinien verbindet, wegen des Factors $(-1)^h$ keine einfache Sinuscurve, sondern die Superposition je zweier gleicher, welche um die halbe betreffende Periode gegeneinander verschoben sind; diese Combination besitzt die halbe Periode einer einfachen Reihe.

Hieraus folgt, daß bei der gemachten Voraussetzung gleicher lebendiger Kraft die beiden einfachen Sinusschwingungen absolute Maxima und Minima der resultirenden Amplituden liefern, in Perioden, wie sie zwei einfachen Tönen mit den Indices

$$\tau_2-\tau_1 \text{ und } \tau_2+\tau_1$$

entsprechen.

Die Wahrnehmung der beiden Gattungen von Perioden durch das Ohr wird um so deutlicher sein, je mehr Glieder der ganzen Reihen der U'_h resp. U''_h in einer jeden Periode vorhanden sind.

Man erkennt aus den Formeln (5) sogleich, daß wegen der Nenner, welche t'_h und t''_h in den Ausdrücken

6.)
$$t'_h = \frac{(2h+1)\pi+\delta}{\tau_2+\tau_1},\quad t''_h = \frac{(2h+1)\pi+\delta}{\tau_2-\tau_1}$$

besitzen, stets eine erheblich größere Zahl Glieder der U'_h in eine Periode fallen, als der U''_h; daraus folgt aber schon allein und ganz abgesehen von der Amplitude, daß bei den gemachten Annahmen die Differenztöne $(\tau_2-\tau_1)$ ungleich deutlicher wahrnehmbar sein müssen, als die Summationstöne.

Dies übersieht man noch deutlicher, wenn man die Schwingungszeiten dieser Töne und die Perioden der sie bildenden U_h in's Auge faßt. Für die Differenztöne sind die Schwingungsdauern T_- nämlich resp.

$$T_- = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

die Perioden P_- der U'_h gleich

$$P_- = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2},$$

für die Summationstöne umgekehrt, sodaß bei letzteren höchstens ein extremer Werth U''_h in jede Periode fällt.

Bildet man den vollständigen Werth

$$U'_h = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}(2h+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\tau_1 \delta}{\tau_2 - \tau_1}\right), \qquad 7.)$$

so erkennt man, daß für Töne, deren Indices dem Gesetz

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n+1$$

folgen, wie dies bei den Gliedern der Oktave, Quinte, Quarte, großer und kleiner Terz gilt, U''_h die Form annimmt:

$$U''_h = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left((2n+1)(2h+1)\frac{\pi}{2} + n\delta\right),$$
$$= (-1)^n (a_2 - a_1) \sin(n\delta).$$

Hieraus folgt, daß in den angegebenen Fällen die Glieder der Reihe der U'_h sämmtlich gleich sind; die dem Summationston entsprechende Periode dürfte hiernach für das Ohr ganz unwahrnehmbar sein, denn dieses wird eine Reihe gleicher Impulse offenbar nur als ein Ton derjenigen Schwingungsdauer empfunden werden, die dem Abstand der Impulse entspricht, d.h. hier als Differenzton.

Gilt ferner

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n+2,$$

wie dies bei der Duodecime und großen Sexte stattfindet, so haben wir

$$U'_h = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left((n+1)(2h+1)\frac{\pi}{2} + \frac{n\delta}{2}\right)$$
$$= \begin{cases} (-1)^{(h+m)} (a_2 - a_1) \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right) & \text{für gerades } n, \\ (-1)^{\left(h+\frac{n+1}{2}\right)} (a_2 - a_1) \cos\left(\frac{n\delta}{2}\right) & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Hier treten die Glieder der Reihe der U_k' zwar absolut gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen auf; wenn auch im Ganzen sehr unwahrscheinlich, dürfte hier schon eher die Wahrnehmung eines Summationstones möglich sein.

Erst Töne mit dem Verhältniß

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n+m \text{ für } m \geqq 3$$

geben den U_k' verschiedene absolute Werthe; von den Intervallen mit $m = 3$ kommt besonders die kleine Sexte in Betracht.

Nach dem im Vorstehenden Entwickelten kann es nicht Wunder nehmen, wenn die Frage der Wahrnehmbarkeit, ja der „Existenz" der Summationstöne sehr häufig in durchaus negativer Weise beantwortet wird. Selbst bei den im Obigen gemachten, wie wir sehen werden, günstigen Annahmen erscheint ihre Beobachtung im Falle die primären Töne das Intervall der Octave, Quinte, Quarte und Terz besitzen, fast ausgeschlossen, bei großer Sexte und Duodecime sehr fraglich.

Wenn also trotzdem von einzelnen Beobachtern Summationstöne gehört worden sind, so ist, falls diese Töne objectiv im äußern Luftraum nachweisbar waren, wahrscheinlich, daß bei ihren Experimenten die Schwingungen so große Elongationen besaßen, daß die lineäre Form der Schallgleichungen nicht mehr zulässig waren, — falls sie nur im Ohre zu Stande kamen, daß sie zu meist durch dessen anatomische Eigenthümlichkeiten bedingt waren[1]).

Wesentlich aber ist das Resultat, daß bei zwei einfachen Tönen gleicher lebendiger Kraft Differenztöne und Summationstöne theoretisch auch in Fällen auftreten können, wo das Princip der Coexistenz der Schwingungen anwendbar ist.

II. Sind die Amplituden des höheren Tones (τ_2) so viel kleiner, als die des tieferen (τ_1), daß die Zusammenwirkung beider nur eine Veränderung der Maxima und Minima der dem letzteren entsprechenden Elongationen u_1, aber keine neuen Maxima und Minima hervorruft, so ist in der Gleichung (2) $a_2\tau_2$ als klein gegen $a_1\tau_1$ zu betrachten.

Damit ist noch nicht vorausgesetzt, daß die wahrgenommene Intensität des höheren Tones erheblich unterhalb derjenigen des tieferen sein muß; es scheint vielmehr, daß bei zwei Tönen, die sich beträchtlich in ihrer Höhe unterscheiden — und auf diesen Fall kommt es im Folgenden besonders an — der tiefere uns erst

1) Vergl. übrigens W. Preyer, Wied. Ann. XXXVIII, p. 131, 1889.

bei erheblich größerer lebendigen Kraft der ausgesandten Bewegung vernehmbar wird, als der höhere.

Die Gleichung (2) läßt sich in diesem Falle durch eine Annährung behandeln, indem man die Wurzeln t_h, welche sich aus dem Verschwinden des ersten Gliedes allein als erste Näherung ergeben, nämlich

$$t_h = \frac{(2h+1)\pi}{2\tau_2}$$

in das zweite einsetzt, um dadurch eine zweite Näherung zu erhalten. Dies führt zu

$$a_1\tau_1 \cos \tau_1 t_h + a_2\tau_2 \cos\left(\frac{(2h+1)\tau_2\pi}{2\tau_1} - \delta\right) = 0$$

woraus folgt, wenn man das zweite Glied mit dem Factor $(-1)^h \sin \tau_1 t_h$, welcher in erster Näherung gleich 1 ist, multiplicirt:

$$\cos\left[\tau_1 t_h - \frac{a_2\tau_2}{a_1\tau_1}(-1)^h \cos\left(\frac{(2h+1)\tau_2\pi}{2\tau_1} - \delta\right)\right] = 0. \qquad 8.)$$

Wir erhalten also, indem wir das zweite Glied, welches erster Ordnung ist, kurz mit η_h bezeichnen, als Resultat:

$$\tau_1 t_h = \frac{2h+1}{2}\pi + \eta_h. \qquad 9.)$$

Der Werth von η_h ist hier nur für die Beurtheilung des Grades der Annährung von Bedeutung. Setzen wir nämlich das Resultat (8) in die Gleichung (3) ein, so folgt, wenn wir wieder zweite Ordnung vernachlässigen, der von η_h freie Werth:

$$U_h = a_1(-1)^h + a_2 \sin\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right). \qquad 10.)$$

Diesen Ausdruck können wir umformen, indem wir entweder

$$\tau_2 = \nu\tau_1 + \Delta' \qquad 11.)$$

oder

$$\tau_2 = (\nu+1)\tau_1 - \Delta''$$

setzen, worin also $\Delta' + \Delta'' = \tau_1$ sein muß und Δ' und Δ'' positiv sein mag.

Ist ν eine ganze Zahl, so sind $\nu\tau_1$ und $(\nu+1)\tau_1$ die Indices derjenigen harmonischen Obertönen des tieferen Tones, welche den höheren Ton direct einschließen.

Zugleich treten dann Glieder unter dem sinus in (10) hervor,

sodaß die Periode des zweiten Gliedes variirt. Wir erhalten nämlich

I.) falls ν gerade, $= 2\mu$ ist,
die beiden Formen

$$12.) \quad \begin{aligned} (U_h')_I &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^\mu \sin\left(\frac{\Delta'}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right), \\ (U_h'')_I &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^{\mu+h} \cos\left(\frac{\Delta''}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi + \delta\right), \end{aligned}$$

II.) falls ν ungerade, $= 2\mu+1$ ist, die anderen

$$13.) \quad \begin{aligned} (U_h')_{II} &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^{\mu+h} \cos\left(\frac{\Delta'}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right), \\ (U_h'')_{II} &= a_1(-1)^h + a_2(-1)^\mu \sin\left(\frac{\Delta''}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi + \delta\right). \end{aligned}$$

Die Periode dieser Ausdrücke, welche wegen der mit h wechselnden Vorzeichen einiger Glieder nicht sofort hervortritt, erkennt man am besten durch Betrachtung einer schematischen Figur, welche die U_h als Ordinaten über einer Abscisse, auf welcher h (oder t_h) aufgetragen ist, darstellt. Die sämmtlichen Werthe U_h stellen sich dann dar als discrete Punkte zweier gleicher Sinuslinien, deren eine um a oberhalb, die andere um a unterhalb der Abscissenaxe liegt. Bei $(U_h')_I$ und $(U_h')_{II}$ besitzen die vertical übereinanderliegenden Punkte gleiche Phase, bei $(U_h')_{II}$ und $(U_h'')_I$ um π verschiedene.

Die Periode in Bezug auf t_h ist

für $(U_h')_I$ und $(U_h')_{II}$ gleich $2\pi/\Delta'$
für $(U_h'')_I$ und $(U_h'')_{II}$ gleich $2\pi/\Delta''$

also übereinstimmend mit der zweier einfacher Töne von den Indices

$$\Delta' = \tau_2 - \nu\tau_1, \quad \Delta'' = (\nu+1)\tau_1 - \tau_2.$$

Wiederum wird diejenige Periode von beiden am hervortretendsten, derjenige Ton am deutlichsten sein, für welchen die größte Zahl von Werthen U_h innerhalb einer Periode auftritt, und dies ist ersichtlich immer derjenige, für welchen der Index Δ' resp. Δ'' der kleinere ist.

Wenn hierin eine vollständige Analogie zu den Resultaten des vorigen Abschnittes besteht, so findet in anderer Hinsicht eine wichtige Abweichung statt.

Dort ergab sich das Vorhandensein von zwei Arten extre-

mer Werthe U_k, die für sich je eine verschiedene Periode besitzen.

Hier ergiebt sich nur eine Art von extremen Werthen, aber sie haben die Eigenschaft, sich als Ordinaten zweier verschiedener Curven mit zwei verschiedenen Perioden ansehen zu lassen. Offenbar liegt hierin ein Moment, welches es dem Ohr erschweren muß, die beiden Perioden gesondert wahrzunehmen.

Daß Herr König unter Umständen beobachtet hat, welche den vorstehend gemachten Voraussetzungen nahe entsprechen, möchte man schon daraus schließen, daß bei angeschlagenen Stimmgabeln die höheren Töne wegen der inneren Reibung schneller zur Ruhe kommen, als die tieferen, — die Betrachtung der Curven, die er mit seinen Stimmgabeln aufgezeichnet hat, macht es zur Gewißheit. Denn obwohl dieselben natürlich mit möglichst großen Elongationen, also im Anfang des Zusammenklanges hergestellt sind und kaum das Intervall einiger Secunden umfassen dürften, ist nach dem Ende desselben hin das Eintreten des von uns vorausgesetzten Zustandes, daß der höhere Ton nur die Maxima der Elongationen des tieferen verändert, aber keine neuen hervorbringt, deutlich vorbereitet, bei einigen schon eingetreten, indem nämlich die Kräuselungen der Curven keine Gipfel mehr haben, sondern nur die Gestalt abgerundeter Stufen besitzen.

In der That stimmen alle oben gezogenen theoretischen Folgerungen auf das Genauste mit den von Herrn König gemachten Beobachtungen, was ich des Raumes wegen hier auszuführen unterlassen will. —

In den Fällen, die zwischen den oben betrachteten extremen liegen, wird sich ein mittlerer Zustand einstellen. Je mehr die lebendige Kraft des obern Tones von der Gleichheit mit der des tieferen aus abnimmt, um so mehr müssen die Helmholtz'schen Differenz- und Summationstöne verschwinden und die König'schen hervortreten und umgekehrt.

Damit stimmt überein, daß Herr König in einigen wenigen Fällen neben seinen „Stoßtönen“ einen von ihnen abweichenden Differenzton gehört hat.

Göttingen, 3. Mai 1890.

Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des Indischen Archipels.

Vorläufige Mittheilung

von

Clemens Hartlaub.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Unter der reichen zoologischen Ausbeute, welche der leider so früh verstorbene Prof. J. Brock im Indischen Archipel, und zwar vorwiegend auf Amboina gesammelt, und der Sammlung des zoolog.-zootomischen Instituts in Göttingen überwiesen hat, nehmen die Comatuliden einen hervorragenden Platz ein sowohl durch eine verhältnißmäßig große Artenzahl als auch durch die Menge der von einzelnen Species mitgebrachten Exemplare.

Da die Bearbeitung dieser Sammlung Veranlassung zu einem Besuch einiger größerer Museen gab, stellte es sich als wünschenswerth heraus, auch das Material dieser in den Kreis der Untersuchung zu ziehen. So wurden besonders die neuen Arten des Berliner und Hamburger Museums beschrieben und unter ihnen auch manche unter Lütkenschen M. S. Namen bereits bekannte Form.

Bis zur Veröffentlichung meiner mit zahlreichen Abbildungen versehenen Arbeit dürfte noch einige Zeit hingehen, und erlaube ich mir daher die Beschreibungen der neuen Arten in Kürze schon jetzt mitzutheilen.

Uebersicht der neuen Arten.

I. Genus Antedon de Fréminville.

A. 10 Arme.

I. »Langgliedrige untere Pinnulae« (Tenella-Gruppe Carp.)

a. Pinnulae des zweiten und vierten Brachiale ganz kurz — **1) nana**

b. Pinnula des 2ten Br. 3 mal so lang wie die des 4ten . . 2) Hupferi.

II. »das erste Paar Pinnulae relativ klein und die sie zusammensetzenden Glieder nur wenig länger wie breit; Eine oder mehrere Pinnulae des zweiten dritten und vierten Paares sind länger und massiver mit dickeren Gliedern als die darauf folgenden« (Milberti-Gruppe Carp.)

a. 40—50 Cirren ohne Dornen. Armglieder scheibenförmig. — (Große, plumpe Form) . . . . . 3) afra Ltk. M. S.

b. circa 19 Cirren; die äußeren Glieder dornig. Armglieder stumpf keilförmig. — (Kleine zierliche Form.) . . . . 4) japonica.

B. Mehr als 10 Arme.

I. »Arten mit zweigliedrigen Distichalstämmen, deren radiale Axillaria und zunächst folgende Glieder abgeplattete Seiten haben und deren Pinnulae ein deutliches Ambulacralskelett besitzen« (**Spinifera-Gruppe** Carp.)

Centrodorsale conisch. Cirren in 10 vertikalen Reihen . 5) conifera.

II. »Arten mit zweigliedrigen Distichalstämmen, einer nicht getäfelten Scheibe und keinem bestimmten Ambulacralskelett. Die Seiten der unteren Brachialia sind nicht oder nur sehr wenig abgeplattet. Die erste Pinnula kleiner als die folgenden« (**Palmata-Gruppe** Carp.)

a. Keine Pinnula am 3ten Brachiale . . . . . 6) Clarae.

b. Eine Pinnula am 3ten Brachiale; Zwei oder mehrere postradiale Axillaria; zweite Pinnula länger wie die dritte.

1) die Radien seitlich mehr oder minder frei.

α) die zweite Pinnula hat 25 oder mehr Glieder, die nicht besonders verlängert sind.

α′) Die unteren Pinnulae nicht steif und griffelförmig.

i) Zweite Radialia vollkommen frei.

i′) Nicht über 20 Arme. Die Radien weichen stark auseinander.

Glieder der unteren Pinnulae mit vorstehenden distalen Rändern . . . . . 7) bella.

Glieder der unteren Pinnulae glatt . . . 8) Klunzingeri.

i″) Ueber 20 Arme; die Radien weichen schwach auseinander . . . . . 9) lepida.

ii) Zweite Radialia mehr oder minder vereinigt. Ueber 20 Arme. 60—80 Cirrusglieder. Die Seiten der Radien häufig abgeplattet . . . . 10) Finschii.

β′) Die ersten vier Paar Pinnulae steif und griffelförmig . . . . . 11) erinacea.

β) Die zweite Pinnula steif und griffelförmig mit 12—18 stark verlängerten Gliedern.

α′) Erste Pinnula wie die zweite . . . . . 12) tenuipinna.

β′) Erste Pinnula kürzer wie die zweite, aber aus zahlreicheren Gliedern zusammengesetzt.

i) Die Radien haben Erhabenheiten an ihrem Rande.

Dritte äußere Pinnula von dem Charakter der zweiten und wenig oder gar nicht kürzer . . 13) oxyacantha.

Dritte Pinnula viel kürzer als die zweite und nicht steif und griffelförmig . . . . . 14) monacantha.

ii) Die Radien haben keine Erhabenheiten an ihrem Rande.

12 Arme. Zweite Pinnula mit 8—10 langen Gliedern . . . . . 15) spinipinna.

2) die Radien seitlich mehr oder minder in Berührung.

α) Die unteren Pinnulae größer an den äußeren Armen eines jeden Distichums als an den inneren.

α') Zweite Pinnula kräftig; dritte ganz kurz . . . 16) protecta.
β') Untere Pinnulae sehr dünn, mit Neigung zur Kielung . . . . . 17) tenera. (Ltk. [M.S.)
β) Die unteren Pinnulae annähernd gleich groß an allen Armen.
α') Keine Postpalmaria . . . . . 18) amboinensis.
β') Postpalmaria . . . . . tenera. (Ltk. M.S.)

III. »Drei Distichalia; Scheibe ungetäfelt; kein bestimmtes Ambulacralskelett; die Basis der Radien seitlich nicht abgeplattet« (**Savignyi-Gruppe** Carp.)
a. Keine Palmaria.
Untere Pinnulae gekielt. Aeußere Cirrusglieder dornig. 19) bengalensis.
b. Palmaria.
1) Zwei Palmaria, das Axillare ohne Syzygie.
α) Distichale Pinnula sehr dick.
Die Armglieder haben vom dritten an stark aufgeworfene distale Ränder. Die Gliedergröße der distichalen Pinnula nimmt sprungweise ab. 20) Martensi.
Die basalen Armglieder sind glatter verbunden als die übrigen. Die Dicke der distichalen Pinnula nimmt nach ihrem Ende allmälig ab. 21) Kraepelini.
β) Distichale Pinnula nicht durch besondere Dicke ausgezeichnet.
α') 25—35 Cirrusglieder.
Glieder der unteren Pinnulae mit vorstehenden, dornigen distalen Rändern . . . . . 22) Brockii
Pinnulae der proximalen Armregion gekielt . . 23) affinis
β') 35—55 Cirrusglieder, äußere Cirrusglieder dornig 24) nematodon (Ltk. M. S.)
2) Zweigliedrige und dreigliedrige Palmarserien . . . 25) crassipinna

II. Genus Actinometra J. Müller.

I. »Drei distichale Arten mit einer Pinnula am ersten Brachiale und einer Syzygie im zweiten. Die palmaren und postpalmaren Stämme, wenn vorhanden, bestehen aus zwei Gliedern, von denen das erste eine Pinnula trägt und das zweite (Axillare) eine Syzygie enthält.« (**Fimbriata-Gruppe** Carp.)
Centrodorsale klein, flach, ohne eine Spur von Cirren . 26) macrobrachius (Ltk. M. S.)

II. Drei Distichalia. Zwei Palmaria; letztere durch Syzygie verbunden. Erste Armsyzygie zwischen erstem und zweitem Brachiale.
Centrodorsale klein; keine Spur von Cirren . . . . . 27) gracilis.

1. Antedon nana n. sp.

Syn. *Antedon macropygus* Ltk. M. S.

Centrodorsale ziemlich groß, convex. 30—40 zarte Cirren in

3 Reihen. Cirren 6 mm lang mit 10—12 stundenglasförmigen, stark verlängerten Gliedern; vorletzte mit starkem Dorn.

Erste Radiale verborgen, zweite auch ein wenig. Axillare rhombisch.

10 glatte Arme mit ziemlich großen Gliedern. Erstes Glied ganz kurz, in geringer Berührung mit dem des Nachbararmes. Zweite bedeutend länger, von unregelmäßiger Form. Glieder vom 9ten an fast dreieckig mit einer spitzen, übergreifenden Hervorragung auf der langen Seite. Syzygiale Glieder ziemlich lang.

Zweite Syzygie im 8ten Brachiale, dann eine im 12ten und die folgenden in Zwischenräumen von 2.

Die unteren Pinnulae haben stark verlängerte Glieder, die beiden ersten Paare ganz kurz und ziemlich gleichförmig; 25 mm lang; 7—9 Glieder. Pin. des 6ten Br. 7 mm lang mit —16 stark verlängerten Gliedern. Die folgende (8te Br.) beträchtlich kürzer; dann nimmt die Länge wieder zu und erreicht 7 mm.

Scheibe: 3 mm Dm.

Klafterung: 5—6 cm.

Amboina (Göttingen). Tonga-Inseln (Hamburg).

2. **Antedon Hupferi** n. sp.

Centrodorsale scheibenförmig von mäßiger Größe. Etwa 25 dünne Cirren in drei Reihen. Die Cirren messen 11 mm; 15 ziemlich stark verlängerte Glieder; nur das vorletzte mit Dorn.

Erste Radialia ein wenig sichtbar; die zweiten breit und kurz, durch einen dünnen plattenförmigen Seitenfortsatz des äußeren Randes verbunden. Axillare dreieckig, mit sehr spitzem distalen Winkel. Seine Basis ein wenig nach hinten ausgeschweift, die Seiten leicht eingekrümmt.

10 Arme von ziemlich glatter Oberfläche. Glieder vom 10ten an dreieckig, weiterhin stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie im 8ten Br., die folgenden in Zwischenräumen von 2—3 Gliedern.

Pin. des 2ten Br. etwa 10 mm lang mit etwa 20 stark verlängerten Gliedern, von denen die äußeren vortretende, Dörnchen tragende distale Ränder besitzen. Pin. des 4ten Br. meist nur $^1/_3$ so lang mit etwa 8 Gliedern, von denen die 3 basalen ziemlich verbreitert, die übrigen aber lang sind. Die distalen Pin. erreichen 9 mm Länge. Sacculi an den Pin. ziemlich weitläufig stehend und klein.

Scheibe: 7 mm Dm. nicht eingeschnitten.

Klafterung: 7 cm.

Farbe: schmutzig weiß.

Wapoo. (W. Africa.) 21 Faden. Ein Exemplar. (Hamburg, durch Capitain Hupfer.)

---

3. **Antedon afra** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale dick, abgestumpft conisch. 40—50 Cirren in 2 oder stellenweise 3 regelmäßigen Reihen. Cirren sehr dick; 30 mm lang, mit etwa 30 sehr gleichförmigen, dornenlosen, kurzen Gliedern. Auch das vorletzte Glied meist ohne Dorn.

Erste Radialia ein wenig sichtbar; die zweiten kurz, in seitlicher Berührung. Axillaria kurz, dreieckig.

10 sehr massive Arme, von rauher Oberfläche. Sämmtliche Glieder scheibenförmig. Die beiden ersten beträchtlich größer als die übrigen. Glieder vom 9ten an sehr kurz, mit stark vorstehendem, häufig etwas wellig gebogenem distalen Rande.

Zweite Syzygie im 8ten Br., die folgenden in Zwischenräumen von 2—3.

Die Pin. des 2ten Br. 28 mm, die des 3ten 20 mm lang. Beide in ihrer proximalen Hälfte mit der Scheibe verwachsen. Sie verdünnen sich stark in ihrer distalen Hälfte und sind nicht so dick und fleischig wie die folgenden. Pin. des 4ten Br. so lang wie die des zweiten. Pin. des 6ten Br. etwas länger. Dann nimmt die Länge ganz allmälig ab bis zum Ende des ersten Armviertels, wo sie noch 14 mm beträgt. Mit Ausnahme des ersten Paares haben alle diese Pinnulae stark entwickelte Genitaldrüsen. Die Pinnulae messen am Ende des ersten Armviertels etwa 24 mm.

Scheibe: 25 mm Dm., nicht eingeschnitten.

Klafterung: wahrscheinlich 38 cm.

Farbe: schwarz.

Bowen. Ein Exemplar. (Hamburg.)

4. **Antedon japonica** n. sp.

Centrodorsale ziemlich dick scheibenförmig mit leicht eingesenkter Oberfläche. Ungefähr 19 randständige Cirren in 2 Reihen; circa 20 kurze Glieder, von denen die äußeren kleine dornige Transversalleisten haben können.

Erste Radialia etwas sichtbar; zweite seitlich frei. Axillare kurz, pentagonal. Ein kleiner Höcker auf der Verbindung des zweiten mit dem Axillare.

10 Arme von ziemlich rauher Oberfläche. Auf der Verbindung der beiden ersten Glieder ein kleiner Höcker. Glieder vom 10ten an,

mit Ausnahme der syzygialen, keilförmig, etwas übergreifend, mit vorstehenden distalen Rändern.

Zweite Syzygie meist im 8ten Gliede; die folgenden häufig in Zwischenräumen von 2—3.

Pinnula des 2ten Brachiale sich schnell verdünnend nach den basalen Gliedern, die Neigung zur Kielung haben; $^2/_3$ oder fast so lang wie die Pin. des 4ten und 6ten Br., die sich allmäliger verdünnen. Diese messen 5 mm und bestehen, wie die erste aus etwa 12 ziemlich flachen, breiten Gliedern. Die zwei folgenden Pinnulae (8te und 10te Br.) nehmen an Länge ab.

Scheibe: verloren.

Klafterung: circa 8 cm.

Japan. Ein Exemplar. (Berlin, durch F. Hilgendorf).

Die Art steht am nächsten *Antedon serripinna* Carp.

---

5. **Antedon conifera** n. sp.

Centrodorsale conisch, mit weiter, pentagonal sternförmiger Basis und interradial nach abwärts vorspringenden Ecken. Gegen 40 Cirrusdillen in 10 verticalen Reihen, jede zu 4 Cirren. Die Reihen sind getrennt durch ziemlich niedrige radiale und interradiale Leisten, von denen die letzteren länger sind und bis an die Ecken der pentagonalen Basis des Centrodorsale reichen. Die 10 Leisten sind von gleicher Stärke. Cirren ziemlich dick, 45 mm lang. Circa 70 Glieder; an den äußeren ein dorsales Knöpfchen; keine eigentlichen Dornen. Cirren sind, wenn trocken, elfenbeinähnlich.

Erste Radialia eben sichtbar; die zweiten kurz, seitlich vereinigt. Axillare rhombisch. Theilung der Radien zweifach. 2 Distichalia, das Axillare ohne Syzygie. Radialia, Distichalia und erste Brachialia haben abgeplattete Seiten. Auf der Verbindung der Axillaria mit dem vorhergehenden Gliede ein Höcker.

20 dicke Arme von rauher Oberfläche. Erstes Glied ziemlich kurz, rhombisch, eng vereinigt mit dem Nachbargliede. Zweites Glied bedeutend länger. Glieder, etwa vom 10ten an, dreieckig, übergreifend; weiterhin stumpfer keilförmig. Alle Glieder haben vorstehende, fein gezähnte distale Ränder. Der äußerste Theil des Armes hat eine scharfe dorsale Längsleiste.

Zweite Syzygie vom 18ten—25sten Br., meist im 25sten. Die folgenden in Zwischenräumen von 3—7. Die syzygialen Verbindungen sind nicht glatt, sondern ganz ähnlich den gelenkigen.

Das erste Paar Pinnulae 11 mm lang mit 15—20 relativ rundlichen Gliedern, von denen die basalen ziemlich dick, die übrigen dünn sind. Die drei folgenden Paare nehmen allmälig an Länge

ab. Ihre Glieder flacher und breiter. Pin. des 9ten Br. 4 mm. Die äußeren Pinnulae erreichen 11 mm. Sacculi klein und spärlich. Pin. Ambulacra getäfelt.

Scheibe: 14 mm Dm.

Klafterung: wahrscheinlich 14 cm.

Färbung des Skelettes: bräunlich weiß.

Japan. Ein Exemplar. (Berlin durch F. Hilgendorf.)

Die nächstverwandte Art ist *Antedon quinquecostata* Carp.

Distichalia 2gliedrig.

6. **Antedon Clarae** n. sp.

Centrodorsale mäßig groß, leicht gehöhlt. 21 randständige Cirren in einer regelmäßigen Reihe; ungefähr 25 kurze und ziemlich gleichförmige Glieder. Dieselben tragen im proximalen Cirrustheile eine dorsale Querleiste, die im distalen Theile allmälig in kleine Dornen übergeht.

Erste Radialia ein wenig sichtbar; zweite ganz frei seitlich. Axillaria pentagonal. Keine Palmaria. Zwei Distichalserien vorhanden, eine zweigliedrig, die andere dreigliedrig, Axillaria ohne Syzygie. Aeußerer Rand der Radien glatt. Verbindungen der Axillaria mit dem vorhergehenden Gliede etwas buckelig.

12 glatte Arme mit kurzen Gliedern. Glieder keilförmig.

Zweite Syzygie vom 8ten—13ten Gliede, die folgenden in Zwischenräumen von 4—8.

Das 3te Brachiale trägt keine Pinnula. Pin. des 2ten Br. nahezu so lang wie die des 4ten. Diese ist ziemlich schlank, mißt 7 mm und besteht aus 15—20 cylindrischen Gliedern. Die darauf zunächst folgenden Pinnulae bedeutend kürzer. Länge nimmt vom 10ten Gliede an wieder zu und erreicht 12 mm.

Scheibe nur schwach eingeschnitten. 12 mm. Dm.

Klafterung: 20 cm.

Amboina. Ein Exemplar.

7. **Antedon bella** n. sp.

Centrodorsale mäßig dick. Cirrusfreie Oberfläche klein. 10—20 dicke Cirren von circa 40 gleichförmigen Gliedern und 23 mm Länge. Aeußere Glieder mit zwei dorsalen Dörnchen.

Erste Radiale zuweilen theilweise verborgen; die zweiten manchmal ganz frei seitlich. Radien treten weit auseinander. Ihr äußerer Rand zeigt ziemlich starke Verdickungen. Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede buckelig. Keine Postpalmaria.

Nicht mehr als 20 Arme, von denen gelegentlich einige erster

Ordnung[1]). Glieder dreieckig und weiterhin stumpfer keilförmig; Ihre Ränder vortretend, fein gezähnt, und etwas übergreifend.

Zweite Syzygie vom 23sten—50sten Gliede, die folgenden in Zwischenräumen von meist 9—10.

Pinnula des 2ten Brachiale halb so lang wie die folgende, von relativ glatten Gliedern. Die des 4ten Br. bedeutend dicker und ziemlich steif; Länge 8—9 mm; 12—22 Glieder mit stark vortretenden distalen Rändern, die fein gezähnt oder selbst dornig sind. Die folgende Pin. (6te Br.) viel kleiner, kürzer als die des 2ten Br., von glatten Gliedern und dem Charakter der nachstehenden Pinnulae, welche an Länge zunehmen.

Skelett der Arme und Pinnulae von einer eigenthümlichen dicken, graublauen Haut bekleidet, die sich auch auf die Randblättchen der Pin. erstreckt und sie sehr augenfällig macht.

Scheibe stark eingeschnitten; 11 mm Dm.

Klafterung: 23 cm.

Färbung des Skelettes graublau mit rothbrauner Punktirung von theilweise regelmäßiger Vertheilung.

Noordwachter Eiland. 15—20 Faden. (Göttingen.)

8. **Antedon Klunzingeri** n. sp.

Centrodorsale annähernd halbkuglig, ganz bedeckt mit Cirrusdillen. Zahl der Cirren wahrscheinlich etwa 30.

Erste Radialia etwas sichtbar; zweite vollkommen frei seitlich; Axillaria pentagonal, nicht doppelt so lang wie die zweiten Radialia, mit ziemlich spitzem Winkel und leicht eingebogenen distalen Gelenkseiten. Theilungsart der Radien unregelmäßig. Keine Postpalmaria. Höchste Armzahl eines Radius 4.

17 Arme von glatter Oberfläche und ziemlich kurzen Gliedern. Glieder vom 9ten an zuerst dreieckig aber bald in mehr scheibenförmige übergehend.

Zweite Syzygie im 14ten Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 7—10 Gliedern.

Erste Pinnula etwa 8 mm lang, etwas dünner und kürzer als die folgende. Diese (4te Br.) mißt etwa 10 mm mit 15—20, der Mehrzahl nach länglichen, glatten Gliedern. Die folgende Pin.

---

1) Arme erster Ordnung nenne ich solche, die von einem Radiale axillare entspringen, Arme zweiter Ordnung solche, die von einem Distichale axillare ihren Ursprung nehmen u. s. f. Die radialen, distichalen, palmaren etc. Theilungsserien bezeichne ich im Gegensatz zu den sich nicht weitertheilenden »Armen« als »Stämme« und zwar die radialen als Stämme erster Ordnung, die distichalen als Stämme zweiter Ordnung u. s. w.

(6te Br.) hat die Größe der ersten. Dann kommt die kürzeste, nach welcher die Länge wieder zunimmt und etwa 13 mm erreicht, so daß also die größte Länge der äußeren Pinnulae die des zweiten Paares übertrifft.

Scheibe fehlt.

Klafterung: 20 cm.

Färbung: schmutzig weiß, mit hellbraunen Binden auf den Armen.

Koseir. Ein Exemplar, (Stuttgart durch Klunzinger.)

9. **Antedon lepida** n. sp.

Centrodorsale convex, etwa 18 Cirren von 12 mm Länge und 20—25 Gliedern. Aeußere Glieder dornig.

Erste Radialia etwas sichtbar; die zweiten kurz, frei an den Seiten. Axillaria kurz. Keine Postpalmaria. Palmaria nur von der Außenseite der distichalen Axillaria. 6 Arme zu jedem Radius. Radien weichen nur wenig auseinander.

30 Arme von glatter Oberfläche. Glieder dreieckig, weiterhin stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie um das 14te Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 5—6 Gliedern.

Untere Pinnulae von sehr zartem Bau. Pin. des 2ten Br. 4 mm; die des 4ten Br. 9 mm, mit etwa 20 Gliedern, von denen die äußeren etwas länglich sind. Die folgende Pin. (6te Br.) annähernd von gleicher Länge, ein bischen kleiner. Die des 8ten Br. beträchtlich kleiner; die des 10ten u. 12ten Br. 3 mm. Dann nimmt die Länge zu und erreicht 5 mm.

Scheibe: 10 mm Dm. Tief eingeschnitten.

Klafterung: 8 cm.

Tonga-Inseln. 2 Exemplare. (Hamburg.)

Die Art ist durch sehr zierlichen Bau ausgezeichnet sowie dadurch, daß die 3te Pin. fast die Länge der zweiten hat. Charakteristisch sind ferner die Dornen der äußeren Cirrusglieder, sowie der Umstand, daß die zweiten Radialia sich seitlich nicht berühren, trotzdem die Radien sehr wenig auseinanderweichen.

10. **Antedon Finschii** n. sp.

Centrodorsale halbkuglig, mehr oder minder vollständig bedeckt mit langen, dünnen Cirren, von 6 cm Länge und 60—80 Gliedern; äußere Glieder dornig.

Erste Radialia zuweilen ganz sichtbar, ziemlich vertical stehend; die zweiten theilweise seitlich vereinigt. Axillaria relativ

lang, pentagonal. Theilung der Radien dreifach, einzeln vierfach. Postpalmaria, wenn vorhanden, entspringen von der Innenseite der inneren palmaren Axillaria. Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede buckelig. An den Außenrändern der Radien gelegentlich stark vorspringende Leisten mit abgeplatteter Außenseite oder starken Kerben.

Etwa 40 glatte, lange, ziemlich dünne Arme, deren unterste Glieder abgeplattete Seiten haben. 3tes Glied (Syzygie) länger wie breit. Mehrzahl der Glieder ziemlich kurz, dreieckig.

Zweite Syzygie vom 38sten—45sten Gliede. Die folgenden häufig in Zwischenräumen von 4—9.

Untere Pinnulae auf beiden Armseiten gleich lang. Pin. des 2ten Br. meist so lang wie die des 4ten. Diese ist etwas dicker, 11 mm. lang und von 20 ziemlich gleichförmigen Gliedern. Die 3 oder 4 folgenden Pinnulae nehmen an Länge ab; kleinste 5 mm.

Scheibe: stark eingeschnitten. 16 mm Dm.

Klafterung: 28 cm.

Neu-Britannien. Vier Exemplare, (Berlin, durch Dr. O. Finsch).

11. **Antedon erinacea** n. sp.

Centrodorsale groß, halbkuglig, fast ganz mit Cirren bedeckt; Die Cirren, etwa 25 an Zahl, ziemlich dünn und schlank; Länge 4 cm; Gliederzahl 50—60; an den äußeren Gliedern manchmal kleine Dornen.

Erste Radialia fast verborgen; die zweiten seitlich halb vereinigt. Axillaria pentagonal. Theilung der Radien vierfach. Postpalmaria nur von der Außenseite der palmaren Axillaria entspringend. Aeußerer Rand der Radien glatt. Auf der Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede ein kleiner Höcker.

51, vollkommen glatte, dünne Arme von relativ geringer Länge. Glieder ziemlich scharf keilförmig, weiterhin abgestumpfter.

Zweite Syzygie vom 40sten—50sten Gliede; die folgenden in Zwischenräumen von 8—9.

Die Scheibe ist umgeben von einem dichten Kranz gestreckt dornartiger Pinnulae. Pin. des 2ten und 4ten Brachiale etwa 14 mm lang; ganz steif und spitz dornförmig; beide mit 25 kurzen Gliedern. Die folgenden zwei Pinnulae von gleichem Charakter, an Länge abnehmend. Am äußeren Arme auch die Pinnula des 10ten Br. noch steif; 5 mm lang. Pin. des 12ten u. 14ten Br. ganz klein, dann nimmt die Länge zu.

Scheibe fehlt.

Klafterung etwa 21 cm.

Cebu Islands. Ein Exemplar. (Hamburg, durch Capitän Ringe.)

12. **Antedon tenuipinna** n. sp.

Centrodorsale convex. 15 Cirren; circa 20 Glieder, davon das 6te—8te verlängert; vom 9ten an mit einem aufgerichteten, scharfen Dorne und zwei horizontalen Dornen, je einem an jedem Ende des Gliedes.

Erste Radialia sichtbar; zweite seitlich ganz frei. Axillaria pentagonal. Zwei Radien theilen sich zweifach, einer dreifach und zwei einfach. Aeußerer Rand gekerbt. — Dorsal keine Höcker.

16 glatte, schlanke Arme, von ziemlich langen Gliedern. Glieder stumpf keilförmig. Die syzygialen Glieder lang.

Die zweite Syzygie (mit Ausnahme der Arme erster Ordnung) um das 15te Glied herum, die folgenden in Zwischenräumen von 4—7.

Die zwei ersten Pinnulae (2te u. 4te Br.) gleich lang und dick, 7 mm, steif und gerade dornförmig; etwa 8 stark verlängerte Glieder. Folgende von gleichem Charakter, aber nur 4 mm lang. Pin. des 8ten Br. weniger steif und nicht 3 mm erreichend. — Die distalen Pinnulae sehr zart und haarähnlich; bis 7 mm. Sacculi nicht zahlreich.

Scheibe: 11 mm Dm. nur wenig eingeschnitten.

Klafterung: 12,5 cm.

Neu-Britannien. Ein Exemplar. (Berlin, durch Dr. O. Finsch.)

13. **Antedon oxyacantha** n. sp.

Centrodorsale dick, seitlich gewölbt. 30—35 ziemlich dünne, etwas comprimirte Cirren in 2 unregelmäßigen Reihen; circa 25 Glieder; Länge 28 mm.

Erste Radialia verborgen; zweite seitlich ganz frei. Keine Postpalmaria; Palmaria entspringen nur von der Außenseite der distichalen Axillaria, so daß zu jedem Radius 6 Arme gehören. Auf der Verbindung der Axillaria mit dem vorangehenden Gliede ein Höcker. Aeußerer Rand der Radien mit kleinen Verdickungen.

In der Regel 30 Arme, von ziemlich glatter Oberfläche. Glieder kurz, dreieckig und weiterhin stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie vom 12ten bis 25sten Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 7—10 Gliedern.

Erste Pinnula schlank und geißelförmig; 27 etwas längliche Glieder; 15 mm lang. Die drei oder vier folgenden Pin. dicker, ganz steif und gestreckt dornförmig, mit wenigen, stark verlän-

gerten Gliedern. Pin. des 4ten u. 6ten Br. bis 20 mm lang; 12—13 Glieder.

Scheibe: eingeschnitten; 15 mm Dm.

Klafterung: 20—28 cm.

Amboina.

Die Art unterscheidet sich von der nahe verwandten *Antedon spicata* Carp. durch die Beschaffenheit ihrer äußeren Pinulae, die nicht „slender and filiform" sind, und ferner dadurch, daß die Pin. des 4ten—10ten Br. steif und dornförmig sein können, während bei *Antedon spicata* nur die des 4ten und 6ten Br. diesen Charakter besitzen. Auch ist die Gliederzahl der Pin. des 4ten Br. bei letzterer Art eine größere („16 und mehr"). Durch die geringe Gliederzahl und große Länge der Glieder dieser Pinnula nähert sich die neue Species der *Antedon tuberculata* Carp. Bemerkenswerth ist schließlich die geringe Längendifferenz zwischen der 2ten und 3ten Pin. unsrer Art; die Pin. des 4ten Br. kann sogar die des 6ten an Länge übertreffen.

14. **Antedon monacantha** n. sp.

Centrodorsale gewölbt. Etwa 30 Cirren in 3 unregelmäßigen Reihen. Gliederzahl circa 20.

Erste Radialia ein bischen sichtbar; zweite ganz frei seitlich. Keine Palmaria. Aeußerer Rand der Radien (vom 2ten Radiale bis 1. Br.) mit ziemlich starken unregelmäßigen Verdickungen. Verbindung der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede etwas buckelig.

17 glatte Arme, wovon 3 erster Ordnung. Glieder vom 8ten an fast dreieckig, aber weiterhin bald stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie (mit Ausnahme von Armen erster Ordnung) um das 12te Glied herum. Die folgenden in Zwischenräumen von 2—4.

Pinnula des 2ten Br. schlank und biegsam, etwa halb so lang wie die folgende; 15 Glieder, Mehrzahl länger wie dick. Pin. des 4ten Br. viel dicker, dabei ganz steif, grade und dornförmig; 9—10 mm lang; circa 12 sehr verlängerte Glieder. Pin. des 6ten Br. nicht halb so lang, biegsam und vom Charakter der folgenden Pinnulae. Länge dieser nimmt zu vom 7ten Paare an.

Scheibe: 11 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: 17 cm.

Mortlock-Inseln. (Göttingen; Hamburg.) Torres-Str.

15. **Antedon spinipinna** n. sp.

Centrodorsale convex. 15—20 feine und etwas comprimirte Cirren, in 2 unregelmäßigen Reihen; etwa 15 Glieder, 4te—9te verlängert.

Erste Radialia sichtbar; zweite frei seitlich. Mehrzahl der Radien theilt sich einfach. Keine Palmaria. Aeußerer Rand glatt; keine Höcker auf den Verbindungen der Stammglieder.

12 glatte Arme. Glieder keilförmig.

Zweite Syzygie im 8ten Brachiale; dann in Zwischenräumen von 2—3 Gliedern.

Pinnula des 2ten Br. etwas steif und griffelförmig; ungefähr 12 verlängerte Glieder. Die des 4ten Br. bedeutend dicker und ein gutes Theil länger; ganz steif und griffelförmig, einem graden spitzen Dorne gleichend; Länge 6 mm; 8—10 sehr lange Glieder. Die beiden folgenden Pinnulae weniger steif und an Länge abnehmend.

Scheibe: 7 mm Dm. Nicht eingeschnitten.

Klafterung: 7 cm.

Amboina. Ein Exemplar.

16. **Antedon protecta** (Ltk. M. S.) n. sp.

?Syn.: Antedon imparipinna Carp.

Centrodorsale mäßig groß bis groß. 25—46 Cirren in 2 oder theilweise 3 Reihen; 22—25 ziemlich gleichmäßige Glieder; Dorn des vorletzten gewöhnlich schwach.

Erste Radialia theilweise oder ganz verborgen; zweite meist in partieller Berührung; kurz. Axillaria pentagonal. Die Radien meist in ziemlich enger Berührung. Radien theilen sich dreifach. Außenrand der Stämme gelegentlich gekerbt.

Gewöhnlich gegen 40 Arme. Mehrzahl der Glieder dreieckig und stumpfer keilförmig.

Zweite Armsyzygie vom 12ten—16ten Gliede; die folgenden in Zwischenräumen von 7—10.

Die beiden äußeren der 4 zu einer distichalen Gruppe gehörenden Arme tragen größere untere Pinnulae als die inneren.

Pinnula des 2ten Brachiale dünn; 12—35 Glieder; etwa so lang wie die folgende. Pin. des 4ten Br. viel dicker, ziemlich steif und bei weitem die stärkste Pin. des Armes; 14 bis über 30 glatte, cylindrische Glieder; Länge 10—17 mm. Pin. des 6ten Br. ganz klein und die folgende noch kleiner.

Scheibe: Tief eingeschnitten. Ungefähr 17 mm Dm.

Klafterung: 14 cm.

Indischer Archipel und Polynesien.

17. **Antedon tenera** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale mäßig groß und flach. 30—40 zierlich gebaute

Cirren, in 2, oder stellenweise 3 Reihen; 20—30 Glieder; die äußeren mit einem dorsalen Knöpfchen.

Erste Radialia theilweise sichtbar; zweite ganz frei. Axillaria pentagonal. Theilung der Radien nicht mehr wie 4fach. Aeußerer Rand derselben glatt.

32—43 glatte, dünne Arme. Glieder dreieckig und später stumpfer keilförmig.

Zweite Syzygie meist im 15ten Br., folgende in Zwischenräumen von 9—17 Gliedern.

Untere Pinnulae stets dünn und gewöhnlich klein; mit Neigung zur Kielung. Die der äußeren Arme manchmal länger wie die der inneren. Pin. des 2ten Br. am äußeren Arme 8 mm; die des 4ten Br. meist 10 mm mit circa 25 länglichen Gliedern; kaum dicker als die des 2ten. Die 3 folgenden Paare klein, von ziemlich gleicher Länge, 4—5 mm.

Scheibe: 10 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: 13 cm.

Queensland. (Göttingen.) Torres-Str.

18. **Antedon amboinensis** n. sp.

Centrodorsale flach scheibenförmig. 25 randständige Cirren in 2 Reihen; 14—17 mm lang; 20—25 Glieder, äußere zuweilen gekielt oder mit Dorn.

Erste Radialia fast ganz verborgen; zweite seitlich vollständig vereinigt. Axillaria kurz. Keine Postpalmaria. Palmaria nur von der Außenseite der distichalen Axillaria. 6 Arme zu jedem Radius. Die benachbarten Radien in Berührung.

Nicht über 30 Arme, meist gegen 30. Kurze Glieder, dreieckige und stumpfer keilförmige.

Zweite Syzygie vom 13ten—22sten Gliede, die folgenden gewöhnlich in Zwischenräumen von 8—9.

Untere Pinnulae ziemlich steif, aber nicht gestreckt; an beiden Armseiten ziemlich gleich lang. Pin. des 2ten Br. dünn, namentlich gegen die Spitze; 16—20 längliche Glieder; ein gutes Theil kürzer als die folgende. Diese (4te Br.) ist bedeutend steifer und dicker; 10—12 mm lang, mit 12—20 Gliedern, von denen die Mehrzahl länger wie breit ist. Pin. des 6ten Br. kürzer und schwächer, aber länger wie die erste. Die zwei folgenden nehmen noch an Länge ab.

Scheibe stark eingeschnitten. 14—16 mm Dm.

Klafterung: 15—19 cm.

Amboina.

Die Art erinnert an *Ant. brevicuneata* Carp., unterscheidet sich

aber von dieser durch den gänzlichen Mangel einer seitlichen Abplattung der Armbasis.

Distichalia 3gliedrig.

19. **Antedon bengalensis** n. sp.

Centrodorsale ziemlich groß, convex. 17 Cirren, in einer oder stellenweise zwei Reihen; 13 mm lang; 22—24 Glieder, die vom 9ten an dornig sind.

Erste Radialia theilweise sichtbar; zweite kurz und breit; frei oder in partieller Berührung seitlich. Axillaria kurz, breit, pentagonal. Nur eine distichale Serie.

11 Arme. Die Rückenlinie stumpf gesägt. Sehr kurze Glieder; die ersten 8 oder 9, das 3te nicht ausgenommen, so kurz wie die übrigen. Glieder vom 10ten an abgestumpft keilförmig und weiterhin mehr scheibenförmig.

Zweite Syzygie im 8ten Br., die folgenden in Zwischenräumen von 2—5. Zweite Syzygie in Armen zweiter Ordnung im 15ten Gliede, die folgenden in Zwischenräumen von 7—9.

Untere Pinnula ziemlich steif; distichale resp. die des 2ten Br. kurz, 20 Glieder. Die zweite und dritte derselben Seite 7 mm; die folgenden Pinnulae nehmen an Länge ab bis zum 6ten Paare. Die proximalen Glieder aller dieser Pinnulae sind kurz und breit und an den 8—9 ersten Paaren deutlich gekielt.

Scheibe: 8 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: wahrscheinlich 10 cm.

Golf von Bengalen. Ein Exemplar. (Göttingen.)

20. **Antedon Martensi** n. sp.

Centrodorsale dick scheibenförmig, mit flacher Oberfläche. Etwa 20 dicke Cirren in 2 Reihen; 18 mm lang; circa 25 Glieder, die äußeren einzeln mit schwachen Dornen; Distale Ränder der Glieder vortretend.

Erste Radiale eben sichtbar; zweite ganz frei seitlich. Axillare pentagonal. Palmare Serien zweigliedrig, das Axillare ohne Syzygie. Die Verbindungen der Axillaria mit dem vorangehenden Gliede glatt. Der äußere Rand der Radien mit schwachen Verdickungen an dem Rad. Axill. und dem ersten Distichale.

Wahrscheinlich nicht mehr als 30 Arme. Kurze übergreifende Glieder mit stark vorstehenden distalen Rändern.

Zweite Syzygie um das 23ste Brachiale.

Die distichale Pinnula ist sehr dick und steif, etwa 9 mm lang, mit 12—15 Gliedern, von denen die 3 basalen sehr groß sind. Die folgenden Glieder werden sprungweise kleiner. Pin. des 2ten Br.

kleiner mit ebenfalls relativ großen basalen Gliedern. Die Pin. des 4ten Br. viel kleiner und nicht ganz 4 mm lang. Sacculi spärlich.

Scheibe: 10 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Färbung des Skelettes: graubraun.

Singapore. Ein schlecht erhaltenes Exemplar (Berlin, durch Ed. v. Martens).

21. **Antedon Kraepelini** n. sp.

Centrodorsale dick, in der Mitte stark ausgehöhlt, die Seiten gewölbt. Circa 30 Cirren (nur 2 Stummel erhalten).

Erste Radialia nur wenig sichtbar; zweite vollkommen frei seitlich. Axillaria ziemlich kurz, pentagonal. Palmar-Serien, innere stets zweigliedrig, äußere oft dreigliedrig das Axillare mit Syzygie. Keine Postpalmaria. Proximale Verbindung der Axillaria glatt.

33 rauhe, ziemlich kurze Arme, die sich rasch verjüngen. Glieder vom 8ten an sehr kurz, und abgestumpft keilförmig mit ziemlich stark vorspringenden distalen Rändern; in der zweiten Armhälfte mehr scheibenförmig, mit glatterer Verbindung.

Zweite Syzygie um das 23ste Brachiale herum. Dann in Zwischenräumen von 8 Gliedern.

Distichale und palmare Pinnula dick. Erstere 13 mm lang mit etwa 18 annähernd quadratischen rundlichen Gliedern, die gegen das Ende der Pinnula allmälig dünner werden. Die folgende Pin. derselben Seite von gleichem Charakter, etwas kürzer. Die nächste viel kürzer, nach den basalen Gliedern schnell dünner werdend. Pin. des 3ten Br. außerordentlich klein. Die folgenden Pin., besonders vom 6ten Br. ab, sehr winzig; ihre Länge nimmt erst vom 14ten Br. wieder zu und erreicht nicht mehr als 5 mm. Sacculi klein und spärlich.

Scheibe fehlt.

Klafterung: 8—10 cm.

Akyab. Ein Exemplar. (Hamburg.)

22. **Antedon Brockii** n. sp.

Centrodorsale groß und dick mit flacher Oberfläche. Circa 30 kräftige Cirren in 2 oder stellenweise 3 Reihen; Länge 30 mm; 30—37 Glieder mit starkem Dorn vom 10ten oder 12ten an.

Erste Radialia sehr wenig zu sehen; zweite kurz, theilweise vereinigt. Axillaria sehr kurz, pentagonal. Palmaria zweigliedrig, das Axillare nicht syzygial, nur von der Innenseite der distichalen Axillaria entspringend. Die Verbindung zweier auf ein Axillare

folgenden Glieder etwas buckelig, am meisten die der beiden ersten Brachialia. Keine Postpalmaria.

28 Arme mit ziemlich langen Pinnulae. Kurze Glieder mit vorstehenden distalen Rändern. Vom 10ten etwa an abgestumpft keilförmig und bald mehr scheibenförmig. Basis des Armes von unebener Oberfläche in Folge von alternirend seitlich gelegenen Höckern auf den Verbindungen der unteren Glieder.

Zweite Syzygie vom 22sten—26sten Brachiale, die folgenden in Zwischenräumen von 7—9.

Distichale Pinnula (oder die des 2ten Br. in Armen erster Ordnung) schlank und fein, 11 mm. Die darauf folgende Pin. des 2ten Br. (resp. 4ten Br.) beträchtlich größer und fast so lang wie die des 4ten. Diese ist die längste und erreicht 20 mm mit 30—35 Gliedern. Dieselbe ist schlank und wird sehr dünn in ihrem äußeren Theile. Die Glieder dieser längeren Pinnulae haben vorstehende gezähnte distale Ränder. Pin. des 6ten Br. bedeutend kürzer als die des 4ten. Die äußeren Pin. erreichen 12 mm.

Scheibe: 15 mm Dm. Stark eingeschnitten.

Klafterung: 25 cm.

Farbe: schwärzlich braun.

Amboina. Ein Exemplar.

23. **Antedon affinis** n. sp.

Centrodorsale ziemlich klein, scheibenförmig; etwa 24 Cirren in 2 unregelmäßigen Reihen. Länge 20 mm. 25—30 Glieder, die äußeren stark comprimirt, gekielt oder mit kleinem Dorn.

Erste Radialia sehr wenig zu sehen; zweite theilweise mit einander vereinigt. Axillaria ziemlich kurz, pentagonal. Es entspringt von ihnen ein definitiver Arm, neben einem sich weitertheilenden Stamm. Palmare Stämme zweigliedrig. Keine Postpalmaria. — 18 schlanke ziemlich glatte Arme. Drittes Glied (Syzygie) breiter als lang. Vom 10ten an dreieckige Glieder, die weiterhin stumpfer keilförmig und endlich scheibenförmig werden.

Zweite Syzygie vom 10ten—13ten Gliede; die folgenden in Zwischenräumen von 8—10. Die Zwischenräume in Armen erster Ordnung betragen 4—5 Glieder.

Die erste Pinnula an der äußeren Seite des Radius klein und zart, mit relativ großen gekielten Gliedern an der Basis. Die auf eine distichale Pin. folgende Pin. des 2ten Br. beträchtlich länger, — 9 mm. Pin. des 3ten Br. stets sehr klein. Pin. der 4ten Br. 12 mm. Dann nimmt die Länge ab bis zum 12ten Gliede. An Armen erster Ordnung ist die Pin. des 6ten Br. fast so lang wie die des 4ten. Die

Pin. etwa der ersten 20 Br. haben einige gekielte Glieder an der Basis. Länge der äußeren Pin. 7 mm.

Scheibe: eingeschnitten; 13 mm Dm.

Klafterung: wahrscheinlich nur 13 cm.

Färbung des Skelettes: hell chokoladebraun.

Amboina. Ein Exemplar.

Die Art ist aufs nächste verwandt mit *Antedon Ludovici* Carp. Möglicherweise wird sie sich später als identisch mit dieser erweisen lassen.

24. **Antedon nematodon** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale dick, convex. 30 Cirren in 2 und stellenweise 3 unregelmäßigen Reihen. 40—50 annähernd gleichförmige Glieder, von denen keins länger als breit; die äußeren mit kräftigen Dornen. Länge der Cirren 25 mm.

Erste Radialia nicht sichtbar; zweite sehr kurz, vollkommen frei seitlich. Axillaria fast dreieckig. Einzelne distichale Serien 2-gliedrig. Palmarserien 2-gliedrig, aber 3-gliedrig, wenn sie auf 2-gliedrige Distichalserien folgen. Keine Postpalmaria. — 38 rauhe Arme von kurzen scheibenförmigen Gliedern, deren distale Ränder ziemlich stark vortreten.

Zweite Syzygie oft um das 30ste Brachiale herum, manchmal erst um das 40ste. Die folgenden in Zwischenräumen von 12—20.

Die unteren Pinnulae von feiner Struktur. Distichale Pin. 12 mm lang, mit circa 25 Gliedern, von denen die unteren ziemlich dick, die äußeren sehr dünn sind. Pin. des 2ten Br. von ähnlichem Aussehen, 13 mm lang; verjüngt sich allmäliger. Die Pin. des 3ten Br. sehr klein. Die auf das 2te Br. folgenden Pin. nehmen ziemlich sprungweise an Länge ab bis zum 12ten Gliede. Die äußeren Pin. erreichen 10 mm.

Scheibe: 15 mm Dm. Tief eingeschnitten.

Farbe: tief schwärzlich braun.

Bowen. Ein Exemplar. (Hamburg.)

25. **Antedon crassipinna** n. sp.

Centrodorsale dick und groß, manchmal tief ausgehöhlt. Ungefähr 37 dicke, ziemlich lange, randständige Cirren in 3 Reihen; Länge 46 mm; 30—40 gleichförmige Glieder, von denen keins länger wie breit ist. Aeußerste Glieder manchmal ein wenig dornig.

Erste Radialia zuweilen ganz verborgen; zweite seitlich theilweise vereinigt. Axillaria pentagonal. Einzelne distichale Stämme zweigliedrig, das Axillare ohne Syzygie. Zwei oder drei post-

distichale Axillaria. Dreigliedrige und zweigliedrige Palmarserien von gelegentlich gesetzmäßiger Vertheilung, der Art, daß die inneren zweigliedrig, die äußeren dreigliedrig sind; zuweilen die dreigliedrigen an Zahl überwiegend. Alle Postpalmaria dreigliedrig, das Axillare mit Syzygie. Die Verbindungen der Axillaria mit dem ihnen vorangehenden Gliede buckelig.

46—56 Arme von rauher Oberfläche und kurzen scheibenförmigen Gliedern.

Zweite Syzygie vom 22sten—30sten Brachiale; die folgenden in Zwischenräumen von 12—15.

Distichale, palmare und postpalmare Pinnulae steif und sehr dick. 20 mm lang. Die Pin. des 2ten Br. hat denselben Charakter, ist aber kleiner, 16 mm. Die Glieder dieser Pin. haben vortretende distale Ränder. Pin. des 4ten Br. beträchtlich kleiner. Die Länge nimmt ab bis zum 10ten Br.

Scheibe: 32 mm. Dm.

Klafterung: 40 cm.

Färbung des Skelettes: purpurviolett oder Chokoladebraun.

Amboina. 3 Exemplare. (Göttingen.) Cochinchina. (Hamburg.)

---

26. **Actinometra macrobrachius** (Ltk. M. S.) n. sp.

Centrodorsale klein, flach, fünfeckig, ohne eine Spur von Cirren.

Erste Radialia vollkommen sichtbar; zweite ziemlich kurz und breit, seitlich vereinigt. Axillaria fünfeckig, breit und kurz; ihr distaler Winkel spitz. Die Radien theilen sich 3 mal, einzelne 4 mal. Die distichalen Serien dreigliedrig, das Axillare syzygial. Die folgenden Theilungsserien zweigliedrig, ohne Syzygie im Axillare.

42 lange Arme von nur mäßig rauher Oberfläche. Glieder ziemlich kurz. Vom 6ten an keilförmig, nach dem proximalen Armdrittel abgestumpfter keilförmig und bald einfach scheibenförmig. Die Basis des Armes ist dünn, größte Dicke des Armes um das 12te Glied.

Erste Syzygie im 2ten Brachiale; die nächste vom 20sten—25sten Gliede; dann in Zwischenräumen von 7—10 Gliedern.

Distichale Pinnula 16 mm lang, schlank und dünn, mit kurzem schwach entwickelten Kamm. Palmare Pin. nur etwa 10 mm. Pin. des 2ten Br. bedeutend dünner, 8—9 mm. Die des 3ten Br. 5 mm.

Die nächst folgenden von gleicher Größe und auch dann nur wenig länger werdend und überall von feiner Struktur.

Scheibe nackt. 16 mm Dm.

Mund: radial.

Färbung des Skelettes: hellgelblichbraun.

Klafterung: 34 cm.

China-See. Ein Exemplar. (Hamburg.)

Die neue Species gehört zu Carpenters „Fimbriata-Gruppe".

27. **Actinometra gracilis** n. sp.

Centrodorsale klein, ganz flach, kaum erhaben über dem Niveau der ersten Radialia; von fünfeckigem Umriß, mit leicht eingebogenen Seiten; im Centrum eine Aushöhlung; keine Spur von Cirren.

Erste Radialia vollkommen sichtbar; zweite seitlich ganz frei, von der Länge des pentagonalen Axillare. Die Radien weichen beträchtlich auseinander und theilen sich nicht mehr wie viermal. Die Stämme und Arme sind dünn. Die distichalen Serien dreigliedrig, das Axillare mit Syzygie. Die postdistichalen Serien zweigliedrig; das Axillare ohne Syzygie, aber mit dem vorhergehenden Gliede durch Syzygie verbunden.

48 Arme, die sehr schlank sind und sich besonders in ihrem äußeren Theile außerordentlich verdünnen. Glieder ziemlich lang, vom etwa 8ten an stumpf keilförmig mit etwas vorstehendem, feingezähntem distalen Rande.

Erste Syzygie zwischen erstem und zweitem Brachiale; die nächste im 9ten oder 10ten Gliede. Dann in Zwischenräumen von 2.

Die unteren Pinnulae dünn. Kamm unbedeutend. Distichale Pinnula 13 mm lang, mit zahlreichen Gliedern. Die nächste kürzer, die dann folgenden drei ganz bedeutend kleiner. Dann nimmt die Länge erheblich zu und erreicht etwa 10 mm. Die Glieder der äußeren Pin. sehr dornig.

Scheibe 15 mm Dm.; etwas eingeschnitten, mit feinen Kalkborsten bedeckt. Mund fast central.

Klafterung: 22 cm.

Färbung: hellgraubrauner Gesammtton mit sehr hübscher Zeichnung.

Pulo Edam. Ein Exemplar. (Göttingen.)

Die Species ist nahe verwandt mit Antedon typica Lovén.

Ueber die Pyroëlectricität des Turmalins.

Von

Eduard Riecke.

Die Untersuchungen über die Pyroëlektricität des Turmalins, von welchen ich früher[1]) berichtet habe, führten zu der Erkenntniß, daß die elektrische Erregung der Crystalle nicht allein abhängig ist von der Abkühlung beziehungsweise der Erwärmung, sondern wesentlich mitbedingt wird durch die elektrische Leitungsfähigkeit, deren Einfluß bei den gewöhnlichen Methoden der Beobachtung nicht ausgeschlossen werden kann. Ich habe daher in der ersten Abhandlung eine Beobachtungsmethode befolgt, welche eine Berechnung der Leitungsfähigkeit aus dem zeitlichen Verlaufe der elektrischen Ladung ermöglicht; ich habe gezeigt, wie man bei gegebener Leitungsfähigkeit die ganze bei der Abkühlung entwickelte Elektricitätsmenge berechnen kann aus der wirklich beobachteten. Die Leitungsfähigkeit selbst hat aber einen doppelten Ursprung; entweder hat man es mit einer durch die höhere Temperatur bedingten Leitungsfähigkeit der ganzen Masse des Turmalins zu thun, oder mit einer Leitung seiner Oberfläche, welche wohl als Folge einer an derselben stattfindenden Condensation von Wasserdampf oder Gas anzusehen ist. Das schnellere oder langsamere Verschwinden der bei der Abkühlung auftretenden Ladung ist bedingt durch diese letztere; in dem Maase, in welchem die Bildung einer adsorbirten Gasschichte verzögert wird, muß auch die elektrische Ladung langsamer verschwinden. Diese Vermuthung fand ihre Bestätigung durch die in der zweiten Abhandlung beschriebenen Versuche, bei welchen Turmaline in wohlgetrocknetem, luftverdünntem Raume die bei der Abkühlung entwickelte elektrische Ladung tagelang behielten. Die Formeln, welche ich für die Elektricitätsentwicklung eines frei sich abkühlenden Turmalines aufgestellt hatte, konnten indeß nur auf einen Theil der Beobachtungen in Anwendung gebracht werden, da sie auf der Voraussetzung einer von der Zeit unabhängigen Leitungsfähigkeit beruhen; bei einer größeren Zahl von Beobachtungen, so insbesondere bei den mit einem Elbaer Turmaline angestellten, war aber die Leitungsfähigkeit während der Abkühlung einer fortdauernden Aenderung unterworfen. Eine andere Erscheinung,

1) Gött. Nachr. 1885 S. 405, 1887 S. 151.

welche im Allgemeinen gleichfalls die Anwendung der Theorie unmöglich macht, trat bei einem brasilianischen Turmaline (*BI*) hinzu; die elektrische Ladung desselben erlitt insbesondere bei stärkerer Erhitzung plötzliche Abfälle, welche wohl nur durch eine Selbstentladung des Turmalines erklärt werden können.

Die Methode der freien Abkühlung der isolirt aufgehängten Turmaline hat den großen Vorzug, daß sie wenigstens principiell die Möglichkeit gewährt, alle für die Pyroëlektricität wichtigen Größen, die elektrische Ladung, die elektrische Leitungsfähigkeit, die Abkühlungskonstante gleichzeitig zu ermitteln. Gegenüber den praktischen Schwierigkeiten aber, welche der allgemeinen Durchführung ihrer Theorie aus den angeführten Gründen erwachsen, erschien es zweckmäßig, auch die von Gaugain zuerst benutzte Beobachtungsmethode weiter zu verfolgen, als deren Ziel wir die Elimination des von der Leitungsfähigkeit ausgehenden Einflusses bezeichnen können. Am vollständigsten würde dieser Zweck erreicht, wenn man die mit metallischen Belegen versehenen Endflächen der Turmaline während der Abkühlung mit einem Galvanometer verbände. Statt dessen wurde bei den Versuchen von Gaugain und ebenso bei den meinigen das eine Ende der Turmaline mit der Erde, das andere mit einem zur Selbstentladung eingerichteten Elektroskop verbunden; die entwickelte Elektricität wurde gemessen durch die Zahl der aufeinanderfolgenden Selbstentladungen. Daß dabei das Resultat der Beobachtung durch eine etwaige Leitungsfähigkeit des Turmalines beeinflußt wird, leuchtet ein. Durch eine solche wird einmal die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Selbstentladungen verlängert, andererseits die Zahl der Selbstentladungen verkleinert. Wenn der Turmalin vollkommen isolirt, so gilt nach der von mir entwickelten Theorie für die elektrische Ladung während der Abkühlung die Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-\alpha})$$

wo ε die Zeit bezeichnet. Eine stärkere Leitungsfähigkeit des Turmalines muß sich dadurch verrathen, daß der beobachtete Verlauf der elektrischen Ladung von dem durch die Formel gegebenen Typus einer einfachen Exponentialkurve abweicht; eine geringere Leitungsfähigkeit aber braucht die Anwendbarkeit der Formel nicht wesentlich zu beeinträchtigen und könnte trotzdem den Gesammtbetrag der beobachteten Ladung in etwas verkleinern. Wenn aber auch die absoluten Werthe der elektrischen Ladungen, wie sie bei dem Gaugain'schen Verfahren beobachtet werden,

voraussichtlich etwas zu klein sind, so erscheint dasselbe doch wohl anwendbar, wenn es sich um die Vergleichung der Elektricitätsmengen handelt, welche ein und derselbe Turmalin nach verschiedener Erhitzung entwickelt, oder um diejenigen, welche verschiedene Turmaline unter gleichen Umständen erzeugen. Von diesem Gesichtspunkt aus sind die zahlreichen Beobachtungen zu beurtheilen, deren Resultate im Folgenden vorgelegt werden. Für die Ausführung derselben bin ich den Herren H. Meyer, Krüger und Meissner zu Danke verpflichtet, ebenso Herrn Pockels für die Ausführung einer Reihe von Controlrechnungen.

Die Absicht, welche bei den folgenden Untersuchungen verfolgt wurde, war eine doppelte. Es sollte einmal die Gültigkeit der Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-\omega})$$

in weiterem Umfange geprüft werden, andererseits sollte für eine grössere Zahl von Turmalinen die Abhängigkeit der bei der Abkühlung entwickelten Elektricitätsmenge von der Differenz zwischen der Anfangs- und der End-temperatur ermittelt werden.

Die Prüfung der für die entwickelte Elektricitätsmenge aufgestellten Formel erstreckte sich nach drei verschiedenen Richtungen. Zuerst wurde untersucht, in wie weit jede einzelne Abkühlungsbeobachtung dem Gesetze folgte. Dabei ergab schon der oberflächliche Anblick der Beobachtungsreihen die Existenz zweier typisch verschiedener Fälle, von welchen die in Fig. 1 und Fig. 2 gezeichneten Curven eine Anschauung gewähren. Die erste bezieht sich auf den Turmalin *M* II. Die Abkühlungszeiten sind auf der Horizontalen aufgetragen, die Menge der entwickelten Elektricität, d. h. die Zahl der Selbstentladungen des Elektroskopes in der dazu senkrechten Richtung; die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Punkte sind markirt, die ausgezogene Curve entspricht der aus den Beobachtungen berechneten Formel

$$\varepsilon = 49{,}2\,(1-e^{-0{,}217\,\omega}).$$

Die Figur giebt also für diesen Fall gleichzeitig ein Bild von der zwischen Beobachtung und Rechnung herrschenden Uebereinstimmung. Die Fig. 2 bezieht sich auf den Turmalin *P* I. Die Curve besitzt in diesem Fall einen Wendepunkt, sie ist zu Anfang ge-

gen die Axe s konvex und weicht nur ganz langsam von derselben ab in Folge der auffallenden Verzögerung, welche der Eintritt der ersten Selbstentladung des Elektroskopes erleidet. Von 22 untersuchten Crystallen gehörten 12 vollständig dem ersten Typus an; es sind dieß 5 Crystalle von Brasilien, 2 rothe Crystalle von Mursinsk, ein Turmalin von Elba, E III, einer von Prevale, P II, einer von Unterdrauburg, und einer vom Gouverneur. Einen Uebergang zum zweiten Typus bilden 4 schwarze Crystalle von Mursinsk. Bis zu Erhitzungen von etwa 140° zeigen dieselben keine Verzögerung der ersten Entladung; bei höheren Temperaturen tritt eine Verzögerung ein; immer aber bleibt dieselbe so klein, daß der Gesammtcharakter der den Verlauf der elektrischen Ladung darstellenden Curven durch die anfängliche Störung kaum beeinflußt wird. Dasselbe Verhalten zeigt ein Turmalin von Hörlberg. Eine der mit diesem Turmalin angestellten Beobachtungsreihen wird dargestellt durch Fig. 3. Mit Bezug auf die Turmaline von Mursinsk ist noch hervorzuheben, daß die Verzögerung der ersten Entladung zu Anfang der ganzen Untersuchung auch bei den höchsten Temperaturen kaum merklich war, daß sie erst im Verlauf der Untersuchung deutlicher hervortrat. Es scheint, daß in der Natur dieser Crystalle durch die wiederholten bis auf 190° steigenden Erhitzungen eine Aenderung hervorgebracht wurde. Dasselbe ist, nur in sehr viel höherem Maase, der Fall bei 3 Crystallen von Elba; auch diese zeigten anfangs nur geringe Abweichungen von dem ersten Typus, bei welchem die elektrische Ladung während der Abkühlung durch eine Exponentialkurve dargestellt wird; während der Untersuchung aber nahm die Verzögerung der ersten Entladung zu und erreichte schließlich ziemlich erhebliche Beträge. Endlich bleiben nun noch 3 Crystalle übrig, ein schwarzer von Mursinsk (M I, a), der bereits erwähnte von Prevale, P I, und einer von Sarapulsk; die beiden ersten ergaben von vornherein und unter allen Umständen sehr große Verzögerungen der ersten Entladung und erscheinen daher als vollständige Repräsentanten des zweiten Typus, welcher in seinem Verhalten der Curve der Fig. 2 entspricht.

Der Crystall von Sarapulsk dagegen nimmt eine besondere Stellung ein, indem er in höheren Temperaturen eine kleine, dagegen in tieferen eine sehr erhebliche Verzögerung der ersten Entladung erleidet, wie sich dieß aus der folgenden Tabelle ergiebt.

T	1	2	3	4	5
167.9	0.84	1.04	1.20	1.38	1.53
105.6	3.41	4.11	4.87	5.73	6.88

In derselben sind für zwei verschiedene Erhitzungstemperaturen die Zeiten der 5 ersten Entladungen angegeben.

Zu einer genaueren Prüfung der Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-\alpha})$$

wurden nun Beobachtungen mit denjenigen Turmalinen verwandt, welche dem ersten Typus angehören oder doch nur geringere Abweichungen von demselben zeigen. Es wurden also die Beobachtungen mit den zuletzt genannten Crystallen P I und M I a zunächst ausgeschlossen. Der Theorie zufolge sollte a während der Abkühlung einen konstanten Werth behalten; es traf dieß nur bei einem Theil der Turmaline zu, während bei anderen der Werth von a bei der Abkühlung gewissen Veränderungen unterworfen war. Nach dem Verhalten von a während der Abkühlung konnten die Turmaline des ersten Typus ihrerseits wieder in drei Gruppen geschieden werden. Bei der ersten erwies sich a während der Abkühlung als vollkommen konstant. Es gehören in diese Gruppe die 5 Crystalle von Brasilien, der Turmalin P II, die Crystalle von Unterdrauburg und vom Gouverneur. Bei einer zweiten Gruppe war a während der Abkühlung konstant, so lange die Erhitzung einen bestimmten Betrag nicht überschritt; bei höheren Anfangstemperaturen dagegen war der Werth von a während der ersten Minuten der Abkühlung kleiner, erhob sich dann aber schnell zu einem konstant bleibenden Betrage. Zu dieser zweiten Gruppe gehören 5 Crystalle von Mursinsk, der Elbaer Turmalin E III, der Crystall vom Hörlberg. Die bei denselben vorhandene Veränderlichkeit von a möge durch die in der folgenden Tabelle beispielsweise mitgetheilten Zahlenwerthe erläutert werden.

	$z=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
M II	190°	0.113	0.148	0.166	0.177	0.185	0.190	0.194	0.195	0.196	0.196	0.196
	142°	0.200	0.205	0.209	0.211	0.212	0.213	0.213	0.213	0.214	0.215	0.215
MR I	173°	0.134	0.139	0.143	0.146	0.149	0.150	0.151	0.152	0.152	0.152	0.152
	155°	0.145	0.150	0.152	0.154	0.155	0.156	0.157	0.157	0.157	0.156	0.156

In der ersten Horizontalreihe sind die Abkühlungszeiten in Minuten, in den darunter stehenden die entsprechenden Werthe der Abkühlungskoëfficienten. angegeben; die in der ersten Vertikalreihe stehenden Zahlen geben die Erhitzungstemperaturen an.

Die dritte Gruppe wird gebildet durch drei Crystalle von Elba, *E*IV, *E*V und *E*VI. Bei diesen steigt gleichfalls der Werth von *a* während der Abkühlung aber ohne einen konstanten Grenzwerth zu erreichen; es wird dieses Verhalten anschaulich gemacht durch die Zahlen der folgenden Tabelle.

	$z =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
*E*IV	168°	0.138	0.143	0.150	0.156	0.165	0.173	0.180	0.184	0.186	0.190	0.193
	122°	0.185	0.190	0.192	0.195	0.196	0.198	0.199	0.199	0.200	0.202	
*E*V	161°	0.178	0.185	0.191	0.200	0.206	0.212	0.220	0.225			
	122°	0.226	0.230	0.231	0.235	0.240	0.245	0.249				

Der Crystall von Sarapulsk kann ebensogut zu der zweiten, wie zu der dritten Gruppe gerechnet werden. In höheren Temperaturen erreicht der Werth von *a* bei der Abkühlung ein Maximum; bei tieferen Temperaturen tritt die Annäherung an ein Maximum nicht mehr hervor, die Verzögerung der ersten Entladung nimmt wie schon erwähnt bei abnehmender Anfangstemperatur stark zu.

Untersucht man die Crystalle dieser 3 Gruppen mit Rücksicht auf den verzögerten Eintritt der ersten Entladung so bemerkt man, daß die Crystalle der ersten Gruppe keine Verzögerung aufweisen; die der zweiten Gruppe zeigen eine Verzögerung bei höherer Temperatur; die der dritten Gruppe gaben nach wiederholter Erhitzung Verzögerung auch bei tieferen Temperaturen. Es ist hiernach wahrscheinlich, daß die Veränderlichkeit von *a* durch dieselbe Ursache bedingt wird, wie die Verzögerung der ersten Entladung und zwar dürfte es das natürlichste sein, die Ursache in einer bei höherer Temperatur eintretenden Leitungsfähigkeit des Turmalines zu suchen.

Die im Vorhergehenden besprochene Eintheilung der Turmaline, welche auf der Verzögerung der ersten Entladung und auf dem Verhalten des Coëfficienten *a* während der einzelnen Abkühlung beruht, wird bestätigt durch das Ergebniß einer dritten Untersuchung. Für alle einzelnen Abkühlungsbeobachtungen wurden die Coëfficienten *a* berechnet; bei den Turmalinen der ersten Gruppe wurden aus den einzelnen von einander nur wenig abweichenden Werthen die Mittel genommen; bei den Turmalinen der zweiten Gruppe wurden die konstanten Grenzwerthe von *a* bei der weiteren Betrachtung benutzt; bei den Crystallen der dritten Gruppe wurden die für die Mitte der Abkühlungsperiode gelten-

den Werthe von a durch Interpolation bestimmt und weiterhin der Untersuchung zu Grunde gelegt. Diese war darauf gerichtet, ob die den einzelnen Abkühlungen entsprechenden Werthe von a konstant, d. h. von der anfänglichen Erhitzung der Turmaline unabhängig sind, oder ob der Abkühlungskoëfficient mit der Temperatur sich verändert.

Es wurden im Ganzen 239 Abkühlungsbeobachtungen benutzt und dementsprechend 239 Werthe des Coëfficienten a in der angegebenen Weise berechnet.

Constanz der Abkühlungskoëfficienten ergab sich bei den Crystallen von Brasilien, von Unterdrauburg, vom Gouverneur, vom Hörlberg, bei PII und MRII, im Allgemeinen also bei den Crystallen der ersten Gruppe.

Constanz bis zu Erhitzungstemperaturen von beiläufig 140° Graden, Abnahme bei höheren Temperaturen ergab sich bei den Turmalinen von Mursinsk, und Sarapulsk, im Wesentlichen also bei den Crystallen der zweiten Gruppe.

Einen unregelmäßigeren Verlauf zeigen die Werthe von a bei den Turmalinen von Elba. Sie erweisen sich als ziemlich konstant bis zu Temperaturen von etwa 100°, dann nehmen sie rasch ab, erreichen einen Minimalwerth bei einer Erhitzung auf etwa 140° und nehmen bei stärkerer Erhitzung wieder zu.

Diese Verhältnisse werden anschaulich gemacht durch die folgende Tabelle.

1. Turmaline von Brasilien.

T	175°	153°	130°	106°	82°	56°
BIII	0.249	0.248	0.249	0.246	0.248	0.245
BV	0.227	0.235	0.228	0.228	0.228	0.231

2. Turmalin vom Gouverneur.

T	172°	159°	155°	145°	139°	121°	110°	91°
a	0.267	0.266	0.267	0.266	0.267	0,266	0.268	0.268

3. Schwarze Turmaline von Mursinsk.

T	190°	170°	145°	125°	110°	85°	70°	45°
MII	0.195	0.194	0.214	0.223	2.223	0.221	0.224	0.222
MIII	0.213	0.210	0.225	0.241	0.241	0.241	0.243	0.247

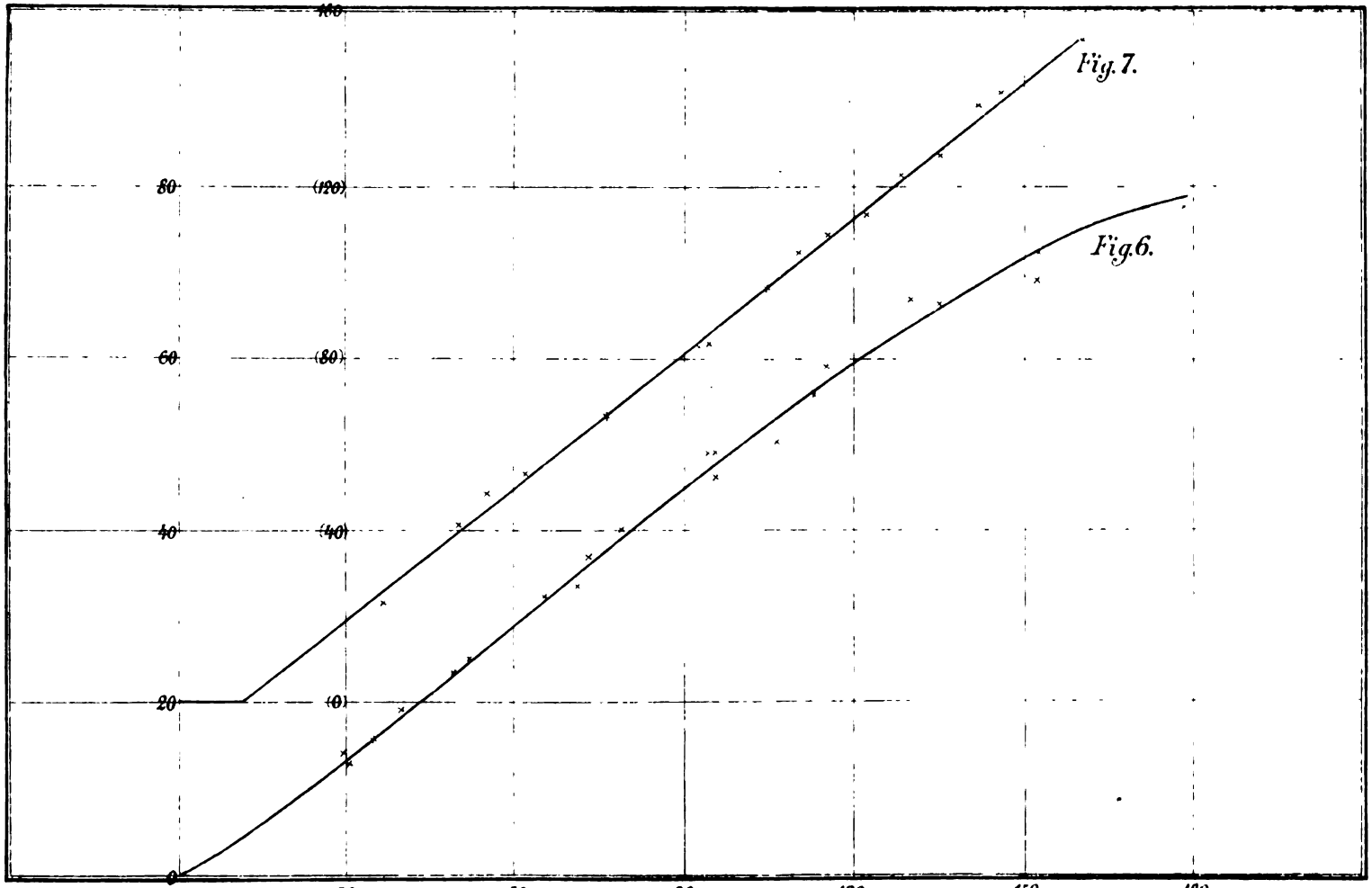


Fig. 7. E. Riecke, Pyroelectricität des Turmalins.

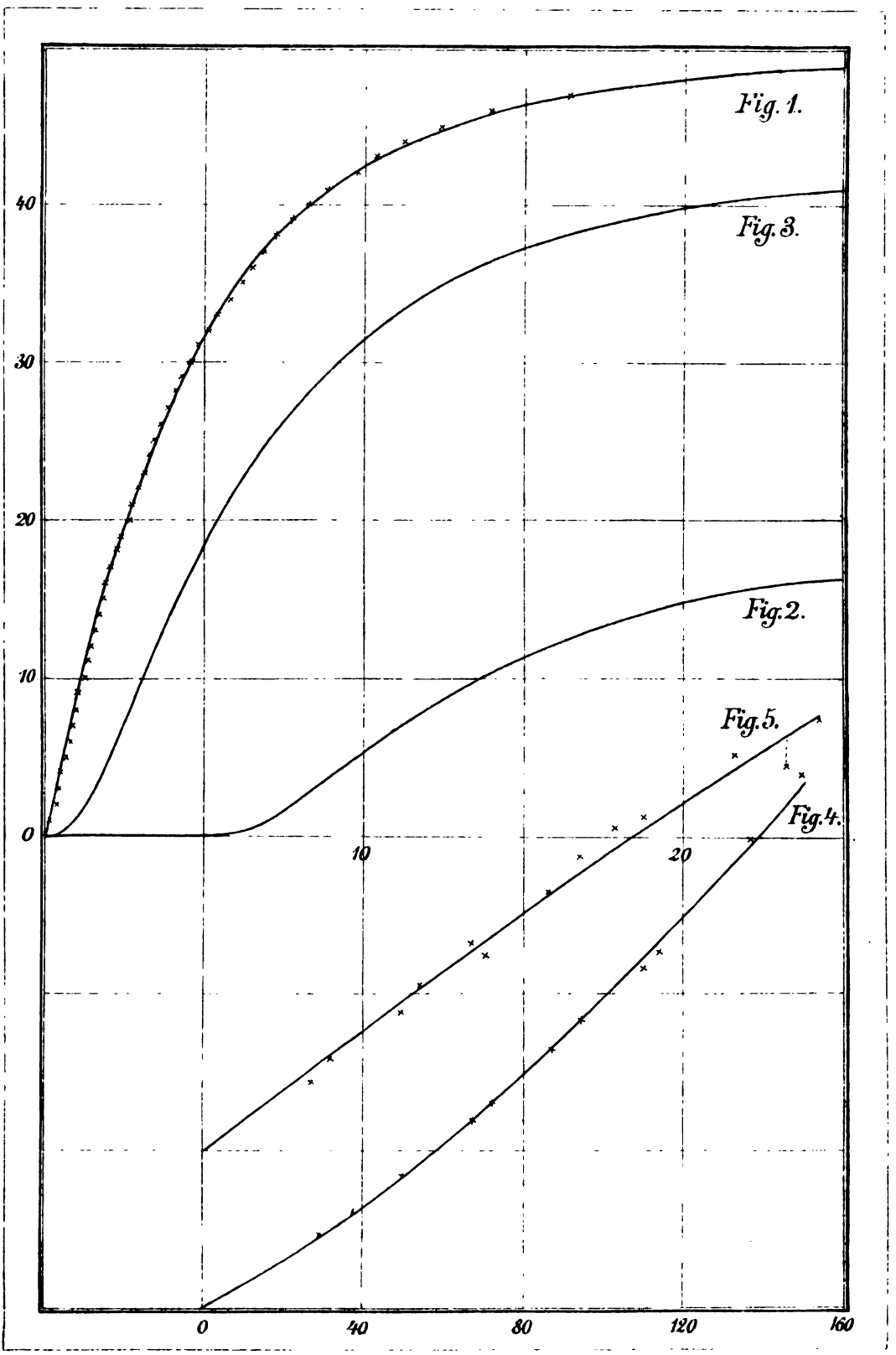


Fig. 1. E. Riecke, Pyroelectricität des Turmalins.

4. Rothe Crystalle von Mursinsk.

T	172°	159°	155°	145°	139°	130°	126°	110°	91°
MRI	0.152	0.154	0.157	0.157	0.159	0.160	0.161	0.161	0.153
MRII	0.111	0.113	0.116	0.115	0.112	0.115	0.115	0.111	0.109

5. Turmaline von Elba.

T	164°	147°	122°	104°	82°	67°	59°	45°
EIII	0.404	0.378	0.449	0.446	0.472	0.433	0.472	
EV	0.205	0.175	0.241	0.255	0.245			0.241

Wir schließen hiermit den Bericht über den ersten Theil der Untersuchung, welcher sich auf die Prüfung der Formel

$$\varepsilon = E(1-e^{-a\tau})$$

und auf das Verhalten der Abkühlungskoëfficienten a richtet, und gehen nun über zu der Frage nach der Abhängigkeit der entwickelten Elektricitätsmenge von der Temperatur der Erhitzung. Zunächst traten dabei wieder Verschiedenheiten hervor, welche der früheren Eintheilung der Turmaline in drei Gruppen entsprachen. Bezeichnet man mit Θ die Differenz zwischen der Anfangs- und der End-temperatur der Turmaline, so konnte bei den Turmalinen von Brasilien die fragliche Abhängigkeit dargestellt werden durch eine Formel von der Gestalt

$$E = a\Theta + b\Theta^2.$$

Dagegen ergab sich bei den Turmalinen von Elba die Formel

$$E = a\Theta - b\Theta^2.$$

Bei den schwarzen Crystallen von Mursinsk mußte zur Darstellung der Beobachtungen ein dreigliedriger Ausdruck benutzt werden

$$E = a\Theta + b\Theta^2 - c\Theta^3.$$

Die Gruppirung der Turmaline, wie sie sich auf Grund der für die entwickelten Elektricitätsmengen geltenden Interpolationsformeln ausführen läßt, stimmt aber mit der durch das Verhalten des Abkühlungskoëfficienten bedingten doch nicht ganz überein in Folge eines abweichenden Verhaltens der rothen Turmaline von Mursinsk, der Turmaline PII, S und G, welche bei der früheren Untersuchung in unsere erste oder zweite Gruppe sich eingeordnet hatten. Bei diesen Crystallen konnte unterhalb gewisser Temperaturen überhaupt keine meßbare elektrische Erregung erhalten

werden, während nach Ueberschreitung derselben die entwickelten Elektricitätsmengen sehr schnell mit der Temperatur wuchsen. Die zur Darstellung der elektrischen Ladungen benutzte Formel ist

$$E = a\vartheta - A.$$

Es dürfte dieses Verhalten durch die Annahme zu erklären sein, daß diese Turmaline bei gewöhnlicher Temperatur eine erhebliche Leitungsfähigkeit besitzen, welche durch Erhitzung auf Temperaturen von 30° bis 50° keine Veränderung erleidet, dagegen in höheren Temperaturen verschwindet und sich dann auch während der Dauer der Abkühlung nicht wieder herstellt.

Die Abhängigkeit der elektrischen Ladung von der Temperatur der Erhitzung führt hiernach zu der Aufstellung von 4 verschiedenen Gruppen von Turmalinen; die vierte Gruppe enthält Turmaline, welche nach dem Verhalten des Abkühlungskoëfficienten zu den Turmalinen von Brasilien oder Mursinsk zu stellen sein würden. Beispiele für das Verhalten der 4 Gruppen geben die Fig. 4—7, in welchen die beobachteten Werthe der Ladung den berechneten Curven hinzugefügt sind.

Würde die Form der Turmaline die eines Cylinders mit Geradendflächen, würde überdieß die elektrische Ladung vollständig auf diese Flächen koncentrirt sein, so wäre das elektrische Moment gleich der Ladung der positiven Endfläche multiplicirt mit der Länge der Turmaline. Durch Division mit der Masse würde man dann das elektrische Moment der Masseneinheit erhalten und würde damit eine für die einzelnen Turmaline charakteristische Größe gefunden haben. In Wirklichkeit treffen die gemachten Voraussetzungen nicht zu; das specifische elektrische Moment kann nur dadurch bestimmt werden, daß man an Stelle der Länge den Mittelwerth aus einer gewissen Anzahl von Kantenlängen oder Abständen parallel der Axe einführt. Die Werthe, welche man erhält, wenn man die beobachteten Electricitätsmengen mit jenen mittleren Längen multiplicirt und mit der Masse dividirt, werden von den wahren specifischen Momenten um einen Betrag abweichen, der wesentlich abhängig ist von der Gestalt der Turmaline und von der Ausbreitung der Ladung auf die Seitenflächen. Immerhin werden die erhaltenen Werthe eine wenn auch nicht vollkommen exakte Vergleichung der Erregbarkeit der einzelnen Turmaline ermöglichen. In der folgenden Tabelle sind daher die in der angegebenen Weise berechne-

ten specifischen Momente als Funktionen der Abkühlung ϑ dargestellt.

B I	$0.1123\,\vartheta$	$+0.000182\,\vartheta^2$	
B III	$0.1071\,\vartheta$	$+0.000374\,\vartheta^2$	
B IV	$0.0951\,\vartheta$	$+0.000415\,\vartheta^2$	
B V	$0.0564\,\vartheta$	$+0.000676\,\vartheta^2$	
B VI	$0.0840\,\vartheta$	$+0.000450\,\vartheta^2$	
H	$0.1058\,\vartheta$		
M I *a*	$0.0404\,\vartheta$	$+0.000911\,\vartheta^2$	$-0.00000452\,\vartheta^3$
M I *b*	$0.1138\,\vartheta$		$-0.00000061\,\vartheta^3$
M II	$0.0972\,\vartheta$	$+0.000473\,\vartheta^2$	$-0.00000263\,\vartheta^3$
M III	$0.0678\,\vartheta$	$+0.000901\,\vartheta^2$	$-0.00000439\,\vartheta^3$
M IV	$0.0786\,\vartheta$	$+0.000186\,\vartheta^2$	$-0.00000141\,\vartheta^3$
E III	$0.1165\,\vartheta$	$-0.000021\,\vartheta^2$	
E IV	$0.0971\,\vartheta$	$-0.000062\,\vartheta^2$	
E V	$0.0550\,\vartheta^2$	$-0.000114\,\vartheta^2$	
E VI	$0.0860\,\vartheta^2$	$-0.000197\,\vartheta^2$	
P I	$0.0736\,\vartheta$	-2.3	
P II	$0.1200\,\vartheta$	-1.9	
MR I	$0.165\,\vartheta$	-1.8	
MR II	$0.151\,\vartheta$	-4.8	
S	$0.172\,\vartheta$	-9.3	
G	$0.128\,\vartheta$	-4.1	
	$0.092\,\vartheta$	-0.6	

Wir fügen endlich noch eine Tabelle hinzu, in welcher die Turmaline geordnet sind nach der Größe der elektrischen Momente, welche einer Abkühlung um 100° entsprechen.

MR I	*B* III	*B* IV	*B* I	*B* VI	*B* V	*M* II	*U*	*M* III	*E* III	*M* I *b*
14.7	14.4	13.6	13.0	12.9	12.4	12.1	11.8	11.4	11.4	10.8

H	*MR* II	*P* II	*E* IV	*M* I *a*	*G*	*M* IV	*S*	*E* VI	*P* I	*E* V
10.6	10.3	10.1	9.1	8.6	8.6	8.3	7.9	6.6	5.1	4.4

Es stimmt diese Tabelle wohl überein mit einer Zusammenstellung elektrischer Momente, welche ich in der Abhandlung des Jahres 1887 veröffentlicht habe. Dieselbe bezieht sich auf einen Theil der Turmaline, welche in der gegenwärtigen Arbeit behandelt worden sind. Die Abkühlungstemperatur, welche damals benutzt wurde, war im Mittel gleich 84°; doch ist die Größe der Abkühlung bei den verschiedenen Turmalinen um einige Grade verschieden, da nur auf eine einzige Temperatur erhitzt und auf

die Gleichheit derselben bei den verschiedenen Turmalinen kein besonderes Gewicht gelegt worden war.

Zur Erläuterung der Tabellen mögen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden, von welchen die erste die Turmaline *PI* und *MIa* betrifft. Die in den Tabellen benutzten Werthe der elektrischen Ladung sind nicht unmittelbar beobachtet, sondern in der folgenden Weise berechnet. Wir haben bemerkt, daß die Curven, welche bei diesen Turmalinen die elektrische Ladung während der Abkühlung darstellen, einen Wendepunkt besitzen. Nun zeigt sich, daß die Curven in einigem Abstande von dem Wendepunkte der gewöhnlichen Exponentialformel entsprechen. Verlängert man die durch die Rechnung bestimmten Curven rückwärts bis zum Schnitt mit der Axe der ε, so erhält man diejenigen elektrischen Ladungen, welche bei abwesender Leitungsfähigkeit eingetreten sein würden, indem man zu den beobachteten Werthen von ε den für $\varepsilon = 0$ geltenden Werth hinzufügt. In dieser Weise sind die in den Tabellen benutzten Werthe gefunden. Es ist dadurch die Ausnahmestellung beseitigt, welche der Turmalin *MIa* in der früheren Tabelle eingenommen hatte.

Immerhin bleibt die Verschiedenheit, welche in dem Verhalten der beiden Bruchstücke *MIa* und *MIb* desselben Crystalls zu Tage tritt, auffallend genug.

Was den Crystall vom Gouverneur anbelangt, so führten die zwei Beobachtungsreihen, welche mit demselben angestellt worden waren, zu Resultaten, welche nicht in einer Formel vereinigt werden konnten. Es müssen Veränderungen in der Natur dieses Crystalls während der Dauer der Untersuchung angenommen werden und zwar im Sinne einer Verminderung der Leitungsfähigkeit, welche der Crystall bei niedriger Temperatur besitzt. Höheren Erhitzungen gegenüber machen sich die Unterschiede wenig bemerklich; die für eine Temperaturdifferenz von 100° auftretende elektrische Ladung ist bei beiden Reihen nahezu dieselbe, so daß in der letzten Tabelle nur ein Mittelwerth angenommen worden ist.

Bei dem Crystalle von Sarapulsk genügt die Zahl der Beobachtungen nicht zur Aufstellung einer Interpolationsformel; der in der letzten Tabelle enthaltene Werth ist aus den bei benachbarten Temperaturen erhaltenen Ladungen abgeleitet.

Es erübrigt endlich noch die Frage nach dem Werthe der elektrischen Momente in absolutem elektrostatischem Maase. Um hie für einen Anhaltspunkt zu gewinnen gehen wir zurück auf die absoluten Bestimmungen, welche ich im Jahre 1885 für den Turmalin *BI* ausgeführt habe, indem derselbe

über einem Goldblattelektroskop isolirt aufgehängt sich frei abkühlte. Die Verwerthung der Beobachtungen ist eine einigermaßen unsichere in Folge der Störungen, welche namentlich in höheren Temperaturen eintraten. Greift man aus den verschiedenen Beobachtungsreihen eine bei einer Abkühlung von $\theta = 60.5^0$ angestellte ziemlich regelmäßig verlaufende heraus, so ergiebt sich eine Oberflächendichtigkeit von 32 elektrostatischen Einheiten im cm. g. s. System. Hiernach wird das unmittelbar beobachtete elektrische Moment der Gewichtseinheit nahezu gleich 10 (cm. g. s.).

Es entspricht aber dieser Werth keineswegs der ganzen während der Abkühlung des Turmalins entwickelten Elektricitätsmenge; das dieser entsprechende Moment ergiebt sich, wenn wir den beobachteten Werth mit dem Faktor $(q/a)^{q/q-a}$ multipliciren, in welchem q die Leitungsfähigkeit des Turmalines, a den Abkühlungskoëfficienten bezeichnet. Eine genaue Bestimmung von a und q aus den vorliegenden Beobachtungen ist nicht möglich. Dem ansteigenden Theile der Curve entspricht man durch die Annahme $a = 0.19$ und $q = 0.23$. Damit ergiebt sich dann für das elektrische Moment der Gewichtseinheit, wie es bei verschwindender Leitungsfähigkeit auftreten würde, der Werth von 30 Einheiten des cm. g. s. Systems. Andererseits ergiebt unsere Interpolationsformel für dieselbe Abkühlung den Betrag des Momentes zu 7.3 unserer willkürlichen Maaßeinheiten. Hiernach würden alle in den beiden letzten Tabellen enthaltene Zahlen mit dem Faktor 4 zu multipliciren sein, um die elektrischen Momente in Einheiten des cm. g. s. Systems zu geben.

Die elektrische Dichtigkeit, welche der Turmalin *MR*I bei einer Abkühlung um 100° und bei isolirender Masse und Oberfläche entwickelt, kann hiernach beiläufig zu 60 Einheiten des cm. g. s. Systems angenommen werden. Das bedeutet eine Stärke der elektrischen Ladung, welche die bei den gewöhnlichen elektrostatischen Apparaten auftretenden weit übertrifft; zum Beispiel habe ich bei einer Influenzmaschine zweiter Art die größte Dichtigkeit der auf den rotirenden Scheiben angesammelten Elektricität zu 6 Einheiten (cm. g. s.) bestimmt. Die scheinbar an der Oberfläche eines Turmalines auftretende Ladung bildet aber nach der von mir entwickelten Theorie der Pyroëlektricität nur einen sehr kleinen Bruchtheil seiner molekularen Elektricität. Die wahren elektrischen Momente, welche die Gewichtseinheiten der Turmaline in Folge der elektrischen Polarisation ihrer Molekeln besitzen, gehören ohne Zweifel einer wesentlich höheren Größenordnung an als die wirklich gemessenen.

Scaenica.

Von

Friedrich Wieseler.

I.

Es giebt noch manche Stellen bei den Gewährsmännern über das alte Theater, welche einer Berichtigung des Inhaltes oder einer Verbesserung des Textes und zugleich einer genaueren Erörterung bedürfen. Ueber einige derselben soll in dem Folgenden zunächst die Rede sein.

1.

Pollux Onom. IV, 129 fg.: *ἡ διστεγία ποτὲ μὲν ἐν οἴκῳ βασιλείῳ διῆρες δωμάτιον, οἷον ἀφ' οὗ ἐν Φοινίσσαις ἡ Ἀντιγόνη βλέπει τὸν στρατόν, ποτὲ δὲ καὶ κέραμος, ἀφ' οὗ βάλλουσι τῷ κεράμῳ· ἐν δὲ κωμῳδίᾳ ἀπὸ τῆς διστεγίας πορνοβοσκοί τι κατοπτεύουσιν ἢ γρᾴδια ἢ γύναια καταβλέπει.*

Antigone begiebt sich, wie der Pädagog in Eurip. Phoen. 90 sagt, *μελάθρων ἐς διῆρες ἔσχατον*, d. h. auf das flache Dach des zweistöckigen Palastes[1]). Der Ausdruck *δωμάτιον* bei Pollux paßt also durchaus nicht.

Albert Müller bezieht ihn in den Griech. Bühnenalterth. S. 141 auf einen „kleinen Oberbau". Aber ein solcher läßt sich ohne Zweifel nicht annehmen. Wer wird glauben wollen, daß der Königspalast im Wesentlichen nur ein einstöckiger Bau war, kein über das ganze Unterstock hinlaufendes oberes hatte?[2]). Auch in sprachlicher Beziehung hat die Deutung des Ausdruckes *διῆρες δωμάτιον* auf einen besonderen Oberbau Bedenken. Wenn Pollux I, 81 schreibt: *εἶτα ὑπερῷα οἰκήματα τὰ δ' αὐτὰ καὶ διήρη*, so meint er Gemächer, Zimmer im zweiten Stockwerk. Ebenso ist der Ausdruck *ὑπερῷος οἶκος* zu verstehen im Etymol. M. 274, 26: *Διήρης, ὁ ὑπερῷος οἶκος*, und p. 780, 19, und der Ausdruck *δωμάτια* bei Herodian I, 12, 16: *εἴς τε τὰ δωμάτια ἀναβάντες λί-*

1) Eigenthümlich und ohne Zweifel irrig ist K. O. Müller's Meinung in dem Handb. d. Archäol. der Kunst S. 293, Anm. 2, daß Antigone „auf dem Söller über dem Parthenon in der *διστεγία*" erscheine. Vgl. unten Anm. 3.

2) So etwas läßt sich für ein Privathaus in der alten Kommödie immerhin annehmen.

θοις καὶ κεράμοις ἔβαλλον τοὺς ἱππεῖς. Man könnte daran denken, daß bei Pollux IV, 129 geschrieben war: διῆρες δωμάτων, welches letztere Wort dem μελάθρων in den Phönissen durchaus entsprechen würde. Allein dieser Veränderung steht sowohl der Umstand entgegen, daß durch sie die Worte ἐν οἴκῳ fast überflüssig würden, jedenfalls eigenthümlich erschienen, als auch der, daß Pollux mit seiner Angabe nicht allein steht. Auch im Etym. M. 274, 26 finden wir dasselbe angegeben, indem hinter οἶκος hinzugefügt wird: Εὐριπίδης ἐν Φοινίσσαις. Die Stelle in den Phönissen wurde also schon von alten Erklärern falsch gedeutet. Wir bemerken noch, daß das Wort διστεγία nur das zweite Stockwerk, natürlich mit Inbegriff des Daches, bezeichnet, nicht auch, wie man gemeint hat, ein Haus mit zwei Stockwerken. Dasselbe gilt von den substantivisch gebrauchten Ausdrücken διῆρες und ὑπερῷον. Sollte das Dach genauer bezeichnet werden, so bedurfte es eines Beiwortes, wie ἔσχατον bei Euripides hinzugefügt ist.

Nicht minder auffallend ist die sonst nirgends vorkommende Angabe bei Pollux, nach welcher διστεγία und κέραμος gleich sein sollen, zumal wenn man mit A. Müller (a. a. O. Anm. 5) annehmen will, daß bei Pollux unter κέραμος schwerlich ein schräges Dach zu verstehen sei. Thut man dagegen dieses — was doch selbstverständlich erscheint — und nimmt man zugleich an, daß das Dach hoch zu denken sei, so ließe sich etwa sagen, daß der Raum unterhalb des Daches als eine Art von zweitem Stockwerk zu betrachten sei.

Ein anderer bedenklicher Umstand ist es, daß Pollux ganz so spricht, als gehöre das über κέραμος Gesagte nur in die Tragödie, wie es denn außer A. Müller allein auf das „Ziegeldach in der Tragödie“ bezogen wird. Ich weiß mich in der That keines Falles in den erhaltenen Tragödien zu erinnern; wohl aber eines nahe stehenden aus der Komödie, vgl. Aristoph. Vesp. Vs 203 fg.

Wenn A. Müller a. a. O. äußert, die διστεγία werde in der Komödie als einfaches plattes Dach bezeichnet, so ist das in Betreff des Pollux eben so wenig richtig als hinsichtlich der von ihm in Anm. 8 angeführten Stellen aus Aristophanes' Ekklesiazusen. Es wird vielmehr bei beiden Schriftstellern an Gemächer im oberen Stockwerk gedacht, die nach außen hin Fenster haben, auf welche sich die Ausdrücke παρακύπτειν und διακύπτειν beziehen. So ist es auch klar und deutlich zu sehen auf den beiden den letzten Worten des Pollux entsprechenden Vasenbildern in meinen Denkmälern des Bühnenwesens Taf. IX, n. 11 u. 12. Uebrigens beachte man, daß Pollux das Herausblicken aus den Fenstern

in der Distegie nur von der Komödie berichtet, und darin hat er Recht[1]).

2.

Pollux fährt unmittelbar nach den obigen Worten IV, 130 fort über das κεραννοσκοπεῖον zu sprechen, über welches er aber nichts Weiteres sagt, als daß es πρίακτος ὑψηλή sei. Er meint, da er das κεραννοσκοπεῖον auf das Engste mit dem βροντεῖον zusammenstellt, ohne Zweifel die Maschine zur Herstellung des κεραυνός. Aber diese Bedeutung liegt nicht in jenem Worte. Somit halte ich dafür, daß dasselbe verderbt sei. Ein äußerlich nahe stehendes Wort würde sein κεραυνοσκηπτεῖον, das sich freilich sonst nicht nachweisen läßt (wie ja auch κεραννοσκοπεῖον nicht), aber untadelhaft gebildet ist und hinsichtlich der Bedeutung vortrefflich passen würde. Man denke nur an die Redensart σκήπτειν βέλος bei Aeschylos Agam. 378 Weckl.

Auch die Worte, welche die Erklärung enthalten, sind ohne Zweifel verderbt. Daß die von Vitruv V, 68 als zur Herstellung plötzlichen Donners dienend erwähnte Periakte nicht gemeint sein kann, liegt wohl auf der Hand. Der Ausdruck ὑψηλή befremdet durchaus.

Die Vorkehrungen zur Herstellung der Blitze waren gewiß verschieden, je nach der Verschiedenheit der Blitze selbst. Von sonstigen Angaben alter Gewährsmänner hat A. Müller a. a. O. S. 157, A. 2 nur eine beigebracht, nämlich die des Grammat. de comoed. bei Dübner, Scholia Gr. in Aristophanem p. XX, 31 fg., wo von βύρσαις παταγούσαις und χειροτινάκτῳ πυρί die Rede ist (hinsichtlich welches letzteren der von Müller angeführte Muhl sicherlich irrt). Lucian erwähnt Philopatris 24 τὸ κεραννοβόλον ἀγγεῖον καὶ τὸ βροντοποιὸν δοχεῖον. Hier erhalten wir also die Kunde, daß man den κεραυνός aus einem Gefäße warf. Die Bezeichnung dieses wird bei Pollux in dem verderbten ὑψηλή ent-

1) In den erhaltenen Tragödien kommt nichts Aehnliches vor. Denn wenn Geppert Altgr. Bühne S. 144 meint, daß Antigone im Anfang der Phönissen aus ihrem Gemach im oberen Stocke des Palastes erscheine und das Dach besteige, und J. Geel Eurip. Phoen. p 87 äußert: Apparent Paedagogus et Antigone in ostio τοῦ διήρους, quod habueritne portam necne nihil refert; non habuisse probabilius est. Ante hoc ostium est prominens tabulatum (nostrum balcon) unde Paedagogus prospicit ad explorandam viam, dum Antigone in ostio adstat. — Ab hoc tabulato per scalam oblique parieti appositam escenditur in tectum: per hanc igitur scalam Antigone ope senis altiorem locum petit, so ist daß sicherlich irrig. Antigone erscheint mit dem Pädagogen vor der Hauptthür des Palastes und die alte Treppe aus Cedernholz führt von dem Vorplatze dieses unmittelbar auf das Dach.

halten gewesen sein. Das nächstliegende Wort ist gewiß κυψέλη, mit welchem jedes leere Gefäß bezeichnet werden konnte, wohl auch ein cylindrisches, bienenkorbförmiges, unserem in der Hauswirthschaft und im Kriege gebräuchlichen Mörser entsprechendes. Dann wird περίακτος zum Adjectiv. Philo Vet. mathemat. opera ed. Thevenot. p. 97 erwähnt μηχανήματα περίακτα, „drehbare Wurfmaschienen", im Kriege. Sollte nicht die περίακτος κυψέλη bei Pollux eine gewisse Aehnlichkeit mit denselben gehabt haben?

3.

Der Grammat. de comoedia bei Dübner Schol. Gr. in Aristophanem berichtet p. XX, 28 fg.: κατεσκευάζετο ἡ σκηνὴ τριορόφοις οἰκοδομήμασι, πεποικιλμένη παραπετάσμασι καὶ ὀθόναις λευκαῖς καὶ μελαίναις — εἰς τύπον θαλάσσης, ταρτάρου, ᾅδου, κεραυνῶν καὶ βροντῶν, γῆς καὶ νυκτός, οὐρανοῦ, ἡμέρας καὶ ἀνακτόρων, καὶ πάντων ἁπλῶς· αὐλάς τε οὐ μικρὰς εἶχεν ἐξειργασμένας καὶ ἀψῖδας εἰς τύπον ὀρῶν. Daß die Worte von γῆς an nicht in Ordnung sind, liegt auf der Hand. Muhl hat die ersten mit Billigung A. Müller's a. a. O. S. 111, A. 8 so geordnet: ἡμέρας καὶ νυκτός, γῆς καὶ οὐρανοῦ, ἀνακτόρων. Ich halte es für wahrscheinlicher daß die Folge der Worte war: γῆς καὶ οὐρ., ἡμ. καὶ νυκτός. An ἀνακτόρων haben Muhl und Müller keinen Anstoß genommen. Wie kommen aber die ἀνάκτορα hieher, wo von den Weltkörpern und Naturerscheinungen die Rede ist, nachdem die Paläste schon gleich am Anfange erwähnt waren? Gewiß ist ἀνακτόρων verderbt und am Wahrscheinlichsten aus ἀστέρων. Dieses Wort paßt gerade in Verbindung mit νυκτὸς besonders gut. Unmittelbar vor ihm wird καὶ gestanden haben, wie es noch bei Dübner vor ἀνακτόρων steht, während es in dem Vorhergehenden einmal ausgefallen ist. Daß selbst in den erhaltenen Dramen des Euripides noch Stellen vorkommen, welche auf eine bildliche Darstellung der Gestirne deuten, habe ich schon in den scenischen und kritischen Bemerkungen zum Kyklops, Gött. 1881, S. 9 vermuthet.

Endlich ist es mir auffallend, daß Niemand an αὐλάς in dem letzten Satze Anstoß genommen hat. Was soll das Wort hier, in welcher Bedeutung man auch αὐλάς fassen möge? Sicherlich war ὕλας „waldige Partieen" geschrieben, welche zu den im folgenden erwähnten Bergen vortrefflich passen. Aehnlich erwähnt Naevius bei Nonius p. 95, 27 zusammen saxa, silvas, lapides, montes. Das ἐξεργάζεσθαι geschah selbstverständlich durch Malerei.

II.

Zum Dionysostheater in Athen.

1.

Unter den auf dieses Theater bezüglichen Schriftstellen ist von besonderer Wichtigkeit Andocid. de myster. § 38, p. 19 Reisk., wo Diokleides hinsichtlich der Hermokopiden Folgendes aussagt: *ἀναστὰς δὲ πρωῒ ψευσθεὶς τῆς ὥρας βαδίζειν· εἶναι δὲ πανσέληνον· ἐπεὶ δὲ παρὰ τὸ προπύλαιον τοῦ Διονύσου ἦν, ὁρᾶν ἀνθρώπους πολλοὺς ἀπὸ τοῦ ᾠδείου καταβαίνοντας εἰς τὴν ὀρχήστραν· δείσας δὲ αὐτούς, εἰσελθὼν ὑπὸ τὴν σκιὰν καθέζεσθαι μεταξὺ τοῦ κίονος καὶ τῆς στήλης, ἐφ' ᾗ ὁ στρατηγός ἐστιν ὁ χαλκοῦς· ὁρᾶν δὲ ἀνθρώπους τὸν μὲν ἀριθμὸν μάλιστα τριακοσίους, ἑστάναι δὲ κύκλῳ ἀνὰ πέντε καὶ δέκα ἄνδρας, τοὺς δὲ ἀνὰ εἴκοσιν· ὁρῶν δὲ αὐτῶν πρὸς τὴν σελήνην τὰ πρόσωπα τῶν πλείστων γινώσκειν.*

Freilich hat Loeschke „Die Enneakrunosepisode bei Pausanias", Dorpater Universitätsprogr. 1883, S. 4 und 6 die Orchestra für die auf der Agora belegene gehalten. Aber schon Milchhöfer ist gegen ihn mit Recht für die des Dionysostheaters eingetreten, bei Baumeister Denkm. d. klass. Altert. I, S. 192, an welchem ich, der ich diese Stelle schon lange vorher in meinen Vorlesungen für die Kunde des Dionysostheaters benutzt habe, von Anfang an auch nicht den mindesten Zweifel hegte [1]).

Nach der Stelle des Andokides haben wir da, wo sich der östliche Eingang in die Orchestra befand, ein mit diesem in Zusammenhang stehendes Propyläon anzunehmen, über welches wir allerdings anderswoher keine Kunde haben. Der Platz, an welchem Diokleides sich niedersetzte, muß zwischen der letzten Säule des Propyläon nach der Ochestra zu und der Stele mit dem Strategen nach der Bühne zu belegen gedacht werden. Von diesem Schlupfwinkel aus konnte man den zwischen den untersten Zuschauersitzen liegenden Theil der Orchestra am Besten übersehen. Die Größe derselben erscheint nach dem, was der Sclave über die Zahl der in ihr stehenden Männer und die Art, wie sie in verschiedenen Partien zusammenstanden, angiebt, als eine recht bedeutende.

1) Wenn Loeschke daran Anstoß nahm, daß in der Orchestra eines Theaters ein Stratege aufgestellt sei, so erinnerte er sich nicht daran, daß im Theater zu Sikyon eine Statue des Aratos mit dem Schild sogar auf der Bühne stand (Pausan. II, 7, 5), um von der besonders schönen Gruppe von Kämpfenden im Theater von Argos (Pausan. II, 20, 6) zu schweigen, sowie von dem Diomed im Th. zu Athen (W. Gurlitt „Ueber Pausanias" S. 267).

Ein größerer steinerner Bau, als welcher die Thymele noch in Strack's Theatergebäude dargestellt ist, kann in ihr nicht vorhanden gewesen sein.

Hinsichtlich des „ehernen Strategen" erfahren wir durch die Scholien zu Aristides p. 202, Frommel, Vol. III, p. 535. Dindorf: *δύο εἰσὶν ἀνδριάντες ἐν τῷ Ἀθήνῃσι θεάτρῳ, ὁ μὲν ἐκ δεξιῶν Θεμιστοκλέους, ὁ δ' ἐξ εὐωνύμων Μιλτιάδου, πλησίον δὲ αὐτῶν ἑκατέρου Πέρσης αἰχμάλωτος.* Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß von diesen beiden Strategen einer der bei Andokides erwähnte ist, wenn auch bei dem Scholiasten weder das Material noch der Platz im Theater genauer angegeben ist, und bei Andokides nichts über den Persischen Gefangenen verlautet. Aus jenem erhellt, daß der eherne Stratege am östlichen Eingang in die Orchestra stand. Ist nun mit jenem der Miltiades oder der Themistokles gemeint?

Man könnte sagen, daß zu Andokides' Zeit erst ein Stratege vorhanden gewesen sei. Aber das würde schon an sich ebenso unwahrscheinlich sein, als wenn man aus dem Schweigen des Redners den Schluß ziehen wollte, daß der Persische Gefangene in der Nähe des Strategen damals noch nicht dagewesen sei. Die beiden Gruppen von Miltiades und von Themistokles entsprechen sich so durchaus, daß die eine ohne die andere nicht wohl gedacht werden kann. Beide haben aber gewiß nicht an dem einen östlichen Eingang in die Orchestra gestanden, die eine dort rechts, die andere links. Schon die Worte bei Andokides verbieten das anzunehmen; zudem würde die links (von der Orchestra aus gerechnet) den Zuschauern nur höchst ungenügend zu Gesicht gekommen sein. Also wird die andere der beiden Gruppen an dem anderen Eingang in die Orchestra aufgestellt gewesen sein und zwar an der ganz entsprechenden Stelle. Das Rechts und Links in der Orchestra bezieht sich aber auf die Zuschauer. Demnach war der Strateg links Miltiades, der rechts Themistokles.

Daß beide Gruppen aus demselben Material waren, also aus Erz, ist unzweifelhaft, und dieses Material spricht dafür, daß die Herstellung derselben nicht eben viel früher statthatte, als zur Zeit des Andokides, vgl. Demosthenes in Aristocrat. § 196: *οἱ πάλαι — Θεμιστοκλέα — καὶ Μιλτιάδην — καὶ πολλοὺς ἄλλους, οὐκ ἴσα τοῖς νῦν στρατηγοῖς ἀγαθὰ εἰργασμένους, οὐ χαλκοῦς ἔστασαν οὐδ' ὑπερηγάπων.*

Da das Propyläon gewiß nicht aus Holz hergestellt war, so darf man wohl voraussetzen, daß zu der Zeit des Andokides auch der Zuschauerraum und ein Theil des Bühnengebäudes aus Stein bestanden.

2.

Ein Scholiast zu Aristophanes' Frieden Vs 725 berichtet: ἄγαλμα ἦν ἐν τῷ θεάτρῳ τῆς Ἀθηνᾶς. Diese Worte dienen zur Begründung der Antwort, welche Hermes, der Thürhüter des Palastes des Zeus, dem Trygäos, der von dem Olymp wieder zur Erde hinabgehen will, auf seine Frage πῶς δῆτ' ἐγὼ καταβήσομαι; giebt, indem er sagt: θάρσει καλῶς τηδὶ παρ' αὐτὴν τὴν θεόν. Der Scholiast bezieht nämlich den Ausdruck „die Göttin" auf die Athena. Fr. Volkm. Fritzsche, welcher der Angabe des Scholiasten durchaus Glauben schenkt, obgleich er keinen anderen Gewährsmann für das Vorhandensein dieser Statue im Theater zu Athen kennt, denkt sich dieselbe als auf der Bühne, dem Logeion aufgestellt in der Ausgabe der Thesmophoriazusen des Aristophanes p. 724. Auch Geppert (Die altgriech. Bühne S. 103, Anm. 5), der die Annahme des Scholiasten ebenfalls nicht bezweifelt, bemerkt, aus den Worten des Dichters selbst gehe hervor, daß sich Trygäos auf der Scene befand, wenn schon es allerdings nicht glaublich sei, daß man das Bild der Göttin auch während des Schauspiels hin stehen ließ. Die letzten Worte können allerdings dazu beitragen, anzunehmen, daß der Scholiast irrt, indem er annimmt, der Ausdruck τὴν θεόν beziehe sich auf ein Bild der Athena. In der That ist mit jenem Eirene gemeint, die einzige gegenwärtige weibliche Person, welche als „Göttin" bezeichnet werden konnte, auch die einzige, welche im Olymp zurückbleibt, während die beiden anderen, Opora und Theoria, mit Trygäos auf die Erde hinabgehen. Die richtige Beziehung jenes Ausdrucks findet sich schon bei einem Scholiasten zu Vs 725. Sie ist auch von A. Schönborn „Skene der Hellenen" S. 338 fg. mit Recht gebilligt. Die Meinung Fritzsche's und Geppert's, daß das Bild der Athena auf der gewöhnlichen Bühne gestanden habe, ist durchaus irrig. Die Handlung auf dem Olymp geht ja nicht auf dieser vor sich, sondern auf einer Bühne in der Höhe über jener, nämlich dem Theologeion. Dieses erkannte, wie ich hinterdrein sehe, schon G. Hermann in der Leipz. Litteratur-Ztg 1817, n. 59, S. 460. Das Theologeion im Frieden ist das einzige uns in dem erhaltenen Dramen überkommene Beispiel desselben. Man ersieht aus diesem Stücke auch, daß es sich um eine feste, dem Logeion entsprechende Bühne handelt, welche übrigens nur dann angebracht wurde, wenn die Handlung auch auf dem Olymp vor sich ging. Daß auf dieser Bühne nicht der Deus ex machina erschien (A. Müller S. 155 A. 3) ist unzweifelhaft.

Nach dem Obigen kann es scheinen, als beruhe die Athena im Theater zu Athen bloß auf einer irrigen Erklärung des Ausdrucks *τὴν θεόν* im Frieden Vs 725. Doch wagen wir das nicht zu behaupten. Nur das steht uns sicher, daß, wenn im Bühnengebäude des Dionysostheaters zu Athen sich ein Bild der Athena befand, dieses an der steinernen Hinterwand (dem Proskenion) in der Höhe angebracht war. So erhellt auch, wie jene irrige Erklärung der Worte des Aristophanes veranlaßt werden konnte. Daß das Bild schon zur Zeit des Dichters vorhanden war, steht aber keinesweges sicher.

III.

Platz der Handlung in Aeschylos' Persern und Platz der Grabmäler in den erhaltenen Tragödien.

Man nimmt an, daß in den Persern die Handlung auf dem Vorplatze des Königspalastes zu Susa vor sich gehe. Dieser Palast kommt als früher dem Dareios und jetzt der Atossa zur Wohnung dienend vor Vs 162 fg. Weckl., 33, 611, 835, 851 fg. Er ist derselbe, in welchem auch der neue Großkönig Xerxes, der bei dem Beginne des Drama noch abwesend ist, residirt. Daß es sich aber in den Decorationen an der Hinterwand der Bühne um diesen Palast nicht handelt, geht aus mehreren Gründen hervor. Zuerst daraus, daß Atossa, als sie zum ersten Male auf der Bühne erscheint, zu Wagen gekommen ist, vgl. Vs 610 fg. Freilich hat man in der vorgefaßten Meinung, daß der Königspalast am Proskenion dargestellt sei, das Wort *ὀχήματα* auf einen Thronsessel bezogen, auf welchen Atossa aus dem Palaste auf den Vorplatz desselben getragen werde. Aber diese schon in sprachlicher Hinsicht nicht unbedenkliche Erklärung würde auch die Anerkennung eines Verfahrens bedingen, von welchem sonst in keiner der uns erhaltenen Tragödien ein auch annähernd entsprechendes Beispiel vorkommt. Wenn Schönborn „Skena der Hell." S. 194 behauptet, ein mit Rossen bespannter Wagen sei auf der antiken Bühne nicht nachzuweisen, so ist das ein sehr großer Irrthum. Ich erinnere nur, um bloß ein Beispiel aus Aeschylos beizubringen, an Agamemnon und Kassandra im Agamemon, wo der Wagen ohne Zweifel auf der Bühne erscheint. Natürlich kommt nichts darauf an, ob der Wagen mit Rossen oder mit Maulthieren bespannt ist,

welche letztere wie bei dem des Agamemnon und der Kassandra, so auch bei den der Atossa vorauszusetzen sein werden[1]).

Wer, der die Stellen Vs 231 fg., 525 fg., 532 fg., 610 fg., 834 fg., 851 fg., 1077, aufmerksam durchliest und mit einander vergleicht, wird glauben, daß Atossa aus dem an der Hinterwand der Bühne dargestellten Gebäude komme und in dasselbe zurückkehre, oder daß Xerxes von dem Chore in dieses Gebäude und nicht in ein ferner liegendes geleitet werde? Endlich betrachte man besonders die Worte des Chorführers in Vs 143 fg.:

Ἀλλ' ἄγε, Πέρσαι,
τόδ' ἐνεζόμενοι στέγος ἀρχαῖον,
φροντίδα κεδνὴν καὶ βαθύβουλον
θώμεθα.

Wie können sich die Greise ohne Weiteres in den königlichen Palast setzen, wenn sie auch von Xerxes gewählt waren *χώρας ἐφορεύειν* (Vs 7)? Es liegt klar zu Tage, daß das *στέγος ἀρχαῖον* das Rathhaus sein soll.

Wie paßt es aber dazu, daß vor diesem Hause auf dem Logeion das Grabmal des Dareios sich befindet[2])?

Grabmäler von Fürsten finden wir in den erhaltenen Tragödien sonst noch in der Helena des Euripides und in Aeschylos' Choephoren.

In der Helena handelt es sich um das des Proteus, welches dicht vor seinem Palaste sich befindet, wo es von seinem Sohn und Nachfolger Theoklymenos errichtet ist, der Vs 1165 fg. Nauck selbst den Grund für diesen Platz angiebt:

ὦ χαῖρε πατρὸς μνῆμ'· ἐπ' ἐξόδοισι γὰρ
ἔθαψα, Πρωτεῦ, σ' ἕνεκ' ἐμῆς προσρήσεως·
ἀεὶ δέ σ' ἐξιὼν τε κείσιὼν δόμους
Θεοκλύμενος παῖς ὅδε προσεννέπει, πάτερ,

Was die Choephoren betrifft, so hat Schönborn Sk. d. Hell. S. 224 angenommen, daß die erste Abtheilung dieses Dramas, in welcher, und zwar gleich am Anfang Vs 4 fg., das Grabmal des

---

1) Daß der Wagen auf der Bühne erschien, ist jetzt allgemeine Annahme der Kenner, vgl. A. Müller a. a. O. S. 134, wo aber der der Atossa gar nicht erwähnt wird.

2) Einige haben freilich gemeint, daß das Grabmal sich neben dem Palaste an der Hinterwand der Bühne befinde, wie auch darüber verschiedene Meinungen geäußert sind, ob das Grabmal als tempelähnliches Heroon dargestellt gewesen sei oder als Tumulus. Ohne Zweifel ist an einen solchen zu denken, der freistehend dargestellt war. Doch diese Fragen berühren unsere Hauptfrage nicht und brauchen deshalb hier nicht weiter erörtert zu werden.

Agamemnon als auf der Bühne gegenwärtig erscheint, nicht vor dem Atridenpalaste spiele, sondern in einer öden Gegend. Erst nach Vs 648 Weckl. komme in den veränderten Decorationen jener Palast zum Vorschein. Das ist aber ohne Zweifel irrig. Ich will nur darauf aufmerksam machen, daß Orestes in Vs 552 äußert, Elektra solle *στείχειν ἔσω*, ein Ausdruck, welcher gewiß nicht zu dem Aufenthalt in der öden Gegend paßt, sondern nur dann, wenn Orestes und Elektra vor dem Atridenpalaste stehen, und daß in Vs 581 fg.:

τὰ δ' ἄλλα τούτῳ δεῦρ' ἐποπτεῦσαι λέγω
ξιφηφόρους ἀγῶνας ὀρθώσαντί μοι,

wo unter *οὗτος* Apollo zu verstehen ist und zwar aller Wahrscheinlichkeit nach derselbe Agyieus vor dem Atridenpalaste, welcher im Agamemnon von Kassandra angerufen wird, während nicht abzusehen ist, wie Apollon in die „öde Gegend" neben dem Grabmal versetzt werden konnte.

Aber wie paßt das Grabmal des Agamemnon vor den Palast, in welchem jetzt Klytämnestra und Aegisthos wohnen? Das Motiv, jenes hier anzulegen kann, kein solches gewesen sein, wie wir es oben in der Helena hinsichtlich des Theoklymenos gefunden haben. Aber die Mörder des Agamemnon durften sich nicht weigern, den Gemordeten auf dem Platze vor ihrem Wohnsitze zu bestatten, wenn jener ein solcher war, der zum Ehrenbegräbnisse des berühmten Anführers gegen Troja besonders geeignet war. Nehmen wir an, daß der vordere Theil des Logeion und die Orchestra die Agora vorstellt, so paßt diese als Begräbnißplatz des als Heros geltenden Agamemnon durchaus (Xenoph. Hell. VII, 2 a. E.). Ob die Orchestra und der vordere Theil des Logeion auch in der vor dem Atridenpalast spielenden Elektra die Agora repräsentirte, läßt sich allerdings bezweifeln (Comment. de Sophocl. in dem Ind. schol. in Academia Georgia Augusta per sem. hib. MDCCCLXXXV—MDCCCLXXXVI hab., p. 5). Das Grabmal von der Form eines Tumulus (*τύμβον ὄχθος* Vs 4) wird auf der rechten Seite des Logeion nach der Seite der Fremde hin etwas entfernt von dem Eingang in den Palast gestanden haben, sodaß Orestes und Pylades sich leicht unbemerkt, nachdem sie die aus der in der Mitte des Palastes befindlichen Thür nebst dem Chor herauskommende Elektra gesehen haben (Vs 10 fg.), in den von rechts auf die Bühne kommenden Eingang zurückziehen können (nach Vs 20). Da Orestes gleich am Anfang den Hermes Chthonios anredet und auch Elektra dasselbe thut (Vs 124), so ist es wahrscheinlich, daß ein Bild dieses Gottes auf dem Tumulus

gestanden habe, wohl eine Herme, die nach Cicero de leg. II, 26, 65 auf Gräbern häufiger vorkam.

Entsprechend verhält es sich mit der Anbringung des Grabmals des Dareios auf dem Logeion in Aeschylos' Persern. Da das στέγος ἀρχαῖον an der Mitte der Hinterwand der Bühne das Rathhaus war, läßt es sich mit besonderem Scheine annehmen, daß Logeion und Orchestra als Agora betrachtet wurden. Als auf der Agora begraben gilt Dareios, der Heros der Perser, ganz nach Griechischem Gebrauche, wie die Todten- und Unterweltsgötter der Perser dieselben waren wie bei den Griechen (vgl. Vs 631 fg., 643 fg.). Sein Grabmal ist auch ein Tumulus, wie das des Agamemnon in den Choephoren vgl. Pers. Vs 650. Es befand sich aber gerade in der Mitte der Bühne, so daß es den Eingang in das Rathhaus den Zuschauern zum Theil verdeckte. Diesen Platz muß man ihm geben, damit Dareios, welcher auf seiner Höhe erscheint und von da aus längere Zeit spricht, so gehörig sichtbar war, und man könnte es um so mehr, als die Thür des Rathhauses überall ja nicht zum Gebrauch kommt. Dareios steigt aus seinem Grabe empor und erscheint den Zuschauern vollständig zuerst oben auf denselben. Das Grabmal brauchte hinten nicht ausgeführt zu sein. Aus dem Raume unter dem Logeion führte eine unsichtbare Treppe, die χαρώνιοι κλίμακες (Pollux IV, 132) den oben abgeplatteten Tumulus herauf.

IV.

Ueber die verschiedene Beziehung und Bedeutung des Logeion und der Orchestra, auch über die Decoration des ersteren in den Fällen, daß die Handlung in einem Heiligthum mit oder ohne Tempel dann vor sich geht.

Diese Gegenstände sind noch nicht genügend, namentlich nicht im Zusammenhange und übersichtlich behandelt.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Apollinische Heiligthum zu Delphi bei Aeschylos in den Eumeniden und bei Euripides im Ion.

Bei Aeschylos finden sich nur einige Andeutungen, die mit größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit auf die Decorationen bezogen werden können. Doch fehlt es nicht an einigen Stellen, aus welchen die Beziehung und die Herstellung des Logeion sowie der Umstand, daß die Orchestra hinsichtlich jener von dem Logeion verschieden ist, ermittelt werden kann, wenn die betreffenden Stellen richtig gedeutet und zum Theil geändert sein werden.

In seiner Rede zu den Erinyen von Vs 179 Weckl. an sagt Apollon:

ἔξω, κελεύω, τῶνδε δωμάτων τάχος
χωρεῖτ', ἀπαλλάσσεσθε μαντικῶν μυχῶν,

und später:

οὗτοι δόμοισι τοῖσδε χρίμπτεσθαι πρέπει,

und nachher noch:

λέοντος ἄντρον αἱματορρόφου
οἰκεῖν τοιαύτας εἰκός, οὐ χρηστηρίοις
ἐν τοῖσδε πλησίοισι τρίβεσθαι μύσος.

Man hat aus den beiden ersten Stellen geschlossen, daß die Erinyen sich im Tempel des Apollon befinden und sogar angenommen, daß vor Vs 64 ein Ekkyklem stattgefunden habe (Schönborn a. a. O. S. 209 fg., A. Müller a. a. O. S. 145, A. 7). Jenem Umstande widerspricht aber die dritte Stelle durch den Ausdruck χρηστηρίοις πλησίοισι. Oder wollte man etwa annehmen, daß hier der hintere Theil des Tempels, das Adyton, in welchem die Orakel ertheilt wurden, bezeichnet werden solle? Uns ist diese Annahme der Unterscheidung zwischen dem Tempel und dem Adyton schon deshalb unwahrscheinlich, weil in Beziehung auf χρηστήρια dieselbe Hinweisung mit τάδε statthat, als hinsichtlich der δώματα und δόμοι, das Adyton aber nicht zum Vorschein kam, sondern nur die Fronte des Tempels. Das Wort πλησίοισι ist ohne Zweifel verderbt. Auch das Wort δώματα müßte verderbt sein, wenn es nichts Anderes als den Tempel bezeichnen könnte. Die Erinyen befinden sich ohne Zweifel auf dem Platze vor diesem und mit ihnen Apollon, Orestes und Hermes. An ein Ekkyklem ist gar nicht zu denken. Warum sollte aber ein eingefriedigter Platz vor dem Tempel, mit einem Altar und einem Bilde versehen, nicht δῶμα, δόμος genannt werden können?

In der Andromache des Euripides findet man jene unter freiem Himmel vor dem Thetideion an dem Altar der Göttin sitzen. Sie wird Vs 129 fg., Nauck, aufgefordert ihren Platz zu verlassen:

Λεῖπε δεξίμηλον
δόμον τᾶς ποντίας θεοῦ.

Daß der Vorplatz des Tempels zu Delphi, ἃ Φοίβου θυμέλα ὑπὸ ναοῖς (Eur. Ion Vs 114 fg.), auf welchem der große Opferaltar stand und der nicht Jedem ohne Weiteres zugänglich war, eine Umfriedigung hatte, erhellt aus Euripides' Ion, Vs 1320 fg., wo die Pythia zu Ion sagt:

ἐπίσχες, ὦ παῖ· τρίποδα γὰρ χρηστήριον
λιποῦσα θριγκοῦ τοῦδ' ὑπερβάλλω πόδα.[1])

Diese Umfriedigung bezieht sich auf die Heiligkeit des Platzes, wie denn auch die Grabstätte der Semele in den Bakchen eingehegt war, vgl. Eur. Bacch. Vs 10 fg. In Betreff der Heiligkeit des Vorplatzes des Delphischen Tempels, welcher im Ion Vs 124 als δάπεδον θεοῦ bezeichnet wird, in Vs 104 als εἴσοδοι Φοίβου, in Vs 220 fg. als γυάλων[2]) βαλός, und Vs 79 als πυλώματα (denn hier ist für πρὸ ναοῦ gewiß nicht zu schreiben προνάου, obgleich der Delphische Tempel einen πρόναος hatte, da Ion Vs 124 selbst sagt, daß er dem Phöbos πρὸ δόμων diene), vgl. man Vs. 220 fg. und 226 fg. Natürlich hatte der θριγκός vorn nach der Orchestra und hinten nach dem Tempel zu je eine Thür, die geschlossen und geöffnet werden konnte.

Kehren wir jetzt zu den oben angeführten Stellen der Eumeniden zurück, so läßt sich mit Wahrscheinlichkeit eine Verbesserung des verderbten πλησίοισι in Vs 195 geben, welche zeigen kann, daß auch bei Aeschylos jene Umfriedigung erwähnt war Pauw wollte πλουσίοισι schreiben, Meineke im Philologus XIX, S. 400 πανδίοισι, Wecklein λῃΐτοισι, von welchen Conjecturen ohne Zweifel keine das Richtige trifft. Ich glaube, daß zu lesen sei

---

1) Mit dieser Stelle ist zusammenzuhalten die Vs 156 fg.:

αὐδῶ μὴ χρίμπτειν θριγκοῖς
μηδ' εἰς χρυσήρεις οἴκους.

Es liegt ja deutlich zu Tage, daß die θριγκοί von den οἶκοι, dem Tempel, geschieden werden, jene sich nicht an diesem befanden. — Sollte nicht auch der αὐλά im Corp. inscr. Graec. n. 1688, Z. 35 (T. I, p. 807) hieher gehören?

2) Der Ausdruck γύαλα findet sich in Beziehung auf das Apollinische Heiligthum zu Delphi häufiger, vgl. Eur. Ion Vs 76 (δαφνώδη γύαλα τάδε), 235 (γύαλα τάδε), 245 (γ. θεοῦ), Phoen. 237 (μεσόμφαλα γ. Φοίβου), Androm. 1092 fg. (διαστείχει θεοῦ χρυσοῦ γέμοντα γ., θησαύρους βροτῶν). Er ist immer zur Bezeichnung des heiligen Peribolos zu Delphi gebraucht, und daher erklärt sich auch der zweite Theil der Bemerkung bei Hesychios: Γύαλον κοῖλον, ἄλλοι περίβολον. Dieselbe Beziehung hat er in den das Trojanische Heiligthum betreffenden Worten in Aristophanes' Thesm. 109 fg.

Φοῖβον, ὃς ἱδρύσατο χώρας
γύαλα Σιμουντίδι γᾷ.

Wenn Fritzsche (in d. Thesm. a. a. O.) zu den auf Delphi bezüglichen Stellen stets das Adyton verstanden wissen wollte, so ist das ein grosser Irrthum. Bei Aristophanes ist allerdings wohl der auf der Burg zu Troja verehrte (Homer. Il. V, 446, VII, 83) Apollo, auf welchen der Mauerbau zu beziehen ist, zu verstehen, aber der Ausdruck γύαλα nicht auf die Mauer zu beziehen, sondern auf den mit Höhlen versehenen Berg, auf welchem die Burg lag.

κλισίοισι oder κλεισίοισι. Dieses Wort wird bei Pausanias IV, 1, 5 von einem verschließbaren Ort, σηκός, saeptum gebraucht. In den Eumeniden ist unter κλίσια der besonders heilige Platz, wo die θυμέλη war, zu verstehen [1]).

An die Eumeniden und den Ion schließen wir zuerst die Schutzflehenden des Euripides.

Auch hier finden wir an der Hinterwand der Bühne in der Mitte ein Tempelgebäude dargestellt, den Tempel der Demeter und der Persephone (ναούς Vs 2).

Von diesem ist verschieden der σηκός, von welchem Aethra in Vs 28 fg. spricht:

τυγχάνω δ' ὑπὲρ χθονὸς
ἀρότου προθύουσ' ἐκ δόμων ἐλθοῦσ' ἐμῶν
πρὸς τόνδε σηκόν, ἔνθα πρῶτα φαίνεται [2])
φρίξας ὑπὲρ γῆς τῆσδε κάρπιμος στάχυς.
δεσμὸν δ' ἄδεσμον τόνδ' ἔχουσα φυλλάδος
μένω πρὸς ἀγναῖς ἐσχάραις δυοῖν θεαῖν
Κόρης τε καὶ Δήμητρος [3]).

Die mit einem Zugange versehene Umfriedigung, der σηκός, ist derselbe Platz, welchen der Chor Vs 64 nennt δεξιπύρους θεῶν θυμέλας, und Vs 271 als ἱερὰ δάπεδα Περσεφονείας bezeichnet.

Nun erwähnen wir noch drei Tragödien, in denen das Vorhandensein eines Tempels an der Hinterwand der Bühne nicht statthat oder wenigstens nicht nachweisbar ist, aber es sich doch um ein Heiligthum handelt.

In den Schutzflehenden des Aeschylos geht die Handlung vor sich an der Küste des Argivischen Landes, und zwar, wie wir aus Vs 32 erfahren, einer χέρσος ἀσώδης. Vermuthlich ist der Platz jenes χωρίον Ἀπόβαθμοι, welches der Sage nach als die Stätte

---

1) An diesem wurden, nach Euripides zu urtheilen, auch Orakel gegeben. Vgl. Ion Vs 226 fg.:

εἰ μὲν ἐθύσατε πέλανον πρὸ δόμων
καί τι πύθεσθαι χρήζετε Φοίβου,
πάριτ' εἰς θυμέλας,

und Vs 413 fg.:

ΞΟΥ. ἀλλὰ τίς προφητεύει θεοῦ;
ΙΩΝ. ἡμεῖς τά γ' ἔξω, τῶν δ' ἔσω ἄλλοις μέλει.

Diese Bemerkung kann auch zur genaueren Deutung des Adj. χρηστηρίοις dienen.

2) Sollte nicht zu schreiben sein: πρῶτ' ἐφαίνετο?

3) Mit den letzten Worten ist zu vergleichen, daß Aethra von Theseus Vs 290 bezeichnet wird als σεμναῖσι Δηοῦς ἐσχάραις παρημένη.

galt, an der Danaos gelandet war (Pausan. II, 38, 4). Mitten an der Hinterwand der Bühne erblickt man einen Hügel (*πάγος* Vs. 195), der als Altar (*βωμός*, Vs 196, 377) der *ἀγώνιοι θεοί* (Vs 248, 335, 359) dient, deren Bilder, gewiß Rundwerke aus Holz (*βρέτεα*, Vs 436, 472) an dem Altar, etwa auf den Stufen desselben aufgestellt waren. Der Altar hatte eine nicht unbeträchtliche Höhe, da er Vs 721 als *ἱκεταδόκος σκοπή* bezeichnet wird. Die Bilder waren mit den Attributen der Götter versehen, Zeus mit dem Adler (Vs 218), wie man, schwerlich mit Recht, annimmt[1]), Poseidon mit der Triaina (Vs 224)[2]), Hermes vermuthlich mit dem Kerykeion (Vs 226 fg.). Wenn E. Curtius Att. Studien I, S. 39 fg. aus dem Ausdruck *ἕδρᾶν πολυθέων* (Vs 429 fg.) schließt, daß eine Anzahl anderer Altäre dargestellt sei, so irrt er sicherlich.

Der Altar, der im Hintergrunde der Bühne in der Mitte angebracht gewesen sein wird, lag *ἐν ἀγνῷ* (Vs 229). Die Orchestra wird als *λευρόν* und zwar *βέβηλον ἄλσος*, d. i. „eine flache, Jedem zugängliche, ungeweihte Gegend bezeichnet Vs 517 fg. An einen Hain mit Bäumen, wie Schönborn wollte, der nicht erkannte, daß es sich um die Orchestra handelt, ist natürlich nicht zu denken. Ob der Raum auf dem Logeion, wo der große Altar stand, eingehegt war, wird nicht angedeutet. Doch ist es durchaus wahrscheinlich.

In Aeschylos' Sieben gegen Theben geht die Handlung auf der Akropolis vor sich, vgl. den Chor Vs 226 fg. Weckl.

τάνδ' ἐν ἀκρόπτολιν,
τίμιον ἕδος, ἱκόμαν.

Gewöhnlich nimmt man an, daß an der Hinterwand der Bühne der königliche Palast dargestellt war. Allerdings erfahren wir durch Pausanias IX, 12, 3, daß der Palast des Kadmos sich auf der Akropolis befand an der Stelle der späteren Agora und neben ihm der Thalamos der Semele, welche beiden Baulichkeiten in Euripides' Bakchen dargestellt waren. Aber in den Sieben findet sich keine Spur von dem Königspalaste an der Hinterwand der

---

1) Vgl. Vs 218 fg.:

ΔΑ. καὶ Ζηνὸς ὄρνιν τόνδε νῦν κικλήσκετε.
ΧΟ. καλοῦμεν αὐγὰς ἡλίου σωτηρίους,
ἀγνόν τ' Ἀπόλλω, φυγάδ' ἀπ' οὐρανοῦ θεόν.

Dass im ersten Vers ein Fehler steckt, ist klar. Zeus ist schon in Vs 215 vom Chore angerufen. Was soll da noch die Anrufung des ihm heiligen Vogels? Ferner, wie können die *αὐγαὶ ἡλίου* als der Vogel des Zeus betrachtet werden? Ohne Zweifel war geschrieben: *ἶνιν*.

2) Die *τρίαιναι*, welche in Vs 763 erwähnt werden, gehören nicht hieher, da das betreffende Wort ohne Zweifel verderbt ist.

Bühne. Hier werden dagegen als vor Augen befindlich erwähnt die *ἀρχαῖα βρέτη πολισσούχων θεῶν* Vs 165, 195 fg., 93, (vgl. auch Vs 205 fg.: *θεῶν ἅδε πανάγυρις*), von welchen in keiner der Tragödien, in denen die Handlung auf dem Vorplatz des Thebanischen Königspalastes vor sich geht, die Rede ist. Ob man annehmen darf, daß diese Bilder auf der Agora aufgestellt waren, steht dahin, ist jedoch nicht unwahrscheinlich. Der Chor befand sich auf der Bühne innerhalb derselben. Eteokles weist ihn 251 fg. in die Orchestra hinab:

ἐκτὸς οὖσ' ἀγαλμάτων
εὔχου τὰ κρείσσω ξυμμάχους εἶναι θεούς.

Die Bilder waren also entweder auf dem vorderen Rande des Logeion in einer Reihe aufgestellt, oder auf dem Logeion weiter nach hinten in einem Kreise. Dieses ist gewiß das Wahrscheinlichere, da die Zuschauer sonst sämmtliche Bilder von hinten zu Gesicht bekommen haben würden. Das Logeion galt ohne Zweifel als heilige Stätte. Daß das in Betreff der Orchestra nicht der Fall war, wird nicht ausdrücklich angedeutet, ist jedoch mit Sicherheit anzunehmen.

Im Oedipus auf Kolonos des Sophokles ist nach der Seite der Fremde hin der Eumenidenhain an der Hinterwand der Bühne durch Malerei dargestellt. In das Innere des Hains, in welches sich Oedipus begiebt (Vs 113 fg.), gelangte derselbe durch eine Oeffnung etwa in der Mitte der Hinterwand, hinter welcher man gemalte Bäume erblickte, so daß man eine Art von Allee vor sich zu haben glauben konnte. Das Eumenidenheiligthum nahm auch einen Platz auf dem Logeion ein, der durch Steine bezeichnet war. Vgl. darüber meine Comment. de Sophocl. in dem Index lect. der G.-A. Univ. zum Wintersem. 1875—1876, p. 15 fg. Der vorderste Theil des Logeion enthält einen betretbaren Weg. Auch die Orchestra ist für Jeden zugänglich.

Nachtrag zu S. 214, Anm. 1.

Auf die Conjectur *ἵνιν* ist, wie ich hinterdrein aus Wecklein's Ausg. von Aesch. fab. Vol. II, p. 103 sehe, schon Kiehl verfallen.

Preisaufgaben der K. Gesellschaft der Wissenschaften.

Für das Jahr 1890 lautet die Aufgabe der Physikalischen Klasse:

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß dichte oder krystallinische Kalke, zumal des Mittel-Devon, allerlei Umwandlungen erlitten haben, sei es durch Veränderung ihrer Structur, sei es durch Stoffaustausch u. s. w. Die mechanischen und chemischen Vorgänge, welche hierbei mitwirken, sind jedoch durchaus nicht genügend bekannt. Es wird daher gewünscht, daß diese Umwandlungen mit Hülfe chemischer und mikroskopischer Untersuchungen verfolgt und erklärt werden möchten.

Die Aufgabe für 1891 lautet nach dem Vorschlag der Mathematischen Klasse:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäß zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Die Aufgabe der Historisch-Philologischen Klasse für 1892 ist folgende:

Für die älteste Geschichte Attikas ist es von außerordentlicher Bedeutung, zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen

Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, an denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, gegeben werde.

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehn, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet, und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Preisaufgaben der **Wedekindschen Preisstiftung** für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die

Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen[1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrilt auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtsschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1895, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen

portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Inhalt von No. 5.

Paul de Lagarde, Exodus III. — *W. Voigt*, über den Zusammenklang zweier einfacher Töne. — *Cl. Hartlaub*, Beitrag zur Kenntniss der Comatuliden-Fauna des Indischen Archipels. — *Eduard Riecke*, über die Pyroëlectricität des Turmalins. — *Friedrich Wieseler*, Scaenica. — Preisaufgaben der K. Gesellschaft. — Preisaufgaben der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND -7 AUG 90 LIBRARY

25. Juni. **№ 6.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Juni 1890.

Riecke: Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems.

Klein legt vor:

a) Franc. Brioschi in Mailand, ausw. Mitglied der mathem. Klasse: Ueber die Reihenentwickelung der Sigmafunctionen zweier Veränderlichen.

b) Dr. Schoenfliess: Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle.

de Lagarde: Septuagintastudien. I. (Für die Abhandlungen.)

Kielhorn: Die Mandasor-Inschrift vom Mâlava Jahre 529 (= 472 n. Chr.) und Kâlidâsa's Ritusaṁhra.

Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems.

Von

Eduard Riecke.

Die Untersuchungen, welche von den Herren van't Hoff und Reicher, Roozeboom, Meyerhoffer und Stortenbeker im Laufe der letzten Jahre veröffentlicht worden sind, haben auf einem früher kaum betretenen Gebiete ein reiches Material von experimentellen Thatsachen zu Tage gefördert. Dabei haben sich die allgemeinen Sätze, welche von Willard Gibbs über Gleichgewichtszustände eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden

Systemes aufgestellt worden sind, als ein wichtiger Leitfaden für die Untersuchung und als ein werthvolles Hülfsmittel für die Darstellung der beobachteten Erscheinungen erwiesen. Mit Bezug hierauf dürften die folgenden Betrachtungen, welche, auf dem von Gibbs gelegten Fundamente ruhend, eine weitere Ausführung seiner Sätze besonders nach der geometrischen Seite enthalten, nicht ohne Interesse sein. Des leichteren Verständnisses halber mußten auch die Grundgleichungen der Gibbs'schen Theorie reproducirt werden; dabei habe ich eine Darstellung befolgt, welche von der von Gibbs selbst gegebenen in einigen Punkten abweicht.

I. Erinnerung an die Fundamentalgleichungen von Gibbs.

Wir betrachten eine Substanz, welche aus mehreren chemischen Componenten zusammengesetzt, welche aber in physikalischer wie in chemischer Hinsicht in ihrer ganzen Ausdehnung homogen ist. Wir bezeichnen durch ε die Energie, durch η die Entropie, durch v das Volumen, durch m_1, m_2, $m_3 \ldots$ die Massen der einzelnen chemischen Componenten; dann wird eine Vergrößerung der Entropie, des Volumens, der Massen m_1, $m_2 \ldots$ nach einem beliebigen Verhältniß eine Vergrößerung von ε nach demselben Verhältniß zur Folge haben, d. h. es wird ε eine homogene lineare Funktion von η, v, m_1, $m_2 \ldots$ sein, welche der Gleichung genügt

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\eta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}v + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1}m_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2}m_2 + \ldots$$

Bezeichnen wir durch μ_1, $\mu_2 \ldots$ die partiellen Differentialquotienten von ε nach m_1, $m_2 \ldots$, so ist andererseits der Zuwachs der Energie gegeben durch

1. $$d\varepsilon = Td\eta - pdv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

Die Verbindung beider Gleichungen giebt:

$$\varepsilon = T\eta - pv + \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots$$

und

2. $$0 = \eta dT - vdp + m_1 d\mu_1 + m_2 d\mu_2 + \ldots$$

Ist entsprechend Gleichung 1 die Energie gegeben als Funktion von η, v, m_1, $m_2 \ldots$, so ist:

$$T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}, \quad p = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}, \quad \mu_1 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1}, \quad \mu_2 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_2} \ldots$$

Ist in Gleichung 2 p gegeben als Funktion von T, μ_1, $\mu_2 \ldots$, so ist

$$\frac{\eta}{v} = \frac{\partial p}{\partial T}, \quad \frac{m_1}{v} = \frac{\partial p}{\partial \mu_1}, \quad \frac{m_2}{v} = \frac{\partial p}{\partial \mu_2}, \ldots$$

Gleichungen von der Form $f(\varepsilon, \eta, v, m_1, m_2 \ldots) = 0$ und von der Form $f(p, T, \mu_1, \mu_2 \ldots) = 0$ können demnach benützt werden, um die in der Gleichung selbst nicht auftretenden Zustandsgrößen, beziehungsweise ihre Verhältnisse, zu bestimmen. Gibbs nennt sie Fundamentalgleichungen.

Führen wir an Stelle der gesammten Energie die freie Energie $\varepsilon - T\eta$ ein, welche durch ψ bezeichnet werden möge, so ergiebt sich

$$d\psi = -\eta dT - pdv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

Es besitzt demnach auch eine Gleichung zwischen $\psi, T, v, m_1, m_2 \ldots$ den Charakter einer Fundamentalgleichung.

Dasselbe gilt endlich von den Gleichungen, welche man erhält, wenn man in der Gleichung 1 an Stelle von ε die Funktionen $\chi = \varepsilon + pv$ oder $\zeta = \varepsilon - T\eta + pv$ einführt, deren letztere identisch ist mit Duhem's thermodynamischem Potential bei konstantem Druck.

II. Gleichgewicht eines Systems von Körpern.

Gegeben sei ein System von Körpern, welche in verschiedener Weise aus einer bestimmten Zahl von chemischen Componenten zusammengesetzt sind und welche gleichzeitig in verschiedenen Aggregatzuständen sich befinden. Ein solches System kann demnach enthalten: einen Theil, in welchem die verschiedenen gasförmigen Körper gleichmäßig mit einander gemischt sind, verschiedene flüssige Theile, entsprechend der Existenz von flüssigen Körpern oder Lösungen, welche mit einander nicht mischbar sind, verschiedene feste Theile, entsprechend den in festem Aggregatzustand vorhandenen Körpern.

Jeden solchen physikalisch und chemisch homogenen Theil des Systems bezeichnen wir nach Gibbs als eine Phase desselben.

Gleichgewicht kann in einem System von der Art des betrachteten nur dann vorhanden sein, wenn Temperatur und Druck überall dieselben sind. Die Gesammtenergie des Systems, welche gleich der Summe der Energieen der einzelnen Phasen ist, bezeichnen wir durch ε, die Gesammtentropie, gleich der Summe der Entropieen der einzelnen Phasen, durch η, das Gesammtvolumen durch v. Bleiben die Massenverhältnisse der einzelnen Phasen ungeändert,

und wird die Energie in umkehrbarer Weise durch eine Vermehrung der Entropie und des Volumens geändert, so ist

$$\delta\varepsilon = Td\eta - pdv.$$

Allgemein haben wir die Energie ε aufzufassen als eine Funktion der Entropie η, des Volumens v und der Massen der chemischen Componenten, welche in den einzelnen Phasen vorhanden sind. Bezeichnen wir die in der ersten Phase vorhandenen Massen durch m_1', m_2', m_3', .., die in der zweiten vorhandenen durch m_1'', m_2'', m_3'' ... u. s. w., so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} D\varepsilon = Td\eta - pdv &+ \mu_1' dm_1' + \mu_2' dm_2' + \mu_3' dm_3' + .. \\ &+ \mu_1'' dm_1'' + \mu_2'' dm_2'' + \mu_3'' dm_3'' + .. \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Nach dem Princip von der Vermehrung der Entropie befindet sich unser System im neutralen Gleichgewicht, d. h. es sind alle mit den Bedingungen desselben verträglichen Variationen umkehrbar, wenn

$$D\varepsilon - Td\eta + pdv = 0.$$

Zerlegen wir die Aenderung der Energie in denjenigen Theil $\delta\varepsilon$, welcher lediglich durch eine etwa zuerst vorgenommene Aenderung von η und v, und denjenigen Theil $d\varepsilon$, welcher durch die nachfolgende Aenderung der Massen bedingt wird, so erhalten wir, wenn das System während der ganzen Aenderung im Gleichgewicht sich befand:

$$\delta\varepsilon + d\varepsilon - Td\eta + pdv = 0.$$

Wenn aber die Aenderungen von η und v für sich umkehrbar sind, so ist $\delta\varepsilon - Td\eta + pdv = 0$. Es ergiebt sich daher als Bedingung für das neutrale Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} d\varepsilon = &\mu_1' dm_1' + \mu_2' dm_2' + \mu_3' dm_3' + \ldots \\ &+ \mu_1'' dm_1'' + \mu_2'' dm_2'' + \mu_3'' dm_3'' + \ldots \\ &+ . \quad . \quad . \quad . \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so verläuft der natürliche Proceß stets so, daß

$$D\varepsilon - Td\eta + pdv < 0$$

oder $$\Sigma\mu' dm' + \Sigma\mu'' dm'' + \Sigma\mu''' dm''' + .. < 0.$$

Hier beziehen sich die Summen auf die einzelnen Phasen, welche in dem System vorhanden sind; für jede Phase ist die Summe zu erstrecken über alle in derselben vertretenen chemischen

Componenten. Die Faktoren μ, mit welchen die Zuwüchse der einzelnen Massen multiplicirt erscheinen, sind nichts anderes als die partiellen Differentialquotienten der Energie nach jenen Massen. Gibbs bezeichnet dieselben als die Potentiale der chemischen Componenten.

III. Die geometrische Repräsentation der coëxistirenden Phasen.

Die Zahl der nebeneinander in dem gegebenen Systeme vorhandenen Phasen sei i, die Zahl der chemischen Componenten k. Das System ist im Gleichgewicht, wenn

$$\Sigma\mu' dm' + \Sigma\mu'' dm'' + \Sigma\mu''' dm''' + \ldots = 0,$$

während gleichzeitig die Zuwüchse dm den Bedingungen unterworfen sind

$$\Sigma dm_1 = 0,\ \Sigma dm_2 = 0,\ \Sigma dm_3 = 0 \ldots$$

Es muß daher, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ konstante Faktoren bedeuten,

$$\Sigma(\mu_1 - \lambda_1) dm_1 + \Sigma(\mu_2 - \lambda_2) dm_2 + \Sigma(\mu_3 - \lambda_3) dm_3 + \ldots = 0$$

sein. Somit besitzen im Gleichgewichtszustand die Potentiale der einzelnen chemischen Componenten in allen Phasen des Systems je einen bestimmten konstanten Werth; ist Gleichgewicht vorhanden, so sind die Bedingungen erfüllt

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \mu_1'' = \mu_1''' = \ldots = \mu_1^i \\
\mu_2' &= \mu_2'' = \mu_2''' = \ldots = \mu_2^i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_k^1 &= \mu_k'' = \mu_k''' = \ldots = \mu_k^i
\end{aligned}$$

Ein System von $ik - k$ Gleichungen.

Für jede einzelne Phase muß außerdem eine Zustandsgleichung existiren, welche man in verschiedenen Formen aufstellen kann. Der gewöhnlichen Darstellung wird es entsprechen, wenn wir den Druck ausdrücken durch eine Funktion von

$$T, \frac{m_1}{v}, \frac{m_2}{v}, \frac{m_3}{v}, \ldots$$

Wir erhalten dann die weiteren i Gleichungen

$$\begin{aligned}
p &= f'\Big(T, \frac{m_1'}{v'}, \frac{m_2'}{v'}, \ldots\Big) = f''\Big(T, \frac{m_1''}{v''}, \frac{m_2''}{v''}, \ldots\Big) \\
&= f^i\Big(T, \frac{m_1^i}{v^i}, \frac{m_2^i}{v^i}, \ldots\Big)
\end{aligned}$$

Als Unbekannte sind zu betrachten

$$p,\ T,\ \frac{m_1'}{v'},\ \frac{m_2'}{v'},\ \ldots\ \frac{m_1''}{v''},\ \frac{m_2''}{v''},\ \ldots\ \frac{m_1^i}{v^i},\ \frac{m_2^i}{v^i},\ \ldots;$$

ihre Zahl ist $ik+2$. Die Bedingungen des Gleichgewichtes werden durch ein bestimmtes Werthsystem der Veränderlichen befriedigt werden, wenn die Zahl dieser letzteren gleich ist der Zahl der Gleichungen, d. h. wenn

$$ik - k + i = ik + 2$$

oder

$$i = k + 2.$$

Ist die Zahl der chemischen Componenten gleich k, so existirt ein bestimmtes System von zusammengehörigen Werthen des Druckes, der Temperatur, der Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$, bei welchem $k+2$ verschiedene Phasen im Gleichgewicht sich befinden.

Coëxistenz einer größeren Phasenzahl ist nicht möglich, da sonst die Zahl der Gleichungen die der Unbekannten übertreffen würde. Ist die Zahl der coëxistirenden Phasen kleiner als $k+2$, so bleibt eine entsprechende Zahl von Variabeln unbestimmt.

Zu demselben Resultate gelangt man in einfacherer Weise, wenn man, wie dies im Folgenden in der Regel geschehen wird, den Druck darstellt durch eine Funktion von T, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ und wenn man dementsprechend die Größen p, T, $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_1'', \mu_2'', \ldots \mu_1^i, \mu_2^i, \ldots$ als unabhängige Veränderliche behandelt. Beachtet man nun, daß $\mu_1' = \mu_1'' = \ldots \mu_1^i$, $\mu_2' = \mu_2'' = \ldots = \mu_2^i$, $\ldots \mu_k' = \mu_k'' = \ldots = \mu_k^i$, so reducirt sich die Zahl der Unbekannten auf $k+2$, nämlich p, T, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$. Zu ihrer Bestimmung sind $k+2$ Gleichungen erforderlich; im Falle der Coëxistenz von $k+2$ Phasen sind diese gegeben durch die $k+2$ Zustandsgleichungen. Im Falle eines Gleichgewichtes zwischen $k+1$ Phasen bleibt eine Variable, im Falle des Gleichgewichtes zwischen k Phasen bleiben zwei Variable willkürlich.

Wir nehmen an, es seien diejenigen Werthe des Druckes, der Temperatur, der Potentiale μ oder der Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$ berechnet, bei welchen $k+2$ bestimmte Phasen unseres Systems coëxistiren können. Benützen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit den Axen p, T, so werden wir durch die gefundenen Werthe von p und T einen Punkt in der Coordinatenebene bestimmen können, welcher als ein

Bild für den Zustand des Systems während der Coëxistenz jener $k+2$ Phasen betrachtet werden kann. Derselbe wird im Folgenden durch A bezeichnet. Nehmen wir aus der ganzen Zahl der Phasen eine, etwa die Phase 1, weg, so sind die Bedingungen für die Coëxistenz der übrig bleibenden Phasen

$$\begin{aligned}
\mu_1'' &= \mu_1''' = \ldots = \mu_1^{k+2} \\
\mu_2'' &= \mu_2''' = \ldots = \mu_2^{k+2} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mu_k'' &= \mu_k''' = \ldots = \mu_k^{k+2}
\end{aligned}$$

Hiezu kommen noch die Zustandsgleichungen der Phasen

$$\begin{aligned}
p = f''(T, \mu_1'', \mu_2'' \ldots \mu_k'') &= f'''(T, \mu_1''', \mu_2''' \ldots \mu_k''') \\
= \ldots\ldots &= f^{k+2}(T, \mu_1^{k+2}, \mu_2^{k+2} \ldots \mu_k^{k+2})
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die gemeinsamen Werthe, welche die Potentiale der verschiedenen chemischen Componenten in den einzelnen Phasen besitzen durch $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_k'$, so reducirt sich die Zahl der Unbekannten wie früher auf $k+2$, die Zahl der Zustandsgleichungen beträgt $k+1$, sie ist um 1 kleiner als die Zahl der Variabeln. Eliminiren wir aus den Gleichungen die k Variabeln μ, so bleibt eine Gleichung zwischen p und T übrig, welche in der Coordinatenebene durch eine Curve dargestellt wird.

In jedem Punkte dieser Curve können die betrachteten $k+1$ Phasen nebeneinander im Gleichgewichte bestehen, in jedem Punkte sind aber außer den Werthen von Temperatur und Druck auch die Potentiale $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k$, beziehungsweise die Dichtigkeiten $\frac{m}{v}$ der Componenten bestimmt.

Lassen wir aus der Zahl der in dem Punkte A coëxistirenden $k+2$ Phasen der Reihe nach je eine weg, so erhalten wir $k+2$ Curven in der Coordinatenebene, welche sich in dem Punkte A durchschneiden müssen. Greift man nämlich aus der ganzen Zahl der Curven zwei beliebige heraus, so sind in ihrem Schnittpunkt alle Bedingungen erfüllt, durch welche wir früher den Punkt A bestimmt haben; der Punkt A ist also der Schnittpunkt von je zwei jener Curven, d. h. der gemeinsame Schnittpunkt aller.

Wir bezeichnen im Folgenden die von dem Punkte A auslaufenden $k+2$ Curven durch $c', c'', c''' \ldots c^{k+2}$ und zwar verstehen wir unter einem beliebigen c^h diejenige Curve, längs welcher die Phase h fehlt. In dem Punkte A sind die Dichten der Componenten in den einzelnen

Phasen, die Werthe von $\frac{m_1'}{v'}$, $\frac{m_2'}{v'}$ .. $\frac{m_1''}{v''}$, $\frac{m_2''}{v''}$, ... ferner die Dichten der Entropie in den einzelnen Phasen, die Werthe von $\frac{\eta'}{v'}$, $\frac{\eta''}{v''}$, .. gegeben. Schreiten wir von dem Punkte A aus auf der Curve c' fort um die Strecke dp', dT', so gilt für die Veränderung jeder einzelnen Phase die Gleichung 2. Wir erhalten also für die Phasen 2 bis $k+2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&-dp' + \frac{\eta''}{v''}dT' + \frac{m_1''}{v''}d\mu_1' + \frac{m_2''}{v''}d\mu_2' + .. + \frac{m_k''}{v''}d\mu_k' = 0\\
&-dp' + \frac{\eta'''}{v'''}dT' + \frac{m_1'''}{v'''}d\mu_1' + \frac{m_2'''}{v'''}d\mu_2' + .. + \frac{m_k'''}{v'''}d\mu_k' = 0\\
&\quad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\\
&-dp' + \frac{\eta^{k+2}}{v^{k+2}}dT' + \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}}d\mu_1' + \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}}d\mu_2' + .. + \frac{m_k^{k+2}}{v^{k+2}}d\mu_k' = 0
\end{aligned}$$

Da die $k+1$ Phasen 2 bis $k+2$ längs c' miteinander im Gleichgewichte sind, so hat jede einzelne chemische Componente in allen Phasen dasselbe Potential; es hat somit auch $d\mu_1'$ in all den vorhergehenden Gleichungen denselben Werth; ebenso $d\mu_2'$, $d\mu_3'$ .. $d\mu_k'$. Durch Elimination dieser Differentiale ergiebt sich die Gleichung:

$$3.\qquad \left(\frac{dp}{dT}\right)' \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdots & \frac{m_k''}{v''} \\ 1 & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots & \frac{m_k'''}{v'''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}} & \cdots & \frac{m_k^{k+2}}{v^{k+2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdots & \frac{m_k''}{v''} \\ \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots & \frac{m_k'''}{v'''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\eta^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}} & \cdots & \frac{m^{k+2}}{v^{k+2}} \end{vmatrix}$$

Diese schon von Gibbs aufgestellte Gleichung bestimmt in unserem Falle die Tangente des Winkels, welchen die Curve c' in ihrem Ausgangspunkte A mit der Axe T einschließt; sie giebt allgemein die Neigung der Curve in einem beliebigen ihrer Punkte, wenn man in derselben an Stelle von $\frac{\eta}{v}$ und $\frac{m}{v}$ die jenem Punkte entsprechenden Werthe setzt.

Zwischen den Richtungstangenten $\left(\frac{dp}{dT}\right)'$, $\left(\frac{dp}{dT}\right)''$, $\left(\frac{dp}{dT}\right)'''$ .... $\left(\frac{dp}{dT}\right)^{k+2}$, welche die $k+2$ Curven c', c'', c''' ... c^{k+2} in ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte A besitzen,

bestehen $k+2$ Gleichungen, welche in symbolischer Form folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dT}{dp}\ \frac{\eta}{v}\ \frac{m_1}{v}\ \frac{m_2}{v}\ \ldots\ \frac{m_k}{v}\right) = 0\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{\eta}\ \frac{m_1}{\eta}\ \frac{m_2}{\eta}\ \ldots\ \frac{m_k}{\eta}\right) = 0\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{m_1}\ 1\ \frac{m_2}{m_1}\ \ldots\ \frac{m_k}{m_1}\right) = 0\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{m_2}\ \frac{m_1}{m_2}\ 1\ \ldots\ \frac{m_k}{m_2}\right) = 0\\
&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\left(\frac{dp}{dT}\ \frac{v}{m_k}\ \frac{m_1}{m_k}\ \frac{m_2}{m_k}\ \ldots\ 1\right) = 0
\end{aligned} \qquad 4.$$

Hier sind die Klammern gesetzt an Stelle von $k+2$ gliedrigen Determinanten, welche aus den in den Klammern stehenden Ausdrücken in folgender Weise zu entwickeln sind. Man ertheilt beispielsweise in der ersten Klammer dem Differentialquotienten $\frac{dT}{dp}$ den der Curve c' entsprechenden Werth; gleichzeitig setzt man für $\frac{\eta}{v}$, $\frac{m_1}{v}$, $\frac{m_2}{v}$, $\ldots\frac{m_k}{v}$ diejenigen Werthe, welche diese Ausdrücke in dem Punkte A für die erste Phase besitzen. Die Reihe

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)'\ \frac{\eta'}{v'},\ \frac{m_1'}{v'},\ \frac{m_2'}{v'}\ \ldots\ \frac{m_k'}{v'}$$

repräsentirt dann die erste Horizontalreihe der entsprechenden Determinante; in derselben Weise ergeben sich die folgenden Reihen und demzufolge erhält man:

$$\left(\frac{dT}{dp}\ \frac{\eta}{v}\ \frac{m_1}{v}\ \frac{m_2}{v}\ \ldots\ \frac{m_k}{v}\right) =$$

$$\begin{vmatrix}
\left(\frac{dT}{dp}\right)' & \frac{\eta'}{v'} & \frac{m_1'}{v'} & \frac{m_2'}{v'} & \ldots & \frac{m_k'}{v'}\\
\left(\frac{dT}{dp}\right)'' & \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \ldots & \frac{m_k''}{v''}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\
\left(\frac{dT}{dp}\right)^{k+2} & \frac{\eta^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_1^{k+2}}{v^{k+2}} & \frac{m_2^{k+2}}{v^{k+2}} & \ldots & \frac{m_k^{k+2}}{v^{k+2}}
\end{vmatrix} = 0.$$

In derselben Weise ergeben sich die übrigen Determinanten.

Aus dem ganzen Büschel der von A auslaufenden Curven greifen wir wiederum die Curve c' heraus. In jedem Punkt derselben haben nicht nur p und T, sondern auch die Potentiale μ_1', μ_2', μ_3', ... μ_k' bestimmte Werthe. Tragen wir in jedem Punkt der Curve c' den zugehörigen Werth von μ_1' senkrecht zu der Ebene p, T auf, so erhalten wir eine Raumcurve, deren einzelne Punkte die zusammengehörigen Werthe von p, T und μ_1' repräsentiren. Eine ebensolche Curve repräsentirt die zusammengehörigen Werthe von p, T, μ_2', von p, T, μ_3' u. s. w.; wir erhalten also über der Curve c' ein System von k Raumcurven entsprechend den k verschiedenen chemischen Componenten.

Gehen wir auf der ersten dieser Curven von einem beliebigen Punkte aus um die Strecken dp', dT', $d\mu_1'$ weiter, so finden die Beziehungen statt

$$dp' : dT' : d\mu_1'$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdots \\ \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdots \\ 1 & \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & 1 & \frac{m_2''}{v''} & \cdots \\ \frac{\eta'''}{v'''} & 1 & \frac{m_2'''}{v'''} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

Die durch die zusammengehörigen Werthe von p', T', μ_1' bestimmte Raumcurve, auf welche sich die vorhergehenden Formeln beziehen, möge im Folgenden durch A' bezeichnet werden.

Nehmen wir aus der Zahl der $k+1$ Phasen, welche längs der Curve c' im Gleichgewichte mit einander sich befinden, eine weitere hinweg, so bleiben zwischen unseren $k+2$ Variabeln p, T, $\mu_1 \ldots \mu_k$ noch k Gleichungen bestehen; aus diesen werden die Potentiale μ zu berechnen sein als Funktionen von p und T, während diese letzteren Variabeln unbestimmt bleiben. Richten wir unsere Aufmerksamkeit insbesondere auf denjenigen Ausdruck, durch welchen μ_1 gegeben wird als Funktion von p und T, so wird derselbe in einem rechtwinkligen Coordinatensystem mit den Axen p, T und μ_1 dargestellt werden durch eine Fläche. Lassen wir aus der Zahl der Phasen, welche in c' coëxistiren, der Reihe nach die Phasen $2, 3 \ldots k+2$ weg, so erhalten wir $k+1$ verschiedene Systeme von Gleichungen; jedem derselben entspricht eine besondere Beziehung zwischen p, T und μ_1, jedem derselben eine besondere durch

jene Beziehung dargestellte Oberfläche. Wir bezeichnen diese Flächen der Reihe nach durch $f^{1,2}$, $f^{1,3}$, .. $f^{1,k+2}$ die ihnen angehörenden Werthe der Variabeln durch p^{12}, T^{12}, μ_1^{12}; p^{13}, T^{13}, μ_1^{13}; .... In der Schnittlinie von irgend zweien dieser Flächen sind alle diejenigen Gleichungen erfüllt, durch welche wir die Curve A' bestimmt haben. Die Curve A' ist somit die Schnittlinie jener Flächen und ebenso der übrigen durch die zusammengehörigen Werthe von p, T, μ_i gegebenen. Die Curve A' bildet somit die gemeinsame Schnittlinie der $k+1$ Flächen f^{12}, f^{13} ... $f^{1,k+2}$, längs welcher je k Phasen im Gleichgewichte sich befinden, aus deren Zahl die Phase 1 ein für allemal ausgeschlossen ist.

Ebenso, wie wir der Curve c' eine Raumkurve A' zugeordnet haben, können wir der Curve c'' eine Raumkurve A'' zuordnen. Wir erhalten, indem wir dies für alle Curven c ausführen, ein System von $k+2$ Raumkurven, welche sich alle in einem und demselben senkrecht über A gelegenen Punkte durchschneiden müssen. Jede dieser Curven bildet ihrerseits wieder die Axe für $k+1$ fächerförmig von derselben ausstrahlende Flächen, längs welcher je k Phasen mit einander im Gleichgewichte sich befinden. Die Zahl dieser Flächen ist demnach $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ und jede derselben geht durch zwei von den Curven A hindurch.

Kehren wir zurück zu der Fläche f^{12}, so ergiebt sich aus der Anwendung der Gleichung 2 auf die in derselben coëxistirenden Phasen die folgende Beziehung zwischen den Coordinatenunterschieden zweier auf der Fläche benachbarter Punkte:

5)
$$dp^{12}\begin{vmatrix} 1 & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & .. \\ 1 & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & . & ... \\ 1 & . & . & ... \end{vmatrix} =$$

$$dT^{12}\begin{vmatrix} \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & .. \\ \frac{\eta^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & . & ... \\ \frac{\eta^{V}}{v^{V}} & . & . & ... \end{vmatrix} + d\mu^{12}\begin{vmatrix} \frac{m_1'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & .. \\ \frac{m_1^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & . & ... \\ \frac{m_1^{V}}{v^{V}} & . & . & ... \end{vmatrix}$$

Liegt das die beiden Punkte verbindende Linienelement in einer zu der Ebene p, T parallelen Ebene, so ist $d\mu^{12} = 0$ und wir erhalten:

$$6) \qquad \delta p^{12} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\cdot \\ 1 & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & \cdot & \cdot\cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = \delta T^{12} \begin{vmatrix} \frac{\eta'''}{v'''} & \frac{m_2'''}{v'''} & \frac{m_3'''}{v'''} & \cdot\cdot \\ \frac{\eta^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m_2^{IV}}{v^{IV}} & \cdot & \cdot\cdot \\ \frac{\eta^{V}}{v^{V}} & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Auf der Curve A', längs welcher die $k+1$ Phasen $2, 3 \ldots k+2$ im Gleichgewichte sich befinden, nehmen wir einen beliebigen Punkt B, welchem der Potentialwerth μ_1' angehören möge. Ohne dass der Zustand des Systems aus dem Punkte B sich entfernt, können wir nun eine der Phasen etwa 2 zum Verschwinden bringen. Ist dies erreicht, so wird bei einer nunmehr eintretenden Aenderung von Temperatur und Druck der Zustand des Systems längs der Fläche f^{12} sich fortbewegen. Wir setzen voraus, daß jene Aenderungen so vorgenommen werden, daß dabei das Potential μ_1' seinen Werth nicht ändert, dann bewegt sich der Zustand des Systems auf der Linie, in welcher die Fläche f^{12} von der Ebene $\mu_1' = \text{Const.}$ durchschnitten wird. Die Neigung, welche diese Linie in dem Punkt B gegen die Axen p und T besitzt, wird bestimmt durch die Gleichung, welche wir im Vorhergehenden zwischen δp^{12} und δT^{12} aufgestellt haben. Wir können nun in derselben Weise die Phase 3 zum Verschwinden bringen; ändern wir dann wiederum bei konstant erhaltenem Werthe μ_1' die Werthe von p und T, so bewegt sich der Zustand des Systems auf der Curve, in welcher die Fläche f^{12} von der Ebene $\mu_1' = \text{Const.}$ geschnitten wird. In dem Punkte B wird die Neigung der Curve gegen die Axen p und T bestimmt durch die Gleichung:

$$6') \qquad \delta p^{12} \begin{vmatrix} 1 & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdot\cdot \\ 1 & \frac{m^{IV}}{v^{IV}} & \cdot & \cdot\cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = \delta T^{12} \begin{vmatrix} \frac{\eta''}{v''} & \frac{m_1''}{v''} & \frac{m_2''}{v''} & \cdot\cdot \\ \frac{\eta^{IV}}{v^{IV}} & \frac{m^{IV}}{v^{IV}} & \cdot & \cdot\cdot \\ \frac{\eta^{V}}{v^{V}} & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Wenn wir in derselben Weise weitergehen, so erhalten wir in der durch den Punkt B hindurchgelegten Ebene $\mu_1' = \text{Const.}$ ein System von $k+1$ Curven, welche durch gewisse Gleichungen zwischen den Veränderlichen p und T bestimmt sein werden. Auf

der Curve d^{12} findet Gleichgewicht statt zwischen den Phasen 3, 4 ... $k+2$, auf der Curve d^{13} Gleichgewicht zwischen 2, 4 ... $k+2$ u. s. w. immer unter der Voraussetzung, daß die Veränderungen von p und T so gewählt werden, daß dabei μ_1' konstant bleibt. Die Neigungen der Curven gegen die Axen p und T werden in ihrem Ausgangspunkte B bestimmt durch Gleichungen von der Art der im Vorhergehenden gegebenen; die in denselben auftretenden Determinanten sind ganz ebenso gebaut, wie die in den Gleichungen 3 und 4 vorkommenden. Daraus ergiebt sich, dass zwischen den $k+1$ Richtungstangenten der Curven d^{12}, d^{13} ... $d^{1,k+2}$ $k+1$ Gleichungen bestehen, welche den Gleichungen 4 vollkommen analog sind.

Wir kommen auf diesem Wege zu dem folgenden geometrischen Bild für den Zusammenhang unseres Phasensystemes. Den Ausgangspunkt bildet der Punkt A, in welchem die Maximalzahl von $k+2$ Phasen im Gleichgewichte sich befindet. Wir ziehen von diesem Punkte aus die $k+2$ Curven c, längs welcher je $k+1$ Phasen im Gleichgewichte sind. Indem wir nun als weitere Variable das Potential einer beliebigen unter unseren chemischen Componenten einführen, etwa μ_1, konstruiren wir über dem System der Curven c das System der Raumkurven A. Wir verbinden diese durch die $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ Flächen, längs welcher je k von unseren Phasen mit einander im Gleichgewicht sind.

Nehmen wir nun auf einer der Raumkurven A etwa A', längs welcher die Phase 1 fehlt, einen Punkt B, legen wir durch diesen eine Ebene parallel zu der Coordinatenebene pT, so erhalten wir $k+1$ Schnittkurven d^1 mit den durch A' hindurchgehenden Flächen. Auf diesen Curven sind je k Phasen mit einander im Gleichgewicht; die Phase 1 fehlt auf allen und alle Veränderungen des Systems sind der Bedingung unterworfen, daß das Potential der ersten chemischen Componente denselben Werth behält.

In dem Curvensystem d^1 finden sich die Eigenschaften des Systemes c hinsichtlich der Neigungen, welche die einzelnen Curven in ihrem Ausgangspunkte gegen die Axen p und T besitzen vollständig reproducirt. Man kann an das Curvensystem d^1 ganz dieselben Betrachtungen anknüpfen wie an das System c und gelangt so zu dem Satze:

Ein System von $k+1$ Phasen, in welchem das Potential einer chemischen Componente konstant erhalten wird, verhält sich ge-

rade so, wie ein System von $k+2$ Phasen bei unbeschränkter Veränderlichkeit der Potentiale.

Die Fortsetzung derselben Betrachtungen führt zu dem allgemeinen Satze:

Ein System von i Phasen, in welchem die Potentiale von $k+2-i$ chemischen Komponenten festgehalten werden, besitzt dieselben Eigenschaften, wie ein System von $k+2$ Phasen bei unbeschränkter Veränderlichkeit der Potentiale. Die Maximalzahl der coëxistirenden Phasen bleibt dabei immer um 2 größer als die Zahl der chemischen Componenten mit veränderlichem Potential.

Man sieht, daß durch die vorhergehenden Sätze ein Schema gegeben wird, in welches alle möglichen Zustände eines aus k chemischen Componenten zusammengesetzten Systemes eingeordnet werden können.

Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen.

(Aus einem Briefe an Herrn Prof. Wiltheiss in Halle[1]).)

Von

Fr. Brioschi in Mailand.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Nachstehend wünsche ich, Ihnen eine Transformation der Differentialgleichung für die geraden Funktionen $\sigma(u_1, u_2)$ mitzutheilen, welche, wie mir scheint, das Problem der Reihenentwicklung vollständig löst.

Wie Sie wissen, wenn man mit a_i eine Wurzel der Gleichung $f = 0$ bezeichnet und

$$P_0 = \sum_i \frac{d}{da_i}, \quad P_1 = \sum_i a_i \frac{d}{da_i}, \quad P_2 = \sum_i a_i^2 \frac{d}{da_i}$$

setzt, so hat man bei der Bezeichnung eines Gliedes der Reihenentwicklung mit N die Beziehungen

---

1) Die Resultate des Herrn Wiltheiss, auf welche Herr Brioschi im Texte Bezug nimmt, sind in dessen Abhandlung: „Ueber eine Covarianten bildende Operation, Theil II“ enthalten und in Bd. 36, Heft 1 der mathematischen Annalen bereits veröffentlicht. Kl.

$$P_0(N) = -u_2\frac{dN}{du_1}, \quad P_1(N) = u_2\frac{dN}{du_2} + mN,$$

$$P_2(N) = u_1\frac{dN}{du_2} + \tfrac{1}{2}mS_1N,$$

wo die gerade Zahl m die Ordnung von N bedeutet und $S_1 = \sum_i a_i$ ist.

Es sei nun $f = \varphi.\psi$ und a_r eine der Wurzeln von $\varphi = 0$, a_s eine der Wurzeln von $\psi = 0$. Ich bezeichne mit G_0, G_1, G_2 die drei Operationssymbole

$$G_0(N) = \sum_r \frac{dN}{da_r} - \sum_s \frac{dN}{da_s},$$

$$G_1(N) = \sum_r a_r\frac{dN}{da_r} - \sum_s a_s\frac{dN}{da_s},$$

$$G_2(N) = \sum_r a_r^2\frac{dN}{da_r} - \tfrac{1}{2}ms_1N - \left[\sum_s a_s^2\frac{dN}{da_s} - \tfrac{1}{2}m\sigma_1N\right],$$

wo

$$s_1 = \sum_r a_r, \quad \sigma_1 = \sum_s a_s,$$

setze

$$(\varphi\psi) = \vartheta, \quad (\varphi\psi)_2 = J,$$

und verstehe unter D das Operationszeichen

$$D = 6[\vartheta_{22}G_0 + 2\vartheta_{12}G_1 + \vartheta_{11}G_2] + J[u_1^2G_0 - 2u_1u_2G_1 + u_2^2G_2],$$

wo

$$\vartheta_{11} = \frac{1}{3.4}\frac{d^2\vartheta}{du_1^2}, \ldots .$$

Sei nun

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + \frac{S_1}{2!} + \frac{S_2}{4!} + \frac{S_3}{6!}, \ldots,$$

so besteht zwischen den drei Funktionen S_n, S_{n-1}, S_{n-2} die Relation

$$(1) \quad S_n = D(S_{n-1}) + (4n-3)S_1S_{n-1} - 24(n-1)(2n-3)kS_{n-2},$$

(wo $k = \frac{1}{2}(ff)_4$); eine Relation, die ganz analog ist derjenigen für die elliptischen σ-Functionen. Man kann leicht zeigen, daß, wenn M eine simultane Invariante ρten Grades von φ und ψ ist, $D(M)$ eine simultane Covariante zweiter Ordnung und $(\rho+2)$ten Grades wird und daß, wenn M eine simultane Covariante vom ρten Grade und $m$ter Ordnung ist, $D(M)$ eine simultane Covariante $(\rho+2)$ten Grades und $(m+2)$ter Ordnung wird. Und da nun

$$S_1 = \tfrac{2}{5}(\varphi\psi)_2$$

eine simultane Covariante zweiten Grades und zweiter Ordnung ist, so wird S_n eine solche vom $2n$ten Grade und $2n$ter Ordnung sein.

Die Operation D beschränkt die Anzahl der simultanen Invarianten und Covarianten, welche die Glieder der Reihenentwicklung, $S_1, S_2, \ldots$ bilden. Sie theilen mir in Ihrem Briefe mit, daß Sie auf anderm Wege zu demselbem Resultate gelangt seien. Aber es scheint mir, daß die Operation D diesen wichtigen Punkt besser präcisirt.

Angenommen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2 &= a, \quad (\varphi\psi)_2 = b, \quad \tfrac{1}{2}(\psi\psi)_2 = c, \\ (ca) &= \beta, \quad (ca)_2 = \gamma, \quad (b\beta)_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda\mu) = \varkappa, \\ (\psi a)_2 &= -(\varphi b)_2 = \lambda, \quad (\varphi c)_2 = -(\psi b)_2 = \mu, \end{aligned}$$

so bestehen die Glieder $S_1, S_2 \ldots$ aus

drei simultanen Invarianten: J, γ, $\varkappa$,
drei simultanen Covarianten: b, β, $\lambda\mu$ von der zweiten Ordnung,
zwei simultanen Covarianten: d, ac von der vierten Ordnung,
einer simultanen Covariante: $\varphi\psi$ von der sechsten Ordnung,

d. h. aus neun simultanen Formen. Man hat in der That

$$\begin{aligned} D(b) &= 2(J\vartheta + 24ac - 6b^3), \\ D(J) &= -6(Jb + 6\beta), \\ D(\vartheta) &= 4J\varphi\psi - 18b\vartheta, \\ D(ac) &= 12\beta\vartheta, \\ D(\varphi\psi) &= -18\vartheta^2, \\ D(\beta) &= 2(Jac + 6\gamma\vartheta - 3b\beta), \\ D(\gamma) &= -8J\beta + 12\lambda\mu, \\ D(\lambda\mu) &= 8(3\varkappa - J\gamma)\vartheta + 4Jb\beta + 36(\beta^2 - \gamma b^2) + 12(12\gamma - J^2)ac, \\ D(k) &= -6\varkappa b + 36\gamma\beta - 2J\lambda\mu, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke zeigen, daß der Kreis der Formen, die durch die Operation D entstehen, ein geschlossener ist. Man hat überdies

$$10\varkappa = -J\vartheta + 6ac + \tfrac{4}{3}b^3,$$

und demnach muß man zu Folge der Relation (1) dasselbe von S_n sagen.

Mailand, den 6. April 1890.

Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle.

Von

A. Schoenflies [1]).

(Vorgelegt von F. Klein.)

1. Die folgende Mittheilung ist bestimmt, für diejenigen geometrischen Fragen, welche das Verhältniß der Structurtheorieen zu einander betreffen, eine übersichtliche Darstellung zu geben, zu dem Zweck, eine abschließende Beurtheilung derselben zu ermöglichen. In der Auffassung der einschlägigen Verhältnisse hat es bislang an der erwünschten Uebereinstimmung sehr gefehlt. Es dürfte genügen, wenn ich hierfür auf die vor kurzem erschienene Arbeit des Herrn Blasius verweise [2]), in welcher Herr Blasius sich ebenfalls die Aufgabe stellt, die bisher bekannten Structurtheorieen nach geometrisch-krystallographischen Gesichtspunkten mit einander zu vergleichen. Wenn das Ergebniß dieses Vergleichs weder als überzeugend noch als abschließend bezeichnet werden kann, so liegt dies daran, daß einerseits gewisse gruppentheoretische Thatsachen, die auf diesem Gebiet an erster Stelle figuriren sollten, nicht berücksichtigt werden und daß andrerseits, wie dies übrigens bisher stets üblich gewesen ist, bei der Prüfung der Symmetrieverhältnisse ausschließlich mit Punktsystemen operirt wird. Zur Vermeidung von Irrthümern scheint es jedoch zweckmäßig, für die geometrischen Untersuchungen die Molekeln selbst in's Auge zu fassen; wenigstens ist es diesem Umstande zu danken, wenn es mir, wie ich hoffe, gelungen ist, zu einem endgiltigen Resultat zu kommen.

2. Drei verschiedene Theorieen kommen in Frage, nämlich 1) die Theorie von Bravais und Wulff, 2) die Theorie von Wiener und Sohncke, und 3) diejenige, welche ich selbst in diesen Nachrichten kürzlich dargestellt habe [3]). Ich bemerke, daß die Nothwendigkeit, die Theorie so weiterzubilden, wie es dort geschehen ist, mir gegenüber zuerst von Herrn Klein betont worden ist. Auf die a. a. O. benutzten Punktsysteme war übrigens

1) Die ausführliche Darstellung wird binnen Kurzem erscheinen.

2) Ueber die Beziehungen zwischen den Theorieen der Krystallstructur etc. Ber. d. Münch. Akad. 1889. Bd. 19. S. 47.

3) Jahrg. 1889. S. 483.

schon vorher von Herrn P. Curie[1]), und wie ich erst kürzlich erfahren habe, auch von Herrn Fedoroff[2]) hingewiesen worden.

Vom geometrischen Gesichtspunkt aus handelt es sich bei jeder Theorie in erster Linie um die Erklärung der Krystallsymmetrie aus der Natur und der Anordnung der Krystallmolekeln. In dieser Hinsicht ist zu verlangen, daß jede Theorie — soll sie anders als zulässig zu betrachten sein — für alle bekannten, resp. theoretisch möglichen Krystallgestalten Molekelhaufen von unbegrenzter Ausdehnung zu construiren vermag, welche genau dieselbe Symmetrie[3]) aufweisen, wie der bezügliche Krystall selbst[4]). Nun zerfallen bekanntlich die Krystalle rücksichtlich ihrer Symmetrie in 32 von einander verschiedene Klassen, welche den 32 Gruppen von Symmetrieen um einen Punkt entsprechen[5]). Danach ist evident, daß eine Structurtheorie der eben gestellten Forderung immer und nur dann genügt, wenn sie für jede dieser 32 Klassen Molekelhaufen[6]) von analogem Symmetriecharacter enthält.

Diese Bedingung ist für jede der genannten drei Theorieen ausnahmslos erfüllt.

3. Die Fragen, welche an dieser Stelle beantwortet werden sollen, präcisire ich nun folgendermaßen:

In welchen mathematischen Thatsachen ist es begründet, daß — auf Grund der Hypothese über den regelmäßigen Aufbau der Krystallmasse — verschiedene Theorieen neben einander existiren können, die in dem eben genannten Sinne gleichwerthig sind; und zweitens, wie viel Theorieen dieser Art sind überhaupt möglich.

Die Antwort, die hierauf zu ertheilen ist, beruht auf einigen wenigen gruppentheoretischen Ueberlegungen.

Die regelmässigen Molekelhaufen, in welche sich die Krystallmasse auflösen läßt, entstehen bekanntlich in jedem Fall dadurch,

---

1) On n'a pas encore étudié d'une façon complète la symétrie d'une matière cristallisée etc. Bull. de la soc. min. de France. Bd. 7. S. 453 (1884).

2) Vgl. die russisch geschriebenen „Elemente der Lehre von den Figuren". Petersburg 1885. S. 239 und 240.

3) Das Wort „Symmetrie" ist hier, wie im Folgenden immer im krystallographischen Sinn gebraucht.

4) Dieser Standpunkt deckt sich allerdings nicht mit demjenigen des Herrn Blasius. Hierauf gehe ich in der ausführlichen Darstellung genauer ein.

5) Diese 32 Gruppen werde ich, da sie gruppentheoretisch zuerst von Herrn Minnigerode abgeleitet sind, im Folgenden stets als die Minnigerodeschen Gruppen bezeichnen.

6) Es sind immer Molekelhaufen von unbegrenzter Ausdehnung gemeint.

daß eine beliebige Molekel $\mathfrak{M}$ den sämmtlichen Operationen einer Gruppe von Raumtransformationen — sie heisse Γ — unterworfen wird. In jeden Fundamentalbereich der zugehörigen Raumtheilung fällt eine Molekel. Ist die Gruppe eine Bewegungsgruppe, so sind alle Molekeln in Form und Qualität einander congruent; im allgemeinen Fall dagegen ist der Molekelhaufen offenbar zur Hälfte aus congruenten Molekeln aufgebaut, zur Hälfte aus solchen, welche der Ausgangsmolekel spiegelbildlich gleich sind.

Jede Gruppe Γ von Raumtransformationen ist, wie ich bewiesen habe, einer der 32 Minnigerodeschen Gruppen G isomorph[1]). Dies findet so statt, daß jeder Operation von G unendlich viele analoge Operationen von Γ entsprechen; beispielsweise finden sich zu jeder n-zähligen Symmetrieaxe von G unendlich viele ihr parallele n-zählige Drehungsaxen resp. Schraubenaxen von Γ. Nun wird der Symmetriecharacter eines Molekelhaufens, wie unmittelbar einleuchtet, genau durch diejenigen Operationen bestimmt, welche ihn so in sich überführen, daß jede Molekel wieder mit einer Molekel zur Deckung gelangt[2]). Dies sind, wenn wir eine beliebig gewählte Ausgangsmolekel benutzen, keine andern als diejenigen, durch welche der Molekelhaufen erzeugt wurde, d. h. die Operationen von Γ. Die vorstehend genannten Molekelhaufen sind also bezüglich ihrer Symmetrie genau den 32 Krystallclassen zuzuordnen.

Dies ist die Auffassung, welche der von mir selbst dargestellten Theorie zu Grunde liegt. Krystallographisch läuft sie darauf hinaus, daß jede der Molekeln als isolirter Krystallbaustein zu betrachten ist, und daß die Symmetrie der Krystallmasse ausschließlich auf der Anordnung der Molekeln, d. h. auf der Structur[3]) beruht.

4. Wenn der besondere Fall eintritt, daß die Molekel $\mathfrak{M}$ selbst mit Symmetrieeigenschaften begabt ist, so kann der aus ihr vermittelst der Gruppe Γ erzeugte Molekelhaufen dadurch ebenfalls höheren Symmetriecharacter erhalten; d. h. es kann der Fall eintreten, daß er noch durch andere Operationen in sich übergeht, als diejenigen von Γ. Hierin liegt, wie sich zeigen wird, die gruppentheoretische Erklärung der Thatsache, daß mehrere Structurtheorieen nebeneinander bestehen können. Dieser Punkt soll nun genauer analysirt

1) Vgl. Math. Annalen, Bd. 29, S. 50 u. Bd. 34, S. 179.

2) Dabei bleibt es zunächst eine offene Frage, ob die bezüglichen Operationen jede Molekel $\mathfrak{M}$ in eine andere überführen, oder nicht.

3) Es dürfte dem allgemeinen Sprachgebrauch entsprechen, wenn unter Structur nur die Anordnung der Molekeln im Raum verstanden wird.

werden. Zu diesem Zweck wollen wir zunächst ganz allgemein die Frage untersuchen, auf welchen geometrischen Verhältnissen überhaupt die Symmetrie eines Molekelhaufens beruhen kann.

Um an Bekanntes anzuknüpfen, möge zunächst auf die bezüglichen Verhältnisse der Bravaisschen Gitter hingewiesen werden. Die Bravaisschen Molekelhaufen, welche irgend einer der 32 Gruppen G entsprechen, werden stets so gebildet, daß zur Erzeugung eine Molekel benutzt wird, welche bei allen Operationen der Gruppe G in sich übergeht, deren Symmetrie also durch die Gruppe G gekennzeichnet ist. Diese wird den sämmtlichen Bewegungen einer gewissen Translationsgruppe T unterworfen. Bilden wir nun diejenige Gruppe Γ, welche sich durch Multiplication von G und T ergiebt; so ist klar, daß jede ihrer Operationen den Molekelhaufen in sich überführt. Die Symmetrie des Molekelhaufens ist daher durch die Gruppe Γ characterisirt; andrerseits ist evident, daß sie nur zum Theil auf der Structur, zum Theil aber auch auf der Qualität der Molekel beruht.

Es wird sich zeigen, daß allemal, wenn die Qualität der Molekel von Einfluß auf die Symmetrie des Molekelhaufens ist, Verhältnisse vorliegen, die den eben geschilderten analog sind. Dies ergiebt sich wie folgt.

5. Es sei $\mathfrak{H}$ irgend ein regelmäßiger Molekelhaufen, $\mathfrak{M}$ eine seiner Molekeln, und Γ die Gruppe von Raumtransformationen, die ihn in sich überführen. Diese Gruppe bestimmt, wie bereits oben hervorgehoben, die Symmetrie des Molekelhaufens. Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder giebt es unter den Operationen von Γ — abgesehen von der Identität — keine, welche die Molekel $\mathfrak{M}$ mit sich selbst zur Deckung bringt, oder es giebt solche Operationen. Im ersteren Fall entsteht der Molekelhaufen, wie die oben erwähnten so, daß die Molekel $\mathfrak{M}$ den sämmtlichen Operationen von Γ unterworfen wird, und seine Symmetrie ist nur von der Structur abhängig. Im letzteren Fall gilt dies nicht mehr. Die Operationen, welche die Molekel $\mathfrak{M}$ in sich überführen, bilden alsdann offenbar stets eine der 32 Minnigerodeschen Gruppen G, welche in Γ als Untergruppe enthalten ist. In diesem Fall giebt es aber stets eine in Γ enthaltene Untergruppe Γ' von der Art, daß Γ durch Multiplication von G und Γ' gebildet werden kann[1]);

1) Dies läßt sich leicht einsehen, wenn statt Γ — was ja ausreicht — ebenfalls eine der 32 Minnigerodeschen Gruppen gesetzt wird. Man vgl. übrigens auch meine Mittheilung über „reguläre Gebietstheilungen des Raumes“ (diese

der Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ kann daher einfach so erzeugt werden, daß die symmetrische Molekel $\mathfrak{M}$ allein den Operationen der Gruppe Γ' unterworfen wird.

Der Symmetriecharakter dieses Molekelhaufens hängt nun nicht mehr von der Structur allein ab, sondern theils von der Structur, theils von der Qualität der Molekel, mit welcher er aufgebaut ist; die Structur ist durch die Gruppe Γ', die Molekelqualität durch die Gruppe G charakterisirt. Damit ist bewiesen, daß die Molekelqualität in der That die Symmetrie nur in der Weise beeinflussen kann, wie es bei den Bravaisschen Gittern der Fall ist.

6. Geometrisch resp. gruppentheoretisch ist es offenbar gleichgiltig, ob wir uns die Molekel $\mathfrak{M}$ als eine körperliche Einheit vorstellen, oder ob wir annehmen, daß dieselbe aus einzelnen kleineren Bestandtheilen besteht. Im Besondern ist es zulässig zu bestimmen, daß sie aus einem Körperelement $\mathfrak{M}_1$ mittelst der verschiedenen Operationen von G gebildet ist, also gleichsam als Complex kleinerer Molekeln aufzufassen ist. Wenn wir dieser Auffassung für jede Molekel folgen, und nun die Elemente $\mathfrak{M}_1$ als die letzten Bestandtheile des Krystallaufbaues betrachten, so geht der Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ in einen solchen über, dessen Symmetrie nach wie vor durch die Gruppe Γ gegeben ist, aber einzig und allein auf der Structur beruht.

Aus den vorstehenden Erörterungen ziehen wir noch eine letzte Folgerung. Es sei wieder $\mathfrak{H}$ ein Molekelhaufen, welcher mittelst einer Gruppe Γ aus einer beliebigen Ausgangsmolekel $\mathfrak{M}$ abgeleitet ist. Wir nehmen an, daß die Gruppe Γ Untergruppen G und Γ' enthält, wie wir sie eben betrachtet haben [1]). Ist dies der Fall, so steht, wie aus dem Obigen folgt, geometrisch nichts im Wege, den Molekelcomplex, welcher sich aus $\mathfrak{M}$ mittelst der Operationen von G ergiebt, als eine höhere Einheit aufzufassen und anzunehmen, daß der Molekelhaufen mittelst der Untergruppe Γ' aus diesem Molekelcomplex erzeugt ist. Es läuft dies übrigens darauf hinaus, bei der Raumtheilung, welche durch Γ bestimmt ist, nicht den Fundamentalbereich von Γ selbst als letzten individuellen Gebiets-

---

Nachr. 1888. S. 231). Den gruppentheoretischen Satz, der hier zu Grunde liegt, findet man bei Netto, Theorie der Substitutionen, § 38.

Ich bemerke noch, daß solcher Gruppen Γ' im Allgemeinen mehrere innerhalb der Gruppe Γ gleichberechtigte existiren. Jede derselben kann zu dem obigen Zweck benutzt werden.

1) Diese Bedingung ist bekanntlich für die meisten Gruppen Γ erfüllt.

theil anzusehen, sondern das Aggregat solcher n-Bereiche, welche durch die Operationen von G in sich übergehen [1]).

Ist somit die Vorstellung, welche wir mit dem Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ verbinden können, wechselnder Natur, so kann doch, wie das Vorstehende zeigt, die Symmetrie von $\mathfrak{H}$ dadurch in keiner Weise beeinflußt werden. Dieselbe ist ja auch eine innere geometrische Eigenschaft und kann daher unmöglich von dem subjectiven Ermessen abhängig sein, was wir als letzte individuelle Einheit des Krystallaufbaues betrachten wollen.

7. An der Hand der vorstehenden Bemerkungen läßt sich die oben aufgeworfene Frage nunmehr leicht beantworten. Wir denken uns wieder den mittelst Γ erzeugten Molekelhaufen $\mathfrak{H}$. Derselbe hat einen ganz bestimmten Symmetriecharakter, und entspricht daher den Krystallgestalten einer gewissen Krystallklasse, nämlich derjenigen, deren Symmetrie mit Γ isomorph ist. Dagegen ist, wie das Vorstehende zeigt, die Auffassung, welche wir uns über die Structur, d. h. über den Krystallaufbau, zu bilden haben, im Allgemeinen keineswegs bestimmt und kann noch mannigfach variirt werden. Dies hängt davon ab, ob sich für Γ Untergruppen G und Γ' der oben genannten Art finden lassen. Durch jedes derartige Paar von Gruppen G und Γ' wird eine andere Auffassung über den Aufbau der Krystallmasse ermöglicht. Sie ist, wie bereits oben bemerkt, in jedem Fall dadurch gekennzeichnet, daß die Structur immer durch Γ' charakterisirt ist, während die Gruppe G den Krystallbausteinen eine gewisse Symmetrie aufprägt.

8. An und für sich läßt sich von geometrischer Seite keine der hiermit angedeuteten Auffassungen abweisen und man kann daher bei den bezüglichen Molekelhaufen die Symmetrie in mannigfacher Weise begründen. Historisch liegt allerdings die Sache so, daß im Wesentlichen nur zwei dieser Auffassungen zur Ausgestaltung von Structurtheorieen benutzt worden sind, nämlich diejenigen, für welche Γ' eine gewisse ausgezeichnete Untergruppe von Γ wird [2]), und zwar entweder die Translationsgruppe oder die größte in Γ enthaltene Bewegungsgruppe. Ist diese Untergruppe die Gruppe der Translationen, so haben wir die

1) Vgl. „Reguläre Gebietstheilungen des Raumes", a. a. O. S. 231.

2) Allerdings kommen auch andere Zusammenfassungen vor, besonders bei Herrn Wulff; vgl. über die regelmäßigen Punktsysteme, Zeitschr. f. Krystallogr. Bd. 13, S. 505 ff. Vgl. auch die von Herrn Barlow erörterten Punktsysteme. (Nature, Bd. 29, S. 186 u. 205.)

Bravaissche Gittertheorie, und die Gruppe G ist, wie schon oben erwähnt, allemal mit derjenigen unter den 32 Minnigerodeschen Gruppen identisch, welche für die bezügliche Krystallform charakteristisch ist. Für jede dieser Gruppen G giebt es bekanntlich Gruppen Γ, welche eine solche Auffassung der Molekelhaufen zulassen. Andrerseits ist aber zu bemerken, daß dies nicht bei jedem Molekelhaufen $\mathfrak{H}$ möglich ist; es trifft eben nur für diejenigen Transformationsgruppen Γ zu, welche durch Multiplication der 32 Gruppen G mit einer Translationsgruppe gebildet werden können [1]).

9. Für die Sohnckesche Theorie sind die einschlägigen Verhältnisse noch nicht hinreichend erörtert worden. Ich gebe zunächst an, zu welchem Resultat eine eingehende Betrachtung hinführt.

Die Sohnckesche Theorie stimmt theilweise mit der von mir dargestellten Theorie überein, erklärt also zum Theil die Symmetrie nur aus der Structur. Dies trifft z. B. für alle diejenigen Krystalle zu, welche nur Axensymmetrie besitzen. Für die andern Krystalle ist dies aber nicht immer der Fall; im Besondern wird (vgl. 10b) für die mit Ebenensymmetrie begabten Krystallgestalten durchgehends die Symmetrie nur zum Theil aus der Structur, zum Theil aus der Molekelqualität abgeleitet; und zwar ist die ausgezeichnete Untergruppe von Γ, welche die Structur definirt, diejenige Bewegungsgruppe Γ', aus welcher Γ durch Multiplication mit einer Spiegelung erzeugt werden kann, während die Molekel des Aufbaues, wie die Natur der Gruppe G zeigt, sich selbst spiegelbildlich gleich ist.

Die vorstehenden Behauptungen ergeben sich bei richtiger molekularer Interpretation der Sohnckeschen Anschauungen als nothwendige Consequenzen der Theorie. Sie beruhen auf Folgerungen, auf welche zwar noch nicht hingewiesen wurde, die aber implicite mit der Theorie verbunden sind. Sie ergeben sich nämlich aus der besonderen Eigenschaft des Punktes, daß er als geometrisches Gebilde die Symmetrie einer homogenen Kugel besitzt. Diese Thatsache ist bisher übersehen worden; sie zeigt aber, daß, wenn man bloß mit Punktsystemen operirt, dies nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als daß man den Molekeln stillschweigend die höchste Symmetrie beilegt, die es giebt. Natürlich können die für

1) Diese Verhältnisse sind bereits mehrfach erörtert worden. Vgl. z. B. Blasius, a. a. O. S. 56.

Punktsysteme abgeleiteten Resultate auch für beliebige Molekeln giltig bleiben; es kann aber auch umgekehrt die Einführung der Punkte von Einfluß auf die Qualität der Molekel sein, welche durch den Punkt repräsentirt wird.

10. Hierüber sind einige ausführlichere Bemerkungen am Platze, und zwar scheint es am zweckmäßigsten, damit eine eingehendere Erörterung der Sohnckeschen Theorie zu verbinden.

Da die obige Charakteristik sowohl die ursprüngliche als die erweiterte Form der Sohnckeschen Theorie trifft, so genügt es, wenn wir unsere Bemerkungen an die letztere anschließen.

Die erweiterte Sohnckesche Theorie[1]) operirt bekanntlich mit Punktsystemen, die mit n-Punktnern gebildet sind. Die bezüglichen Molekelhaufen entstehen so, daß n Constructionspunkte den sämmtlichen Bewegungen einer Bewegungsgruppe unterworfen werden. Jeder dieser Punkte bedeutet einen Krystallbaustein; in jeden Fundamentalbereich der zugehörigen Raumtheilung kommt ein Complex von n solchen Punkten. Diese Molekelhaufen zeigen, so lange der n-Punktner beliebig bleibt, in ihrer Structur nur Axensymmetrie. Höhere Symmetrie erhalten sie nur dadurch, daß der Atomcomplex, welchen der n-Punktner vertritt, aus zwei Atomen besteht, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind.

Der Sohnckesche n-Punktner wird aber keineswegs immer in dem eben genannten Sinne benutzt, ebensowenig wird dem mit der Bewegungsgruppe erzeugten Molekelhaufen der höhere Symmetriecharakter stets durch Benutzung eines geeigneten n-Punktners aufgeprägt. Mit Bezug hierauf haben wir Folgendes zu unterscheiden.

a) Es giebt eine Krystallklasse, für welche die von Herrn Sohncke angegebene Construction des Molekelhaufens mit der von mir dargestellten Theorie so gut wie ganz übereinstimmt. Dies ist für die rhomboedrische Tetartoedrie des hexagonalen Systems der Fall; für sie werden Zweipunktner resp. zwei Molekeln eingeführt, die nach Form und Qualität spiegelbildlich gleich anzunehmen sind[2]).

b) Molekelhaufen mit Ebenensymmetrie werden durchgängig so construirt, daß ein Ausgangspunkt in einer besonderen Lage angenommen wird, nämlich in derjenigen Ebene, welche Symmetrieebene werden soll[3]). Dadurch wird aber den bezüg-

1) Vgl. Zeitschrift für Krystall. Bd. 14, S. 433.

2) Vgl. a. a. O. S. 438.

3) a. a. O. S. 436. Vgl. auch Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur, z. B. S. 187, 193 u. s. w.

lichen Molekeln Symmetrie beigelegt; denn die Molekel muß ja durch Spiegelung an dieser Ebene in sich übergeben. Ueberhaupt ist zu sagen, daß jede Ortsbeschränkung des Constructionspunktes auf eine Specialisirung der Molekel hinausläuft. Die genannten Sohnckeschen Punktsysteme haben also den ihnen eigenthümlichen Symmetriecharakter in der That nur dann, wenn jeder Punkt eine symmetrische Molekel vertritt.

c) Die Verwendung der n-Punktner hat in den meisten Fällen gar nicht den Zweck, die Symmetrie des Molekelhaufens positiv zu beeinflussen, sie dient vielmehr dazu, Molekeln anzudeuten, die gewisse Eigenschaften nicht besitzen. Dies findet z. B. bei solchen Punktsystemen statt, welche nur Drehungsaxen einer einzigen Richtung besitzen, deren Gruppen also durch Multiplication einer einfachen cyclischen Gruppe mit einer geeigneten Translationsgruppe entstehen. Für diese Punktsysteme giebt es Symmetrieebenen senkrecht zur Axenrichtung, was daraus ersichtlich ist, daß sowohl die cyclische Gruppe wie auch die Translationsgruppe und der Punkt durch Spiegelung an diesen Ebenen in sich übergeht. Jede Netzebene ist eine solche Symmetrieebene; aber natürlich nur so lange, als wir mit wirklichen Punkten operiren; der Molekelhaufen, der mit beliebigen Molekeln gebildet ist, besitzt diese Symmetrieebenen im Allgemeinen nicht[1]). Um nun ein Punktsystem zu erhalten, welches ebenfalls von der genannten Symmetrie frei wird, verwendet Herr Sohncke einen Zweipunkter als Element des Aufbaues[2]). Es ist aber evident, daß der Zweipunkter der Molekel, die er vertritt, keine positive Qualität auferlegt; er soll vielmehr nur ausdrücken, daß ihr eine gewisse Qualität nicht zukommen darf. Die hierdurch skizzirte Benutzung von n-Punktnern ist daher, sobald man festhält, daß der Punkt eine beliebige Molekel andeuten soll, überflüssig.

d) Endlich bemerke ich, daß die Sohncke sche Theorie, wenn als n-Punktner ein geeigneter Zweipunktner gewählt wird, oder präciser gesprochen, wenn wir zum Aufbau des Molekelhaufens zwei einander spiegelbildlich gleiche Bausteine in passender Lage verwenden, auch wirklich zu allen oben (3) charakterisirten Molekelhaufen hinführt, d. h. zu allen, welche für die Begründung der Symmetrieverhältnisse einzig und allein in Frage kommen. Diese

1) Die in meinem Beitrag zur Krystallstructur (diese Nachr. 1889, S. 495) enthaltenen Bemerkungen werden dadurch hinfällig.

2) a. a. O. S. 485 ff.

Bausteine müssen immer so gewählt werden, daß durch gewisse Deckoperationen zweiter Art einer aus dem andern hervorgeht[1]). Für die Symmetrie des Molekelhaufens sind daher beide Bausteine als geometrisch gleichwerthig anzusehen, genau wie in dem oben unter a) erwähnten Fall. Für derartige Molekelhaufen ist daher eine Differenz zwischen der Sohnckeschen und der von mir vertretenen Auffassung kaum mehr vorhanden, sie läuft schließlich auf Unterschiede in der Benennung heraus. Dagegen betreffen die unter b) und c) angestellten Erwägungen sachliche Irrthümer der Sohnckeschen Auffassung, deren Quelle, wie oben erwähnt, darin liegt, daß die molekulare Uebersetzung der geometrischen Annahmen bisher von keiner Seite gegeben worden ist.

11. Für die Entscheidung über den Werth der Theorieen können verschiedene Gesichtspunkte in Frage kommen. Daß sie sämmtlich eine ausnahmslose Begründung der Symmetrieverhältnisse geben, haben wir bereits oben gesehen. In gewissem Sinne lassen sich diejenigen Theorieen, welche mit allgemeinen regelmäßigen Molekelhaufen operiren, der Gittertheorie als übergeordnet betrachten, aus dem Grunde, weil die Gittertheorie nicht zu allen regelmäßigen Structuren führt[2]). Endlich könnte man auch das Verlangen stellen, daß die Theorie die Symmetrieverhältnisse für alle Krystallgestalten auf gleiche Weise begründen soll. Läßt man sich von dieser Forderung leiten, so würde wieder die Sohnckesche Theorie sowohl gegen die allgemeine wie auch gegen die Bravaissche Theorie zurückstehen.

Das letzte Wort kann meines Erachtens allerdings nur an der Hand krystallographischer Erfahrungen gesprochen werden. Es genügt nämlich nicht, wenn der Molekelhaufen, welcher den Krystall darzustellen bestimmt ist, die Symmetrie des Krystalles wiederspiegelt; es müssen sich vielmehr auch die sämmtlichen physikalischen resp. chemischen Eigenschaften aus seiner Eigenart erklären lassen. Dies wird einerseits von der Structur des Haufens, andererseits von der besonderen Natur der Molekel abhängen; Structur und Molekelqualität müssen daher, soll die Theorie wirklich brauchbar sein, zweckentsprechend angenommen werden können. Eine Theorie wird demnach nur dann eigentlichen krystallographischen Werth beanspruchen dürfen, wenn es im Rahmen derselben in allen Fällen mög-

1) Welche Lagenverhältnisse zu diesem Zweck nothwendig und hinreichend sind, habe ich in den math. Annalen, Bd. 34, S. 172 ff. entwickelt.

2) Vgl. hierüber Sohncke, Theorie der Krystallstructur, S. 23.

lich ist, die Structur so auszuwählen, und Form wie Qualität der Molekeln so zu specialisiren, wie es durch die Natur der physikalischen resp. chemischen Erscheinungen unbedingt gefordert wird[1]).

Es ist daher als unerläßlich zu betrachten, daß für jede Theorie genau bekannt ist, welche speciellen Annahmen über die Molekelqualität sie implicite enthält. Da dies bei der Darstellung der Theorieen bisher nicht immer angegeben wurde, so möge hier noch eine kurze Darstellung der drei Theorieen folgen, welche im Besondern auch die Molekelqualität berücksichtigt[2]).

I. Die Bravaissche Theorie. Die Molekeln sind raumgitterartig angeordnet. Jede Molekel ist mit Symmetrie begabt, im übrigen aber beliebig; sie kann als Polyeder, als Atomcomplex etc. gedacht werden. Ihre Symmetrie entspricht genau der Symmetrie des Krystalles. Dies gilt für jede mögliche Krystallklasse.

II. Die Sohnckesche Theorie. Alle Molekeln resp. Molekelcomplexe[3]) sind nach Form und Qualität absolut congruent. Die Symmetrie der Molekelhaufen beruht in einigen Fällen allein anf der Structur; für die Mehrzahl der Krystallklassen, nämlich für diejenigen, welche auch Ebenensymmetrie besitzen, werden jedoch Molekeln benutzt, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind. Im übrigen sind die Krystallbausteine ganz beliebig. Sie können sowohl eine einheitliche Partikel bilden, als auch auf jede mögliche Art in kleinere Einzelbestandtheile zerfallen, und jede weitere Bestimmung, die sich physikalisch als nothwendig oder zweckmäßig erweisen sollte, kann ihnen beigelegt werden.

III. Die erweiterte Theorie. Sie bedarf keinerlei Annahmen über die Qualität der Molekeln resp. der letzten Bausteine; sowohl ihre Form und Zusammensetzung als auch ihre Wirkungsweise unterliegt keinerlei Beschränkung[4]). Dagegen nimmt sie

---

1) Bekanntlich wird diese Möglichkeit für die Bravaissche Theorie bestritten.

2) Es scheint um so mehr angemessen, die Bedingungen, welche jede Theorie für die Natur der Molekel statuiren muß, genau zu kennen, als Speculationen hierüber von krystallographischer Seite bereits mehrfach mit Erfolg angestellt sind. Vgl. z. B. die Groth sche Rede über die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. München 1888.

3) Welche Molekelkomplexe allein in Betracht zu ziehen sind, ist oben unter 10a und d angegeben.

4) Allerdings ist für gewisse Molekelhaufen (vgl. 10c) auszuschließen, daß die Molekel sich spiegelbildlich gleich ist und überdies eine bestimmte Lage hat. Analoge Beschränkungen gelten übrigens für jede Theorie. Beispielsweise darf man auch innerhalb der Bravaisschen Theorie den Molekeln im Allgemeinen

an, daß dieselben in zwei verschiedene Arten zerfallen, die der einen Art sind denen der andern Art spiegelbildlich gleich. Aus ihnen sind die Krystalle zu gleichen Theilen aufgebaut; mit Ausnahme derjenigen, welche nur Symmetrieaxen besitzen, die also in enantiomorphen Gestalten auftreten können. Diese bestehen aus lauter unter sich congruenten Molekeln. Von zwei enantiomorphen Krystallen wird der eine allein von Molekeln der einen Art, der andere von Molekeln der andern Art gebildet[1]). Die Symmetrie des Molekelhaufens beruht für alle Krystallklassen allein auf der Structur.

Erst mit dieser Theorie ist also das Ziel erreicht, daß die Symmetrie ihre Erklärung einzig und allein in der Structur findet, während im Gegensatz hierzu für jede specielle physikalische oder chemische Eigenschaft des Krystalles die Qualität der Molekel zur Disposition steht. Dies ist aber auch das Resultat, welches den jetzigen Wünschen der Krystallographen entsprechen dürfte; denn das Feld für die Speculationen über die Molekelqualität ist damit absolut freigemacht.

Bemerkung. Für diejenigen Krystalle, welche nur Symmetrieaxen besitzen, stimmt die Sohnckesche Theorie mit der erweiterten überein. Im besondern muß die Sohnckesche Theorie zum Aufbau zweier enantiomorphen Krystalle ebenfalls Molekeln von zweierlei Typus verwenden[2]). Wenn wir ferner diejenigen Sohnckeschen Molekeln, welche sich selbst spiegelbildlich gleich sind, in zwei getrennte Bestandtheile auflösen, und diese als die letzten Bausteine betrachten und das Gleiche für die bezüglichen Zweipunktner thun, deren die Sohnckesche Theorie allein bedarf (vgl. 10a und d), so geht die Sohnckesche Theorie direct in die von mir dargestellte Theorie über.

---

keine höhere Symmetrie beilegen, als ihnen in jedem bezüglichen Fall zukommt. Eine eigentliche Beschränkung liegt also darin nicht vor.

1) Läßt man Molekeln zu, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind, so kann die Enantiomorphie auch auf der Structur allein beruhen; die bezüglichen Punktsysteme sind eigentliche Schraubensysteme.

2) Vgl. vorstehende Anmerkung.

Die Mandasor Inschrift vom Mâlava Jahre 529 (= 472 n. Chr.) und Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra.

Von

F. Kielhorn.

Dr. Bhâṇḍârkar hat in einem der Asiatischen Gesellschaft von Bombay am 1. August 1889 vorgelegten Aufsatze über die Epoche der Gupta Aera einen Vers der Mandasor Inschrift des Kumâragupta und Bandhuvarman behandelt, der in Fleet's Texte also lautet[1]): —

Râmâ-sanâtha-[ra]chane dara-bhâskar-âṁçu-vahni-pratâpa-subhage jala-lîna-mîne | chandrâṁçu-harmyatala-chandana-tâlavṛinta-hâr-opabhodha(ga)-rahite hima-dagdha-padme ‖

Die fünf Composita dieses Verses sind Adjective, die das im folgenden Verse stehende Substantivum *kâle* näher bestimmen, und sind zusammen mit diesem von Fleet übersetzt worden: —

„In that season which unites men with (*their*) lovely mistresses; which is agreeable with the warmth of the fire of the rays of the sun (*shining*) in the glens; in which the fishes lie low down in the water; which (*on account of the cold*) is destitute of the enjoyment of the beams of the moon, and (*sitting in the open air on*) the flat roofs of houses, and sandal-wood perfumes, and palmleaf fans, and necklaces; in which the water-lilies are bitten by the frost."

Bhâṇḍârkar hat gezeigt, daß Fleet's Uebersetzung des ersten Compositums (râmâ-sanâtha-[ra]chane) falsch ist, und daß die richtige Uebersetzung desselben keinen Sinn gibt. Er hat ferner darauf aufmerksam gemacht, daß die von Fleet in jenem Worte *cha* gelesene Sylbe im Originale *va* ist, hat, statt der von Fleet ergänzten Sylbe *ra*, *bha* ergänzt, und das so von ihm restituirte

râmâ-sanâtha-[bha]vane

übersetzt durch „that [time] in which there are lovely women in the houses, *i. e.* when there is no separation between husband and wife". Außerdem hat er Einspruch erhoben gegen Fleet's Uebersetzung des ersten Wortes (*dara*) des zweiten Compositums durch „in the glens", weil es nicht bloß die Thäler seien, die die Sonne in der kalten Jahreszeit erwärme. *Dara* sei vielmehr gleichbe-

1) Corpus Inscr. Ind., Bd. III, S. 83, Zeile 17.

deutend mit *îshad* „little, in a small degree, moderate“, und das zweite Compositum sei demnach zu übersetzen — „which is agreeable with the moderated heat of the fire of the rays of the sun“.

Auch ich halte Fleet's Text und Uebersetzung für falsch, und ich stimme mit Bhâṇḍârkar darin überein, daß wir im ersten Compositum *bha* statt *ra* ergänzen und die folgende Sylbe *va* lesen müssen. Aber Bhâṇḍârkar's Erklärung des zweiten Compositums befriedigt mich ebenso wenig wie Fleet's. *Dara* ist zu weit von *pratâpa* entfernt als daß wir es auf dies beziehen könnten; und es scheint mir unpassend die geringe Wärme der Sonnenstrahlen zu loben, gerade wenn wir uns wärmen wollen. Außerdem wäre bei Bhâṇḍârkar's (und Fleet's) Erklärung das Wort *vahni* überflüssig. Natürlicher wäre es zu sagen, daß uns im Winter die Strahlen der Sonne und die Wärme eines Feuers angenehm sind. Aber auch bei dieser Erklärung wäre *dara* unpassend, denn kein Dichter würde von kleinen (*svalpa*) Sonnenstrahlen reden.

Prüfen wir in der Photographie das (von Fleet und Bhâṇḍârkar *ne* gelesene) Zeichen für die letzte Sylbe des ersten Compositums sorgfältiger, so finden wir, daß dasselbe genau so aussieht wie das Zeichen für die zweite Sylbe des Wortes *manoharaiḥ* in Zeile 20. Die Sylbe ist also *no*, nicht *ne*, und die richtige Lesung des Eingangs des Verses ist —

Râmâ-sanâtha-[bha]vanodara-bhâskarâṁçu-vahnipratâpa-subhage.

Hiermit ist jegliche Schwierigkeit entfernt. Die kalte Jahreszeit ist dem Manne dadurch angenehm daß sie ihn im Innern des Hauses hält wo er mit der Frau oder Geliebten zusammen ist; wenn es kalt ist, freut er sich der Strahlen der Sonne und der Wärme eines Feuers.

Der Vers der Inschrift lautet also —

Râmâ-sanâtha-bhavanodara-bhâskarâṁçu-
vahnipratâpa-subhage jala-lîna-mîne |
Chandrâṁçu-harmyatala-chandana-tâlavṛinta-
hâr-opabhogarahite hima-dagdha-padme ||

Betrachten wir den Bau und den Wortlaut dieses Verses näher, so ergibt sich, denke ich, mit Sicherheit, daß der Dichter bei Abfassung desselben die folgenden Verse aus Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra [1]) vor Augen hatte: —

1) Ṛitusaṁhâra, Sarga V, 2 und 3.

Niruddhavâtâyana-mandirodaraṁ
hutâçano bhânumato gabhastayaḥ |
Gurûṇi vâsâṁsy=abalâḥ sayauvanâḥ
prayânti kâle=tra janasya sevyatâm ||
Na chandanaṁ chandramarîchi-çîtalaṁ
na harmyapṛishṭhaṁ çaradindu-nirmalam |
Na vâyavaḥ sândratushâra-çîtalâ
janasya chittaṁ ramayanti sâmpratam ||

Es wäre überflüssig meine Fachgenossen auf die genaue Uebereinstimmung der Gedanken und des Ausdrucks im Einzelnen aufmerksam zu machen, und ich will nur bemerken, daß der Verfasser der Inschrift dem ersten Verse Kâlidâsa's im Wesentlichen nur den durch *jala-lina-mîne*, und dem zweiten Verse den durch *hima-dagdha-padme* ausgedrückten Gedanken hinzugefügt hat.

Das Resultat ist, daß Kâlidâsa's Ṛitusaṁhâra vor dem Jahre 472 n. Chr. verfaßt sein muß.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1890.

(Fortsetzung.)

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVI. 1889. Rendiconti. Vol. V. Fasc. 9, 10, 11, 12. 2. semestre. Roma 1889.
Ematite di Stromboli d. G. Struever (estratto dalle Memorie d. Classe di sc. fis. mat. e nat. Vol. VI. 1889).
Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Schlusslieferung zu Tomo XX. Ind. = p. 697—749. Roma 1890.
Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (sezione della società R. di Napoli. Serie 2a. Vol. III. Fasc. 1—12. 1889. Napoli.
Bollettino delle publicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1890. Nr. 98, 90. Firenze 1890.
Transactions of the astronomical observatory of Yale University. Vol. 1. Part II. New Haven 1889.
Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard college. Whole series. Vol. XVI. Nr. 6. Geol. Ser. Vol. II. Vol. XVII. Nr. 6. Cambridge. U. S. A. 1889.
Transactions of the Wagner free Institute of science of Philadelphia. Vol. II. Philadelphia 1889.
Johns Hopkins university circulars. Vol. IX. Nr. 78. Baltimore 1890.
Anales de la soziedad cientìfica Argentina. Tomo XXVIII. Entrega III, IV. Buenos-Aires 1889.

Nachtrag.

Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Nr. 18. 1889. Nr. 1. 2. 1890.
Anzeiger d. Akademie der Wissenschaften in Krakau 1890. Januar. Krakau 1890.
Ungarische Revue. Heft 2. 1890. Jahrg. 10. Budapest 1890.

Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde, uitgeven vanwege de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Jaarg. 1—8. Leiden 1881—88.

a. Notulen van de Algemeene en Bestuerrs-Vergaderingen van het Bataviaasche Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVII. 1889. Aflevering II, III.

b. Register op de notulen der Vergaderingen over de Jaren 1879 t/m. 1888. Batavia, s'Hage 1889.

c. Tijdschrift door Indische Taal- Land- en Volkenkunde. Deel XXXIII. Aflevering 2, 3 en 4. Batavia, s'Hage 1889.

d. De Derde Javaansche Successie-Orlog 1746—1755. Voor P. J. F. Louro. Uitgegeven door het Bat. Genoots v. K. en W.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 10. 1888. Batavia 1889.

Nederlandsch-Indie Plakaatboek. 1602—1811. Deel VI. 1750—1754. Batavia, s'Hage 1889.

Observations made as the Magnesical and Meteorological observatory at Batavia. Vol. XI. 1888. Batavia 1889.

Herbarium musei fennici editio secunda. I. Plantae vasculares.

Meddelanden af societas pro fauna et flora fennica 15 häftet (1889).

Acta societatis pro fauna et flora fennica. Vol. V. Pars I.

Notae conspectus florae fennicae auctore Hj. Hjelt. Helsingforsiae 1888—89.

März und April.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin. X—XIX. 1890.

Bemerkungen über den Bau der Menschen- und Affenplacenta. Von W. Waldeyer. Bonn 1890.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Herausgeg. im Auftrage des naturw. Vereins für Sachsen und Thüringen. D. ganzen Reihe LXII. Band; Vierte Folge; Achter Band; Heft 3/4. 5 u. 6. Halle a. S. 1889.

Leopoldina. Heft XXVI, No. 3—4, 5—6.

Acta Mathematica. 14, 1. Stockholm-Berlin 1890.

Rede zum Geburtstage S. M. d. K.K. Wilhelm II. in der Aula d. K. Technischen Hochschule zu Berlin. Von E. Jacobsthal. Berlin 1890.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XIX; Jahrgang 1887; Heft 2. Berlin 1890.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrgang 25; Heft 1. Leipzig 1890.

Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 43; Heft 4. Leipzig 1889.

Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philologisch-historische Classe. 1889. IV. Leipzig 1890.

Die technische Produktion und die bezüglichen römisch-rechtlichen Erwerbtitel. Von Moritz Voigt. (Des XI. Bandes der Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften No. VI.) Leipzig 1890.

Sitzungsberichte d. Kön. Baier. Akademie d. Wissensch. zu München

a. Philosophisch-philologische u. historische Classe. 1889, Band II, Heft 2; 1890, Heft 1.

b. Mathematisch-physikalische Classe. 1889, Heft 3.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 6.

Eduard Riecke, Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrzahl von Phasen bestehenden Systems. — *Franc. Brioschi*, Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen. — *A. Schoenflies*, Ueber das gegenseitige Verhältniss der Theorieen über die Structur der Krystalle. — *F. Kielhorn*, Die Mandasor-Inschrift vom Mâlava Jahre 589 (= 472 n. Chr.) und Kâlidâsa's Ritusamhâra. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Coll. of Surg.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND
20 SEP 90
LIBRARY

5. Juli. **№ 7.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli 1890.

Merkel: Ueber argentinische Gräberschädel.

Liebisch legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Fr. Pockels vor: Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen.

Schwarz legt vor:

a) einen Aufsatz von Prof. Julius Weingarten in Charlottenburg, Korrespond. der mathem. Klasse: Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen.

b) einen Aufsatz von O. Venske: Ueber eine Abänderung des ersten Hermiteschen Beweises für die Transcendenz der Zahl *e*.

Voigt legt vor: Bestimmung der Elasticitätsconstanten des brasilianischen Turmalins.

Wieseler legt vor: Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer.

de Lagarde kündigt für den Band 36 der Abhandlungen an: Nachträge und Regesten zu der im Band 35 erschienenen Uebersicht über die Bildung der Nomina im Aramaeischen, Arabischen und Hebräischen.

Wagner legt einen Aufsatz vor: Ueber ein spät mittelalterliches Verzeichniß geographischer Coordinatenwerte.

Ueber argentinische Gräberschädel.

Von

Fr. Merkel.

Die Schädel-Sammlung des hiesigen anatomischen Institutes, welche unter dem Namen der „Blumenbach'schen Sammlung" einen Weltruf genießt, erhielt im Frühling dieses Jahres durch die freundliche und sehr dankenswerthe Schenkung[1]) des Herrn Professor Bodenbender in Cordoba, Argentinien, drei Indianer-Schädel aus einer Grabstätte zwischen Rio Agrio und Rio Catanlil, am oberen Arroyo Corunco in Argentinien, welche der freundliche Geber von einer wissenschaftlichen Expedition in jene fast völlig unbekannten Gegenden mitgebracht hatte. Die Schädel sind um so werthvoller, da solche aus dem Innern Südamerikas überhaupt nur äußerst spärlich in europäischen Sammlungen vertreten sind und solche aus jenen kaum von Weißen betretenen Theilen Argentiniens überhaupt nicht vorhanden sein dürften. Alle drei Schädel sind defect, doch lassen sich an ihnen die wichtigsten Maaße ohne Schwierigkeit nehmen. Ihr Erhaltungszustand ist ein verschiedener, während einer (No. III) noch ziemlich recent erscheint, sehen die beiden anderen so aus, als hätten sie sehr lange in der Erde gelegen. Doch möchte ich ihnen dieses Aussehens wegen noch nicht ein sehr hohes Alter vindiciren, da man ja weiß, wie zuweilen die Bodenbeschaffenheit die Knochensubstanz zu verändern geeignet ist und wie der Stoffwechsel einer tropischen Vegetation es vermag, deren Textur anzugreifen.

Zwei Schädel gehören erwachsenen Personen, vermuthlich männlichen Geschlechtes, an, der dritte ist der eines Kindes, nach Ausweis der Zähne und anderer Merkmale, von 8—9 Jahren. Bei allen Schädeln sind die Zähne, soweit sie vorhanden sind, zwar gesprungen, im Uebrigen aber wohlerhalten und weder cariös verändert, noch abgeschliffen, noch auch gefeilt. Die Nähte von No. I sind zum guten Theil verstrichen, diejenigen von No. II und III sind vollständig erhalten. Von anatomischen Eigenthümlichkeiten der Schädel ist zu berichten, daß bei No. I die Lineae nuchae suprema und superior am Seitenwinkel der Hinterhauptsschuppe in einen leistenförmigen Knochenlappen ausgezogen ist, während das System der Hinterhauptslinien im Uebrigen nichts Auffallendes zeigt. Bei den beiden andereren Schädeln ist Nichts dergleichen zu bemerken, auch die Indianerschädel unserer Sammlung, welche

1) Für die Vermittelung der Schenkung ist das Institut Herrn Prof. v. Könen zu Dank verpflichtet.

ich daraufhin durchgesehen habe, zeigen die beschriebene Eigenthümlichkeit nicht.

Was die ganze Form der Schädel anlangt, so sehe ich von dem kindlichen (No. III) ab und benutze nur die beiden erwachsenen zur Vergleichung. Nach Ausweis der unten angeführten Maaße ist No. I brachycephal und an der Grenze der Orthocephalie stehend, No. II hyperbrachycephal zu nennen. Das Obergesicht ist bei beiden breit, dabei erweist sich aber der eine (No. I) leptorrhin, der andere (No. II) platyrrhin. Die Augenhöhlen von No. I sind mesokonch die von No. II hypsikonch. Der Gaumen ist bei No. I mesostaphylin, fast brachystaphylin, bei No. II wirklich brachystaphylin. Prognathie ist weder bei dem Schädel No. I vorhanden, noch auch bei No. II, wo der Profilwinkel wegen Beschädigung nicht gemessen werden konnte. Vergleicht man die Schädel mit anderen Amerikanerschädeln, dann findet man, daß bei letzteren neben Langschädeln ganz abweichender Form auch solche vorkommen, welche mit den in Rede stehenden viel Verwandtes zeigen und zwar findet man sie sowohl in der nördlichen, wie der südlichen Hälfte des Continentes. Aber doch ist die Form der Argentinischen Cranien eine sehr eigenthümliche, in der Norma verticalis fast viereckige, ein Bild, welches wesentlich durch eine außerordentlich starke Abplattung des Hinterhauptes hervorgerufen wird. Besonders bei dem sehr brachycephalen Schädel No. II kann man sich des Argwohnes nicht erwehren, daß man es mit einer künstlichen Abplattung zu thun hat. Es würde dies für Amerika nichts Auffallendes sein, da ja sowohl bei gewissen Stämmen Nordamerikas, wie bei den Peruanern und Mexicanern die künstliche Deformirung des Schädels im Schwange war. Die Gründe, welche mich zweifeln lassen, sind drei. Erstens zeigt der kindliche Schädel ein normal gewölbtes Hinterhaupt, an welchem von einer Verunstaltung Nichts wahrnehmbar ist und zweitens sind auch bei dem besonders kurzen Schädel No. II Gaumen, Nase und Augenhöhlen so gestaltet, wie sie einem sehr kurzen Schädel zukommen. Drittens muß hervorgehoben werden, daß die Form des Schädels an sich von der aller anderen deformirten Schädel abweicht. Man müßte daher annehmen, daß in den argentinischen Gegenden eine ganz eigenthümliche, sonst nicht geübte Umformungsweise im Gebrauch war. Zu einer solchen Annahme wird man sich jedoch erst dann entschließen, wenn noch mehr Objecte zum Vergleich zu Gebote stehen; es ist daher sehr zu wünschen, daß es gelingen möchte, noch neues anthropologisches Material vom Arroyo Corunco herbeizuschaffen.

Argentinien*)	Größte Länge	Länge	Breite	Stirnbreite	Höhe	Ohrhöhe	Länge der Schädel-Basis	Horizontalumfang	Sagittalumfang	Querumfang	Gesichtsbreite	Obergesichtshöhe	Jochbreite	Nase		Orbita		Gaumen		Profilwinkel
														Höhe	Breite	Breite	Höhe	Länge	Breite	
I.	171,0	168,5	141,5	93	125	106	96	50,5	34,6	31,2	103	67	134	47	21,6	41	33	50	42	91,0
II.	168,0	159,0	143,0	88	139,5	—	97	49,5	37,0	—	98	68	—	51,5	29,0	42	37	48,5	37	—

	I.	II.
Längenbreitenindex . .	83,9	89,9
Längenhöhenindex . .	74,1	87,7
Obergesichtsindex . . .	49	—
Index der Nasenmündung	46,0	56,8
Index der Augenhöhle .	80,4	88,0
Index des Gaumens . .	84,0	85,0

*) Die Maaße sind nach den Vorschriften der Frankfurter craniometrischen Verständigung (Corresp.-Blatt d. Ges. f. Anthrop., XIV. Jahrg., No. 1, Jan. 1883) genommen.

Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen.

Von

Fr. Pockels.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

In der vorliegenden Abhandlung sollen diejenigen Interferenzerscheinungen berechnet und discutirt werden, welche man in einem Polarisationsapparate bei Anwendung von convergentem homogenem Lichte an einer Combination von zwei planparallelen, aus einem einaxigen Krystall unter gleicher Neigung gegen die optische Axe geschnittenen Platten beobachtet, welche so übereinander gelegt sind, daß ihre Hauptschnitte zusammenfallen, die optischen Axen aber in entgegengesetztem Sinne gegen die gemeinsame Plattennormale geneigt sind, so daß die Combination eine künstliche Zwillingsplatte darstellt. — Diese Interferenzerscheinungen sind zum ersten Male von Langberg theoretisch untersucht (und auch wohl zuerst beobachtet) worden[1]). Derselbe hat eine allgemeine Formel für die Intensität des durch zwei übereinander liegende, beliebig orientirte einaxige Krystallplatten hindurchgegangenen Lichtes aufgestellt, aber bei deren Anwendung auf specielle Fälle immer die Schwingungsrichtungen im ganzen Gesichtsfelde als constant angenommen. Daher fand er in dem einzigen von ihm untersuchten Falle einer Zwillingsplatte, nämlich in demjenigen, wo die optischen Axen der beiden Platten $\pm 45^0$ mit der Plattennormale bilden, nur ein System von Ellipsen (Curven gleichen Gangunterschiedes), deren Discussion (l. c. p. 541) bei ihm übrigens auch unvollständig geblieben ist.

Eine im Jahre 1853 erschienene sehr umfangreiche Arbeit von Ohm („Erklärung aller in Platten einaxiger Krystalle im geradlinig polarisirten Lichte warnehmbaren Interferenzerscheinungen")[2]) enthält unter Anderem eine mathematische Behandlung der Inter-

1) Analyse der Interferenzerscheinungen in combinirten einaxigen Krystallen. Pogg. Ann. Erg.-Bd. I, 1842, p. 529—565.

2) Abhandl. der Bayerischen Akad., math.-phys. Classe, Bd. VII, p. 43—149 und 265—370. Ein übersichtliches Referat über diese Arbeit hat C. Neumann in den Fortschr. d. Phys. Bd. XI, 1855, p. 287—294, gegeben.

ferenzerscheinungen in Zwillingsplatten von beliebiger Neigung der optischen Axen. Auch Ohm hat die resultirende Intensität allgemein berechnet, aber bei der Anwendung der Intensitätsformel, welcher er übrigens eine recht übersichtliche Form gegeben hat, die veränderliche Lage der Schwingungsrichtungen für convergente Strahlen nicht berücksichtigt. Daher konnte er nur die Curven gleichen Gangunterschiedes erklären, welche man nahe der Mitte des Gesichtsfeldes wahrnimmt. Er fand, daß die am Schlusse seiner Arbeit beschriebenen Erscheinungen, welche er an einer Zwillingsplatte mit kleinem Neigungswinkel (5°) der optischen Axen gegen die Plattennormale beobachtete, gänzlich im Widerspruch zu seinen Formeln ständen (p. 363—364); übrigens hat er p. 366—367 selbst den wahren Grund dieses Widerspruches, wenn auch etwas unbestimmt, angedeutet. — Später hat van der Willigen[1]) den Gangunterschied der durch einaxige Krystallplatten hindurchgegangenen Strahlen mit möglichster Strenge berechnet und auch für den speciellen Fall einer Zwillingsplatte, in welcher die optischen Axen $\pm 45^0$ mit der Plattennormale bilden, diejenigen vier Curvensysteme discutirt, auf denen der Gangunterschied, welchen die beiden Strahlen in je einer der beiden combinirten Platten erleiden, bezw. die Summe und die Differenz dieser Gangunterschiede constant sind. Er sagt schließlich, die an der Zwillingsplatte beobachtete Interferenzerscheinung bestehe aus einer Ueberlagerung jener vier Curvensysteme, und es müsse noch die Intensität berechnet werden, mit welcher dabei jedes von ihnen auftritt.

Eine vollständige und übersichtliche Discussion über die Curven, auf welchen die Summe der Gangunterschiede constant ist, (sowie vorher über die jeder einzelnen Platte zukommenden Curven gleichen Gangunterschiedes), hat Bertin[2]) gegeben. Derselbe hat aber die resultirende Intensität gar nicht allgemein berechnet und daher auch die Unterbrechungen der dunklen Ellipsen und Hyperbeln, welche bei den in Rede stehenden Erscheinungen gerade auffallen, nicht erklären können, ebensowenig die unter Umständen auftretenden geradlinigen Streifen. Bertin hat, wie er l. c. p. 508 erwähnt, die Interferenzerscheinungen in homogenem (violettem) Lichte photographirt; die seiner Abhandlung beigefügten Figuren sind aber, einer Bemerkung p. 506 zufolge, nur Zeichnungen und stellen auch, höchstens die Fig. 8 ausgenommen, die Erschei-

1) Arch. du musée Teyler, III, p. 241, 1873. Pogg. Ann. Jubelbd. p. 491—497, 1874.
2) Ann. de Chim. et de Phys., (6), II, 1884, p. 485—508.

nungen unrichtig dar; die in diesen Figuren hervortretende Asymmetrie ist vermuthlich einer ungenauen Orientirung der beiden Platten gegeneinander bei den Beobachtungen Bertin's zuzuschreiben. —

Wenn nun auch von den genannten Autoren die vier Systeme von Curven gleichen Gangunterschiedes, welche in Zwillingsplatten der betrachteten Art überhaupt unter Umständen auftreten können, an und für sich bereits berechnet worden sind, so fehlt doch bisher eine auf Berücksichtigung der innerhalb des Gesichtsfeldes veränderlichen Lage der Schwingungsrichtungen beruhende Untersuchung darüber, in welcher Weise sich jene Curvensysteme scheinbar überlagern bezw. sich gegenseitig unterbrechen, und unter welchen Umständen oder in welchen Theilen des Gesichtsfeldes das eine oder andere Curvensystem allein auftritt. Durch eine solche Untersuchung die Einzelheiten der merkwürdigen, von Zwillingsplatten der bezeichneten Art dargebotenen Interferenzerscheinungen zu erklären, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Die unmittelbare Veranlassung zu derselben bot die von Herrn Prof. Liebisch im hiesigen mineralogischen Institut ausgeführte photographische Aufnahme jener Erscheinungen im Natriumlicht; auf die nach diesen Photographieen hergestellten Lichtdrucktafeln [1]) wird bei der Discussion wiederholt hingewiesen werden. Die der vorliegenden Abhandlung beigefügten Figuren 3—6 haben nur schematische Bedeutung; sie sollen erläutern, wie die Gebiete, wo die einzelnen Curvensysteme bezw. dunkle Flecke auftreten, im Gesichtsfelde zu einander liegen.

Es wird vorausgesetzt, daß die optischen Axen der beiden übereinanderliegenden Platten gegen die Plattennormale gleich geneigt sind, daß also, wenn auf der Kugelfläche durch O die Plattennormale, durch A_1, A_2 die optischen Axen der beiden Platten dargestellt werden (Fig. 1), $OA_1 = OA_2 = \Omega$ ist.

Ist N eine beliebige Wellennormale in der Platte, so werde gesetzt

$$ON = \vartheta,\ A_1ON = \varphi,$$
$$OA_1N = 180^\circ - \psi_1,\ OA_2N = \psi_2.$$

In erster Annäherung kann angenommen werden, daß die Richtung N in beiden Platten dieselbe ist, d. h. daß beim Eintritt einer Welle aus der ersten in die zweite Platte keine merkliche Brechung stattfindet.

---

1) Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1890. Tafel VII und VIII.

Die Ebenen NA_1 und NA_2 sind die Schwingungs- (Polarisations-) Ebenen der ordinären Welle in der ersten und zweiten Platte. Die von der Axenebene an gerechneten Azimuthe ψ_1 und ψ_2 dieser Schwingungsebenen bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \sin\psi_1 = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\sin NA_1}, \quad \sin\psi_2 = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\sin NA_2}.$$

Ferner ist

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} \cos NA_1 &= \cos\vartheta\cos\Omega + \sin\vartheta\sin\Omega\cos\varphi, \\ \cos NA_2 &= \cos\vartheta\cos\Omega - \sin\vartheta\sin\Omega\cos\varphi. \end{aligned}$$

Das Azimuth der Schwingungsebene des Polarisators (P) bezw. des Analysators (A) sei α bezw. β, immer von der Ebene A_2A_1 an in positivem Sinne gerechnet (vergl. Fig. 2).

Die einfallende Schwingung $A\cos\tau$ wird beim Eintritt in die erste Platte zerlegt in die Componenten:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\psi_1 - \alpha)\cos\tau \text{ parallel } NA_1 \\ \text{und } \eta_1 &= A\sin(\psi_1 - \alpha)\cos\tau \text{ senkrecht zu } NA_1. \end{aligned}$$

Beim Austritt aus der ersten Platte ist:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\psi_1 - \alpha)\cos(\tau - \delta_o'), \\ \eta_1 &= A\sin(\psi_1 - \alpha)\cos(\tau - \delta_e'), \end{aligned}$$

wo δ_o', δ_e' die Verzögerungen der ordinären bezw. extraordinären Welle in der ersten Platte sind.

Diese Schwingung wird beim Eintritt in die zweite Platte zerlegt in:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1\cos(\psi_2 - \psi_1) + \eta_1\sin(\psi_2 - \psi_1) \text{ parallel zu } NA_2, \\ \eta_2 &= -\xi_1\sin(\psi_2 - \psi_1) + \eta_1\cos(\psi_2 - \psi_1) \text{ senkrecht zu } NA_2. \end{aligned}$$

Sind δ_o'', δ_e'' die Verzögerungen der ordinären und extraordinären Welle in der Richtung N in der zweiten Platte, so sind demnach die Componenten der aus der Zwillingsplatte austretenden Schwingung:

$$\begin{aligned} \xi_2' = A\{&\cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos(\tau - \delta_o' - \delta_o'') \\ &+ \sin(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_2 - \psi_1)\cos(\tau - \delta_e' - \delta_o'')\}, \\ \eta_2' = A\{&-\cos(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_2 - \psi_1)\cos(\tau - \delta_o' - \delta_e'') \\ &+ \sin(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos(\tau - \delta_e' - \delta_e'')\}. \end{aligned}$$

Nach dem Durchgang durch den Analysator resultirt schließlich die Schwingung:

$$\xi_2' \cos(\psi_2 - \beta) - \eta_2' \sin(\psi_2 - \beta),$$

deren Intensität J nun berechnet werden soll.

Dieselbe ist $= A^2(C^2 + S^2)$, wenn $\xi_2' \cos(\psi_2 - \beta) - \eta_2' \sin(\psi_2 - \beta)$ auf die Form $C\cos\tau + S\sin\tau$ gebracht ist.

Man findet:

$$\begin{aligned}
C = {} & \{\cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_o' + \delta_o'') \\
& + \sin(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_e' + \delta_o'')\}\cos(\beta - \psi_2) \\
& + \{\cos(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_1 - \psi_2)\cos(\delta_o' + \delta_e'') \\
& + \sin(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_e' + \delta_e'')\}\sin(\beta - \psi_2), \\
S = {} & \{\cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\sin(\delta_o' + \delta_o'') \\
& + \sin(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_2 - \psi_1)\sin(\delta_e' + \delta_o'')\}\cos(\beta - \psi_2) \\
& + \{\cos(\alpha - \psi_1)\sin(\psi_1 - \psi_2)\sin(\delta_o' + \delta_e'') \\
& + \cos(\alpha - \psi_1)\cos(\psi_2 - \psi_1)\sin(\delta_e' + \delta_e'')\}\sin(\beta - \psi_2).
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned}
& C^2 + S^2 = \\
& \cos^2(\beta - \psi_2)\{\cos^2(\alpha - \psi_2) - \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\psi_2 - \psi_1)(1 - \cos(\delta_o' - \delta_e'))\} \\
& + \sin^2(\beta - \psi_2)\{\sin^2(\alpha - \psi_2) + \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\psi_2 - \psi_1)(1 - \cos(\delta_o' - \delta_e'))\} \\
& + \sin 2(\beta - \psi_2)\{\cos 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\psi_1 - \psi_2)\cos(\delta_o'' - \delta_e'') \\
& + \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\cos 2(\psi_2 - \psi_1)\cos(\delta_o' - \delta_e')\cos(\delta_o'' - \delta_e'') \\
& - \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin(\delta_o' - \delta_e')\sin(\delta_o'' - \delta_e'')\}.
\end{aligned}$$

Führt man die Bezeichnungen:

$$\Delta_1 = \delta_o' - \delta_e', \quad \Delta_2 = \delta_o'' - \delta_e''$$

ein und nimmt mit obigem Ausdrucke für $C^2 + S^2$ einige weitere Umformungen vor, so erhält man für J schließlich die Formel:

$$\begin{aligned}
J = A^2 \Big\{ & \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\beta - \psi_1)\sin^2\frac{\Delta_1}{2} \\
& - \sin 2(\alpha - \psi_2)\sin 2(\beta - \psi_2)\sin^2\frac{\Delta_2}{2} \\
& - 2\sin 2(\alpha - \psi_1)\sin 2(\beta - \psi_2)\sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\frac{\Delta_2}{2}\Big(\cos\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_2}{2} - \sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\frac{\Delta_2}{2}\cos 2(\psi_2 - \psi_1)\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Die Größen Δ_1 und Δ_2, d. h. die relative Verzögerung der ordinären Welle gegen die extraordinäre in der 1. und 2. Platte, sind gegeben durch die Ausdrücke:

III.
$$\Delta_1 = 2\pi \frac{D_1 n^3}{2\lambda} \frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{v^2} \frac{\sin^2 NA_1}{\cos\vartheta} = 2\pi \frac{D_1}{\lambda}(n_e - n_o) \frac{\sin^2 NA_1}{\cos\vartheta},$$
$$\Delta_2 = 2\pi \frac{D_2 n^3}{2\lambda} \frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{v^2} \frac{\sin^2 NA_2}{\cos\vartheta} = 2\pi \frac{D_2}{\lambda}(n_e - n_o) \frac{\sin^2 NA_2}{\cos\vartheta},$$

worin ω_o, ω_e die beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten, n_o, n_e die Hauptbrechungsindices, n den mittleren Brechungsindex des Krystalles, v und λ die Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge in Luft, D_1, D_2 die Dicken der beiden Platten bezeichnen.

$\sin^2 NA_1$ und $\sin^2 NA_2$ sind mittelst der Formln II durch φ und ϑ, d. h. durch die Bestimmungsstücke der Richtung N, auszudrücken.

Bei schwach convergentem Lichte kann man ϑ und φ direkt als die Polarcoordinaten der betrachteten Stelle der Zwillingsplatte ansehen; im Allgemeinen sind $\sin\vartheta$ und φ jene Polarcoordinaten.

Im Folgenden sollen nur die beiden speciellen Fälle näher untersucht werden, daß die Nicols gekreuzt sind, also $\beta - \alpha = \pm 90^0$ ist, und zugleich die Axenebene $A_1 A_2$ entweder 0^0 und 90^0 oder $\pm 45^0$ mit den Schwingungsebenen der Nicols bildet.

Im ersten Falle, d. h. bei der Normalstellung der Platte, wird

IV.
$$J = A^2 \Big\{ \sin^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + \sin^2 2\psi_2 \sin^2 \frac{\Delta_2}{2}$$
$$+2\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin\frac{\Delta_1}{2} \sin\frac{\Delta_2}{2} \Big[\cos\frac{\Delta_1}{2} \cos\frac{\Delta_2}{2} - \sin\frac{\Delta_1}{2} \sin\frac{\Delta_2}{2} \cos 2(\psi_2 - \psi_1) \Big] \Big\},$$

dagegen im zweiten Falle, also bei der Diagonalstellung,

V.
$$J = A^2 \Big\{ \cos^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + \cos^2 2\psi_2 \sin^2 \frac{\Delta_2}{2}$$
$$+2\cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin\frac{\Delta_1}{2} \sin\frac{\Delta_2}{2} \Big[\cos\frac{\Delta_1}{2} \cos\frac{\Delta_2}{2} - \sin\frac{\Delta_1}{2} \sin\frac{\Delta_2}{2} \cos 2(\psi_2 - \psi_1) \Big] \Big\}.$$

In beiden Fällen hat J die Form

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma,$$

wo im ersten Falle

$$a = A \sin 2\psi_1 \sin\frac{\Delta_1}{2}, \quad b = A \sin 2\psi_2 \sin\frac{\Delta_2}{2},$$

im zweiten

$$a = A \cos 2\psi_1 \sin\frac{\Delta_1}{2}, \quad b = A \cos 2\psi_2 \sin\frac{\Delta_2}{2},$$

und in beiden Fällen

$$\cos\gamma = \cos\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_2}{2} - \sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\frac{\Delta_2}{2}\cos 2(\psi_2 - \psi_1)$$

ist.

Die Intensität kann $= 0$ werden nur für

$$\text{VI.} \qquad \begin{aligned} a &= +b, \quad \cos\gamma = -1, \\ \text{oder } a &= -b, \quad \cos\gamma = +1. \end{aligned}$$

Dies sind, wenn man sich ψ_1, ψ_2, Δ_1, Δ_2 mittelst der Formeln I, II und III durch ϑ und φ ausgedrückt denkt, je 2 Gleichungen zwischen ϑ und φ; es giebt also eine Anzahl von Werthepaaren ϑ, φ, für welche $J = 0$ wird. Dies bedeutet, daß es (bei Anwendung homogenen Lichtes) nicht ganz dunkle Curven, sondern nur ganz dunkle Punkte giebt, welche die Schnittpunkte der Curvensysteme mit den Gleichungen $a = \pm b$, $\cos\gamma = \mp 1$ sind.

Diese letzteren würden aber, wenn man sie als Gleichungen zwischen ϑ und φ schriebe, viel zu complicirt, um zur Discussion brauchbar zu sein. Noch weniger gestatten die Formeln die Untersuchung der Curven constanter Intensität, welche übrigens auch für die Ableitung der wahrgenommenen Erscheinungen nicht wesentlich ist. —

Bevor die beiden Fälle der Normalstellung und der Diagonalstellung getrennt näher betrachtet werden, sei bemerkt, daß, wie die Formeln IV und V zeigen, bei gekreuzten Nicols immer vollkommene Dunkelheit herrscht in den Schnittpunkten derjenigen beiden Curvensysteme, für welche

$$\sin\frac{\Delta_1}{2} = 0, \text{ also } \frac{\Delta_1}{2} = h\pi$$

$$\text{bezw. } \sin\frac{\Delta_2}{2} = 0, \text{ also } \frac{\Delta_2}{2} = k\pi$$

ist. Dies sind diejenigen Curven, welche in jeder einzelnen Platte ganz dunkel erscheinen würden; sie mögen daher im Folgenden als das erste und zweite „primäre“ Curvensystem bezeichnet werden.

Die Gleichung des ersten von ihnen ist

$$\frac{\sin^2 NA_1}{\cos\vartheta} = \frac{h}{c}, \text{ wo } c = \frac{D_1}{\lambda}(n_o - n_e) \text{ ist, oder}$$

$$\sin^2\Omega+\cos^2\Omega\sin^2\vartheta-\sin^2\Omega\cos^2\varphi\sin^2\vartheta-\tfrac{1}{2}\sin 2\Omega\sin 2\vartheta\cos\varphi=\frac{h}{c}\cos\vartheta.$$

Man kann $\sin\vartheta\cos\varphi$ und $\sin\vartheta\sin\varphi$ als rechtwinklige Coordinaten x und y eines Punktes des Gesichtsfeldes betrachten, indem man sich die Erscheinung auf eine Ebene im Abstande 1 vom Divergenzpunkt der Strahlen projicirt denkt; ferner kann man, wenn, wie künftig immer vorausgesetzt werden soll, nicht sehr stark convergentes Licht angewendet wird,

$$\frac{1}{\cos\vartheta}=1+\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta=1+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$

setzen, wodurch man für die der ersten Platte zugehörigen primären dunklen Curven näherungsweise folgende Gleichung erhält:

$$\sin^2\Omega(1+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2))+\cos^2\Omega(x^2+y^2)-\sin^2\Omega\cdot x^2-\sin 2\Omega\cdot x=\frac{h}{c},$$

$$x^2(\cos^2\Omega-\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)+y^2(\cos^2\Omega+\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)-x\sin 2\Omega=\frac{h}{c}-\sin^2\Omega.$$

Diese Gleichung stellt eine Schaar ähnlicher und concentrischer Curven zweiten Grades dar, deren gemeinsamer Mittelpunkt weder mit dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes, noch mit dem Axenaustrittspunkte zusammenfällt, aber im Hauptschnitte (auf der X-Axe) liegt. Die Curven sind:

Ellipsen, wenn $\Omega<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ oder $<54^\circ 44'$ ist,

Parabeln, wenn $\Omega=\operatorname{arctg}\sqrt{2}=54^\circ 44'$ ist,

Hyperbeln, wenn $\Omega>\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ ist.

Das Axenverhältniß der Ellipsen ist $=\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega}{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega}}$,

der durch die X-Axe halbirte Asymptotenwinkel der Hyperbeln

$$=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega-1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Omega+1}}.$$

Diese Curven sind bereits von Ohm, van der Willigen und Bertin discutirt worden.

Das der zweiten Platte angehörende primäre Curvensystem geht bei gleicher Dicke der Platten aus dem primären Curvensysteme der ersten Platte natürlich durch eine Drehung von 180° um die Plattennormale hervor; dementsprechend hat Ω entgegengesetztes Vorzeichen.

Für die weitere Untersuchung ist es nützlich, die Formeln IV und V umzugestalten, indem man in dieselben einsetzt

$$2\sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\frac{\Delta_2}{2}\cos\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_2}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - \sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right),$$

$$2\sin^2\frac{\Delta_1}{2}\sin^2\frac{\Delta_2}{2} = \sin^2\frac{\Delta_1}{2} + \sin^2\frac{\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

und nun die Glieder mit $\sin^2\frac{\Delta_1}{2}$, bezw. $\sin^2\frac{\Delta_2}{2}$, $\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$ und $\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$ zusammenfaßt. Die Formeln IV und V nehmen dann die Form an[1]):

$$\text{VII.}\quad J = J_0\left\{a_1\sin^2\frac{\Delta_1}{2} + a_2\sin^2\frac{\Delta_2}{2} + b_1\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + b_2\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right\};$$

darin ist J_0 für A^2 gesetzt und, wie sich nach einigen einfachen Umformungen ergiebt, für die Normalstellung

$$\text{VIII.}\quad \left|\begin{array}{l} a_1 = a_1^0 = \sin 2\psi_1\cos 2\psi_2\sin 2(\psi_1-\psi_2), \\ a_2 = a_2^0 = \sin 2\psi_2\cos 2\psi_1\sin 2(\psi_2-\psi_1), \\ b_1 = b_1^0 = \sin 2\psi_1\sin 2\psi_2\cos^2(\psi_2-\psi_1), \\ b_2 = b_2^0 = -\sin 2\psi_1\sin 2\psi_2\sin^2(\psi_2-\psi_1), \end{array}\right.$$

dagegen für die Diagonalstellung

$$\text{IX.}\quad \left|\begin{array}{l} a_1 = a_1' = \sin 2\psi_2\cos 2\psi_1\sin 2(\psi_2-\psi_1) = a_2^0, \\ a_2 = a_2' = \sin 2\psi_1\cos 2\psi_2\sin 2(\psi_1-\psi_2) = a_1^0, \\ b_1 = b_1' = \cos 2\psi_1\cos 2\psi_2\cos^2(\psi_2-\psi_1), \\ b_2 = b_2' = -\cos 2\psi_1\cos\psi_2\sin^2(\psi_2-\psi_1). \end{array}\right.$$

Aus dieser Darstellung von J als Summe von 4 Gliedern geht hervor, daß man die ganze Erscheinung auffassen kann als Superposition von 4 Curvensystemen, deren Intensitäten gegeben sind durch

$$a_1\sin^2\frac{\Delta_1}{2},\ a_2\sin^2\frac{\Delta_2}{2},\ b_1\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2},\ b_2\sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}.$$

Diese Superposition hat indessen im Allgemeinen nur mathematische Bedeutung, da von den Größen a_1, a_2, b_1, b_2 immer zwei negativ sind. Wenn aber z. B. eine der Größen a_1, a_2, b_1, b_2 nahe $= 1$ ist, während die drei anderen sehr klein sind, so kann man schließen, daß dasjenige Curvensystem, dessen Intensität jene erstere Größe als Faktor enthält, allein wahrnehmbar sein muß. Da nun immer je drei der Größen a_1, a_2, b_1, b_2 einen Faktor ge-

1) Ohm, Art. XXXVI, XXXVII.

meinsam haben, so giebt es in der That im Allgemeinen solche Stellen des Gesichtsfeldes, wo nur eine der vier Größen von 0 verschieden und folglich nur eines der vier Curvensysteme sichtbar ist. Bevor hierauf näher eingegangen wird, sollen aber jene vier Curvensysteme, welche überhaupt auftreten können, untersucht werden. Die dunklen Curven, mit den Gleichungen

$$\sin\frac{\Delta_1}{2} = 0 \text{ und } \sin\frac{\Delta_2}{2} = 0$$

sind die bereits oben discutirten beiden „primären" Curvensysteme.

Das dritte Curvensystem ist gegeben durch

$$\sin\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \text{Const.}$$

und möge das secundäre Curvensystem erster Art genannt werden. Die Gleichung der Curven dieses Systems ist in rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2(\cos^2\Omega-\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)+y^2(\cos^2\Omega+\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)-x\frac{D_1-D_2}{D_1+D_2}\sin 2\Omega = C-\sin^2\Omega;$$

speciell für die dunklen Curven ist $C = h\,\frac{\lambda}{D_1+D_2}\cdot\frac{1}{n_e-n_o}$.

Diese Gleichung gilt in derselben Annäherung, wie die oben für die primären Curven angegebene, und unterscheidet sich von der letzteren nur durch den Faktor von x und die Größe von C. Die Curven des secundären Systems erster Art unterscheiden sich demnach von den primären Curven nur durch die Lage des Mittelpunktes und die absolute Größe[1]). Ist $D_1 = D_2$, sind also die Platten gleich dick, so fällt der Mittelpunkt der Curven mit demjenigen des Gesichtsfeldes zusammen, da dann das lineare Glied verschwindet. In dem Grenzfalle $\Omega = 54^0\,44'$, wo der Coefficient von x^2 verschwindet, werden dann die Curven keine Parabeln, sondern

1) Daß in den Fig. 3 u. 5, Tafel VII, in Liebisch's „Physikalischer Krystallographie" die primären Curven noch sehr kreisähnlich erscheinen, während die secundären Curven erster Art deutlich elliptisch sind, rührt wohl von der Verzerrung der ersteren in Folge ihrer Lage nahe dem Rande des Gesichtsfeldes her.

gerade Linien, welche der die beiden Axen enthaltenden Ebene parallel sind[1]).

Das Curvensystem, welches durch

$$\sin\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = \text{Const.}$$

gegeben ist, möge das secundäre zweiter Art genannt werden.

Die Gleichung desselben ist

$$x^2(\cos^2\Omega-\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)+y^2(\cos^2\Omega+\tfrac{1}{2}\sin^2\Omega)-x\frac{D_1+D_2}{D_1-D_2}\sin 2\Omega = C'-\sin^2\Omega,$$

wo $C' = h\,\frac{\lambda}{D_1-D_2}\,\frac{1}{n_o-n_e}$ ist für die dunklen Curven.

Demnach unterscheiden sich auch diese Curven von den primären nur durch die Lage des Mittelpunktes auf der x-Axe.

Wird aber $D_1 = D_2$, so rückt der Mittelpunkt in unendliche Entfernung und die Gleichung der Curven wird

$$x = -\frac{C''}{\sin 2\Omega},$$

wo für die dunklen Curven

$$C' = h\,\frac{\lambda}{D_1+D_2}\,\frac{1}{n_o-n_e} = C$$

ist. Bei gleicher Dicke der beiden Platten sind also die secundären Curven zweiter Art immer zur Axenebene senkrechte gerade Linien; die Größe des Winkels Ω hat nur auf den gegenseitigen Abstand der dunklen Streifen Einfluß; sie sind um so gedrängter, je größer Ω ist[2]).

Es soll nun erörtert werden, welche Erscheinungen in den beiden Fällen der Normal- und Diagonalstellung an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes auftreten. Diese Untersuchung muß sich indessen auf die gesonderte Betrachtung solcher Stellen des Gesichtsfeldes beschränken, wo ψ_1, ψ_2 oder $\psi_2-\psi_1$ be-

---

1) Diesen Fall hat Ohm besonders hervorgehoben; die obige Gleichung nebst einer Discussion für den Fall $D_1 = D_2$ findet sich in der angeführten Abhandlung Bertin's S. 501—503.

2) Diese parallelen Streifen hat für den speciellen Fall $\Omega = 45°$ van der Willigen berechnet; Ohm und Bertin erwähnen ihr Auftreten, ohne dasselbe zu erklären; Bertin nennt sie „franges de Delezenne."

stimmte als constant anzusehende Werthe haben; denn die allgemeine Discussion der Formeln für J würde sehr umständlich sein und wahrscheinlich auch wenig anschauliche Resultate liefern.

I. Normalstellung.

Es war gefunden (Formeln VII und VIII)

$$J = J_0 \left\{ a_1^0 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + a_2^0 \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} + b_1^0 \sin^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + b_2^0 \sin^2 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned} a_1^0 &= \sin 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin 2(\psi_1 - \psi_2), \\ a_2^0 &= \sin 2\psi_2 \cos 2\psi_1 \sin 2(\psi_2 - \psi_1), \\ b_1^0 &= \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \cos^2(\psi_2 - \psi_1), \\ b_2^0 &= -\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin^2(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned}$$

1. Zunächst ist ersichtlich, daß a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0 sämmtlich verschwinden, wenn $\psi_1 = 0$ oder 180^0 und mithin zugleich $\psi_2 = 0$ oder 180^0 ist, was auf der X-Axe eintritt; demnach erscheint ein durch den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes gehender, der Axenebene paralleler, schwarzer Balken, welcher um so breiter ist, je größer die Neigung Ω ist[1]).

2. Für $\psi_2 = \pm 90^0$ ist nur $a_1^0 = \sin^2 2\psi_1$, und für $\psi_1 = \pm 90^0$ nur $a_2^0 = \sin^2 2\psi_2$ von 0 verschieden; folglich sind auf den zur Axenebene senkrechten Linien, welche die dunklen Balken der zweiten bezw. ersten primären Interferenzfigur sein würden, nur das erste bezw. zweite primäre Curvensystem sichtbar, und zwar mit einer Intensität der hellen Curven, welche mit der Entfernung von den Axenpunkten wächst. In letzteren selbst ist jene Intensität 0 und auch auf einer beträchtlichen Strecke seitwärts noch sehr gering, und da dies die Intensität der hellsten Curven ist, so müssen die betrachteten Balken der primären Kreuze relativ dunkel erscheinen, namentlich in der Nähe der Axenpunkte. — Diese Erscheinung kommt natürlich nur dann in Betracht, wenn Ω so klein ist, daß die optischen Axen im Gesichtsfelde austreten[2]).

3. Für $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0$ bleibt nur $b_2^0 = \sin^2 2\psi_1$ übrig.

Es ist nun $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0$ auf demjenigen Kreise, welcher durch die Axenpunkte geht und deren Ver-

---

1) Vergl. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Tafel VII, Fig. 3, 5 und VIII, 1, 3. — Schematische Fig. 3, a; 4, a.

2) Liebisch, Phys. Kryst., Tafel VII, Fig. 3. — Schematische Fig. 3, b.

bindungslinie zum Durchmesser hat. Auf diesem Kreise und in seiner nächsten Umgebung ist also das secundäre Curvensystem zweiter Art allein vorhanden[1]). Die Intensitätsmaxima sind am größten $= J_0$ an denjenigen Stellen, welche auf dem zur Axenebene senkrechten Durchmesser liegen; dort ist auch bei nahezu gleicher Dicke der Platten $\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$ für einen der Streifen $= 0$, und es sind daher an diesen Stellen im weißen Lichte farbige geradlinige Streifen sichtbar. Eine Krümmung dieser Streifen deutet auf einen Dickenunterschied der beiden Platten hin. — Der Fall, daß nur b_1^0 von 0 verschieden ist, ist bei der Normalstellung nicht möglich; daher können keine ganz dunklen Curven des secundären Systems erster Art auftreten. Es soll nun untersucht werden, welche Erscheinung in der Nähe des schwarzen Balkens und des eben erwähnten Kreises wahrzunehmen sein muß.

4. Für die dem schwarzen Balken benachbarten Stellen in der Mitte des Gesichtsfeldes kann man setzen

$$\psi_1 = \pm (180^0-\varepsilon),\ \psi_2 = \pm \varepsilon,$$

unter ε einen kleinen Winkel verstanden.

Dann wird

$$a_1^0 = a_2^0 = 8\varepsilon^2,\ b_2^0 = -16\varepsilon^4,\ b_1^0 = -4\varepsilon^2,$$

man kann daher b_2^0 vernachlässigen und erhält

$$J = J_0 4\varepsilon^2 \left\{2\sin^2\frac{\Delta_1}{2} + 2\sin^2\frac{\Delta_2}{2} - \sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right\}$$

$$= J_m \left\{\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_1}{2} + \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{4}\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right\}.$$

Für $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = (2h+1)\frac{\pi}{2}$ wird

$$J = J_m \left\{\tfrac{1}{2}\sin^2\frac{\Delta_1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos^2\frac{\Delta_1}{2} - \tfrac{1}{4}\right\} = \tfrac{1}{4} J_m;$$

es sind also Curven des secundären Systems erster Art vorhanden, auf welchen die Intensität constant $= \frac{1}{4}$ der

1) Liebisch, Phys. Kryst., T. VII, 3. — Schematische Fig. 3, c.

Maximalintensität ist, und welche daher als relativ dunkle continuirliche Curven sichtbar sein müssen[1]).

Auf den zwischen denselben liegenden secundären Curven erster Art:

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = h\pi$$

ist

$J = J_m \sin^2\frac{\Delta_1}{2}$ oder $= J_m \sin^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}$ für gerades h, $= J_m \cos^2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}$ für ungerades h. Auf diesen Curven wechselt daher J zwischen 0 und J_m und zwar in der Weise, daß die Strecken, wo $0 < J < \frac{1}{2} J_m$, und diejenigen, wo $\frac{1}{2} J_m < J < J_m$ ist, gleich breit sind. Rechnet man, daß diejenigen Stellen als dunkle erscheinen, wo $J < \frac{1}{4} J_m$ ist, so sind demnach die dunklen Strecken auf den secundären Curven erster Art schmaler als die hellen.

Für $\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = 2h\pi$ wird

$$J = J_m\left(\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{4} - \tfrac{1}{4}\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right) = J_m \sin^4\frac{\Delta_1+\Delta_2}{4},$$

und für $\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = (2h+1)\pi$

$$J = J_m \cos^4\frac{\Delta_1+\Delta_2}{4}.$$

Hieraus folgt, daß die gleich langen Stücke, welche durch die Curven constanter Intensität $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}\pi$ auf den secundären Curven zweiter Art $\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = h\pi$ abgeschnitten werden, abwechselnd dunkel (von einer Intensität zwischen 0 und $\frac{1}{4} J_m$) und hell (von einer Intensität zwischen $\frac{1}{4} J_m$ und J_m) sind. Da nun die secundären Curven zweiter Art diejenigen erster Art in der Mitte des Gesichtsfeldes nahezu senkrecht schneiden (— gleiche Dicken der Platten vorausgesetzt —), und da ferner die ersteren viel geringere gegenseitige Abstände haben, als die letzteren (— weil $\Delta_1+\Delta_2$ im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes ein Minimum hat, $\Delta_1-\Delta_2$ aber nicht —), so wird die wahrgenommene Erscheinung im We-

1) Liebisch, Phys. Kryst., T. VII, Fig. 3, 5 und VIII, 1, 3. — Schemat. Fig. 4, b; diese und Fig. 6 sind für den speciellen Fall gezeichnet, wo die secundären Curven 1. Art zur Axenebene parallele Gerade sind.

sentlichen aus den relativ dunklen continuirlichen secundären Curven erster Art und aus zwischen denselben liegenden dunklen Flecken bestehen, welche etwa wie die dunklen Felder eines Schachbrettes angeordnet sind, aber in der zur Axenebene senkrechten Richtung gestreckt erscheinen[1]).

Wenn der Winkel Ω groß ist, etwa $> 45^0$, so sind im ganzen Gesichtsfelde ψ_1 und ψ_2 wenig von $\pm 180^0$ bezw. 0^0 verschieden, und die beschriebene Erscheinung ist daher im ganzen Gesichtsfelde allein wahrzunehmen; der schwarze Balken ist dann sehr breit wegen der langsamen Aenderung von ψ_1 und ψ_2 beim Fortschreiten nach den Seiten hin. Dies gilt also immer, wenn die secundären Curven erster Art sehr gestreckte Ellipsen oder Hyperbeln sind[2]).

5. An denjenigen Stellen des Gesichtsfeldes, welche in der Nachbarschaft des oben erwähnten, durch die Axenpunkte gehenden Kreises liegen, ist, $\psi_2 - \psi_1$ wenig von 90^0 verschieden, und man kann, wenn $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0 \pm \varepsilon$ gesetzt wird, nach Potenzen von ε entwickeln.

Dann wird

$$a_1^0 = \mp \sin 2\psi_1 \cos(2\psi_1 \pm 2\varepsilon)\cdot 2\varepsilon = \mp \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 + 4\varepsilon^2 \sin^2 2\psi_1,$$

$$a_2^0 = \pm \cos 2\psi_1 \sin(2\psi_1 \pm 2\varepsilon)\cdot 2\varepsilon = \pm \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 + 4\varepsilon^2 \cos^2 2\psi_1,$$

$$b_1^0 = -\sin^2 2\psi_1 \cdot \varepsilon^2,$$

$$b_2^0 = \sin 2\psi_1 \sin(2\psi_1 \pm 2\varepsilon)\cdot(1-\varepsilon^2) = \sin^2 2\psi_1 \pm \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 - 2\varepsilon^2 \sin^2 2\psi_1,$$

$$J = J_0 \Big\{ \sin^2 2\psi_1 (1 \pm 2\varepsilon \cos 2\psi_1 - 2\varepsilon^2 \sin 2\psi_1)\cdot \sin^2 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}$$

$$\mp \varepsilon \cdot \sin 4\psi_1 \left(\sin^2 \frac{\Delta_1}{2} - \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} \right)$$

$$+ \varepsilon^2 \left(4\sin^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + 4\cos^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} - \sin^2 2\psi_1 \sin^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \right) \Big\}.$$

Nun ist $\sin^2 \frac{\Delta_1}{2} - \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} = \sin \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \sin \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$, folglich verschwindet das Glied mit ε auf den secundären Curven zweiter Art, für welche $\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} = h\pi$ ist, und die Intensität auf diesen Curven wird durch das Glied mit ε^2 allein gegeben, welches

---

1) Vergl. die Mitte der Fig. 3, 5, Tafel VII, in Liebisch, Phys. Kryst. — Schemat. Fig. 4.

2) Liebisch, Phys. Kryst., VIII, 1 u. 3.

für das betrachtete Gebiet sehr klein ist. Daraus folgt, daß die secundären Curven zweiter Art auf einer ziemlich beträchtlichen Strecke zu beiden Seiten des mehrerwähnten Kreises noch merklich ganz dunkel erscheinen[1]).

6. Um zu sehen, wie der Uebergang von der unter 4) beschriebenen Erscheinung zu den ganz dunklen secundären Curven zweiter Art stattfindet, werde noch diejenige Stelle betrachtet, wo $\psi_1 = 180^0 - 22\frac{1}{2}^0$, $\psi_2 = 22\frac{1}{2}^0$ ist. Es wird

$$a_1^0 = \tfrac{1}{2},\ a_2^0 = \tfrac{1}{2},\ b_1^0 = -\tfrac{1}{2},\ b_2^0 = +\tfrac{1}{2},$$

$$J = \tfrac{1}{2} J_0 \left\{ \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} \right\}.$$

Man erhält daher

$$\text{für } \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}$$

$$J = \tfrac{1}{4} J_0 \left(1 + \sin^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right);$$

die Curven $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$ haben also nicht mehr constante, sondern eine zwischen $\frac{1}{4}J_0$ und $\frac{1}{2}J_0$ wechselnde Intensität, so daß sie für die Wahrnehmung nicht mehr so stark wie im Falle 4) hervortreten.

Ferner wird

$$\text{für } \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = 2h\pi \qquad J = J_0 \sin^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{4} \left(1 + \cos^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}\right),$$

$$\text{für } \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = (2h+1)\pi \quad J = J_0 \cos^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{4} \left(1 + \sin^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}\right),$$

woraus folgt, daß beim Fortschreiten längs der Curven

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = h\pi$$

von einem dunklen Punkte aus die Intensität jetzt schneller zunimmt, als im Falle 4, so daß die dunklen Stücke der Curven $\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = h\pi$ in der Richtung der secundären Curven erster Art noch schmaler erscheinen, als dort. Endlich ist:

$$\text{für } \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = 2h\pi \qquad J = J_0 \sin^4 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2},$$

---

1) l. c. T. VII, Fig. 3. — Schemat. Fig. 3, c.

$$\text{für } \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = (2h+1)\pi \qquad J = J_0 \cos^4 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2};$$

für den Wechsel der Intensität auf den secundären Curven zweiter Art gilt also das unter 4) Gesagte.

Bei der Beobachtung werden demnach an der jetzt untersuchten Stelle des Gesichtsfeldes nur die isolirt liegenden dunklen Stücke der secundären Curven zweiter Art auffallen [1]).

7. Endlich ist noch zu erwähnen, daß für $\psi_1 = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ und von $\pm 180^0$ wenig verschiedene Werthe von ψ_2 a_1^0 stark überwiegt, ebenso a_2^0 für kleines ψ_1 und $\psi_2 = \pm 45^0$, $\pm 135^0$, woraus folgt, daß das erste bezw. zweite primäre Curvensystem in der Nähe des ersten bezw. zweiten Axenpunktes in der Mitte der zwischen den primären dunklen Kreuzen liegenden Sectoren stark hervortritt [2]).

II. Diagonalstellung.

Es wurde gefunden

$$J = J_0 \left\{ a_1' \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + a_2' \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} + b_1' \sin^2 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + b_2' \sin^2 \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned} a_1' &= \sin 2\psi_2 \cos 2\psi_1 \sin 2(\psi_2-\psi_1), \\ a_2' &= \sin 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin 2(\psi_1-\psi_2), \\ b_1' &= \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \cos^2(\psi_2-\psi_1), \\ b_2' &= -\cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \sin^2(\psi_2-\psi_1). \end{aligned}$$

1. Für die Axenebene, wo $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pm 180^0$ ist (oder $\psi_1 = \psi_2 = 0$ oder 180^0), ist nur b_1' von 0 verschieden und zwar nahe $= 1$; es ist dort folglich das ungestörte secundäre Curvensystem erster Art sichtbar, und zwar mit der größten möglichen Intensität [3]).

2. Für $\psi_1 = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ ist nur $a_2' = \cos^2 2\psi_2$ von 0 verschieden, ebenso für $\psi_2 = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ nur $a_1' = \cos^2 2\psi_1$. Dies tritt ein auf den Balken der Kreuze, welche in der von der ersten bezw. zweiten Platte herrührenden primären Interferenzfigur schwarz erscheinen würden. Auf diesen Balken tritt also das zweite bezw. erste primäre Curvensystem

---

1) l. c. VII, 3; äußere Partieen von VIII, 1. — Schemat. Fig. 3, d.
2) l. c. T. VIII, 1, 3. — Schemat. Fig. 3, e.
3) l. c. am besten in Fig. 6, T. VII und Fig. 4, T. VIII. — Schemat. Fig. 5, a.

allein auf [1]), wobei die Intensität der hellen Curven nach den Axenpunkten hin zunimmt.

An denjenigen Stellen, wo $\psi_1 = \pm 135^0$, $\psi_2 = \pm 45^0$ ist, wo sich also je 2 Arme der primären Kreuze schneiden, wird $J = 0$, dort befinden sich also 2 absolut dunkle Punkte, deren Umgebungen wegen der langsamen Aenderung von ψ_1 und ψ_2 als zwei ziemlich ausgedehnte dunkle Flecke erscheinen [2]).

3. Für $\psi_2 - \psi_1 = \pm 90^0$, also auf dem durch die Axenpunkte gehenden Kreise, bleibt nur $b_2' = \cos^2 2\psi_1$ übrig; dort ist also das secundäre Curvensystem zweiter Art allein sichtbar, wie im Falle I, nur mit dem Unterschiede, daß die Maximalintensität jetzt nach den Axenpunkten hin zunimmt [3]).

4. In der Mitte des Gesichtsfeldes auf beiden Seiten der X-Axe ist $\psi_1 = \pm (180^0 - \varepsilon)$, $\psi_2 = \pm \varepsilon$, wo ε ein kleiner Winkel ist; es wird daher

$$a_1' = a_2' = 8\varepsilon^2, \quad b_2' = -4\varepsilon^2, \quad b_1' = 1 - 8\varepsilon^2.$$

Da b_1' stark überwiegt, so sind die secundären Curven erster Art, für welche $\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = h\pi$ ist, noch als relativ dunkle Curven vorhanden, aber die Intensität ist auf denselben nicht mehr constant $= 0$, sondern

$$= 16\varepsilon^2 J_0 \left\{ \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} - \tfrac{1}{4} \sin^2 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \right\}$$

$$\text{oder} = 16\varepsilon^2 J_0 \sin^4 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4} \text{ für gerades } h,$$

$$= 16\varepsilon^2 J_0 \cos^4 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \text{ für ungerades } h.$$

Jede der erwähnten relativ dunklen Curven wird demnach durch die secundären Curven zweiter Art

---

1) l. c. VII, 4 u. 6. Die nach den Axenpunkten hin convergirenden relativ dunklen Büschel fallen nicht mit den Balken der primären Kreuze zusammen. — Schemat. Fig. 5, b.

2) l. c. VII, 4, 6. — Schemat. Fig. 5, c.

3) Schemat. Fig. 5, d. — l. c. VII, 4, 6, in letzterer Fig. nur ganz schwach sichtbar. Die scheinbare Unregelmäßigkeit der Curven in der Nähe der Axenpunkte, welche in Fig. VII, 4 auffällt, rührt daher, daß die Regionen, in welchen entweder nur ein primäres oder nur eines der beiden secundären Curvensysteme allein sichtbar ist, in den Axenpunkten zusammentreffen.

$$\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}\pi$$

in abwechselnd hellere und dunklere Stücke getheilt; auf den dunklen ist $4\varepsilon^2 J_0 > J > 0$, auf den helleren $16\varepsilon^2 J_0 > J > 4\varepsilon^2 J_0$. Die relativ dunklen secundären Curven erster Art erscheinen also durch hellere Stellen unterbrochen[1]), und diese Unterbrechung wird schon in geringer Entfernung von der X-Axe merklich, weil $16 J_0 \varepsilon^2$ die Maximalintensität ist.

Die Curven $\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2}\pi$ erscheinen noch ziemlich gleichmäßig hell, solange $16\varepsilon^2$ klein gegen 1 ist, da dann $1-8\varepsilon^2$ gegenüber den drei variabeln Gliedern überwiegt. Beim Fortschreiten auf einer Curve

$$\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} = \text{Const.}$$

ändert sich die Intensität ungefähr wie $\sin^2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$; hieraus und aus dem durch $\sin^4\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}$ bezw. $\cos^4\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}$ gegebenen Gesetze der Helligkeitsänderung längs der secundären Curven erster Art folgt, daß die dunklen Flecke viel weniger in der Richtung normal zur X-Axe gestreckt erscheinen, als bei der Normalstellung, und daß sie in größerer Entfernung von der Axenebene, wo der Abstand der secundären Curven erster Art im Verhältniß zu dem der secundären Curven zweiter Art nicht mehr so groß ist, sogar tangential zu den secundären Curven erster Art gestreckt erscheinen[2]). — Dies ist die bei großem Ω im ganzen Gesichtsfelde auftretende Erscheinung. Wird Ω nahe $= 90^0$, so erscheinen die Hyperbeln erster Art höchstens noch am äußersten Rande des Gesichtsfeldes unterbrochen und die Erscheinung unterscheidet sich von derjenigen, welche eine einfache Platte, die unter dem Winkel Ω gegen die optische Axe geschnitten ist, darbietet, nur noch durch die centrische Lage der Hyperbeln[3]).

5. Für die dem unter 3) erwähnten Kreise benachbarten Stellen gilt das im Falle I, 5) Gesagte; doch sind bei der Diagonalstellung die secundären Streifen zweiter Art weniger

---

1) Schemat. Fig. 5, e und 6.
2) l. c. VII, 6 und VIII, 2, 4. — Schemat. Fig. 6.
3) l. c. VIII, 5 und 6.

gut wahrnehmbar, als bei der Normalstellung, weil gerade dort, wo sonst jene Streifen am besten sichtbar sind, die unter 2) erwähnten dunklen Flecke liegen.

6. Für diejenigen Stellen, wo $\psi_1 = \pm (180^0 - 22\frac{1}{2}^0)$, $\psi_2 = \pm 22\frac{1}{2}^0$ ist, erhält man

$$a_1' = a_2' = \tfrac{1}{2}, \quad b_1' = \tfrac{1}{4}, \quad b_2' = -\tfrac{1}{4},$$

$$J = \tfrac{1}{2} J_0 \left\{ \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} + \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} + \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \tfrac{1}{2} \sin^2 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \right\}.$$

Diese Formel geht aus der für den Fall I, 6) angegebenen dadurch hervor, daß man $\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$ mit $\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}$ vertauscht; die Betrachtungen, welche unter I, 6) angestellt wurden, werden also hier zutreffen, wenn man das zweite und erste secundäre Curvensystem mit einander vertauscht. Folglich unterscheidet sich die Interferenzfigur von der unter I, 6) beschriebenen nur dadurch, daß die Längsrichtung der dunklen Flecke oder Striche mehr tangential als normal zu den secundären Curven erster Art liegt, und daß statt der relativ dunklen Curven erster Art solche der zweiten Art auftreten[1]), nämlich die Curven

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} = \frac{2h+1}{2} \pi,$$

auf welchen $J = J_0 \dfrac{1 + \sin^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}{4}$ ist, also zwischen $\frac{J_0}{4}$ und $\frac{J_0}{2}$ variirt.

Der Uebergang dieser Interferenzfigur in die secundären Streifen zweiter Art wird bei der Diagonalstellung nicht gut zu verfolgen sein, weil bei wachsender Entfernung vom Centrum J_0 bald sehr abnimmt, indem man sich den dunklen Flecken nähert.

---

1) Aeußere Partieen der Fig. 2, T. VIII, l. c. — Schemat. Fig. 6, a.

Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1890. № 7. S. 259.

Fig. 1.

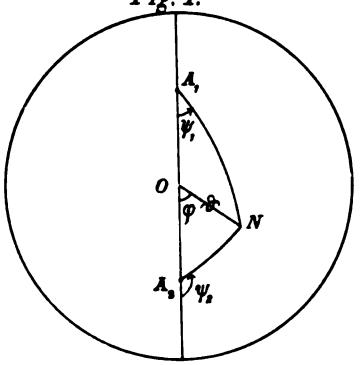


Fig. 2.

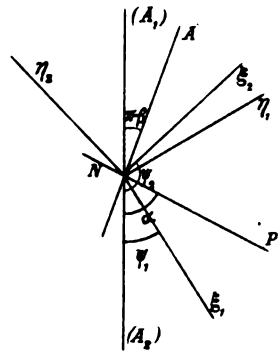


Fig. 3.

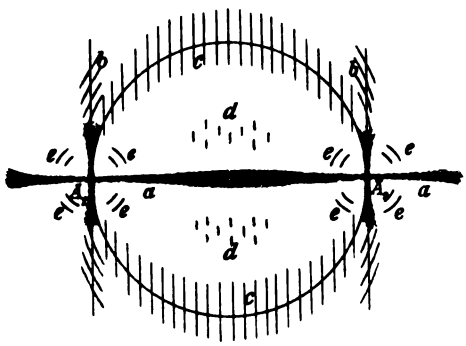


Fig. 4.

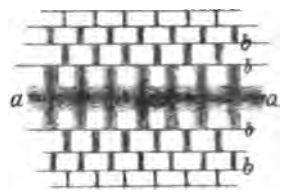


Fig. 5.

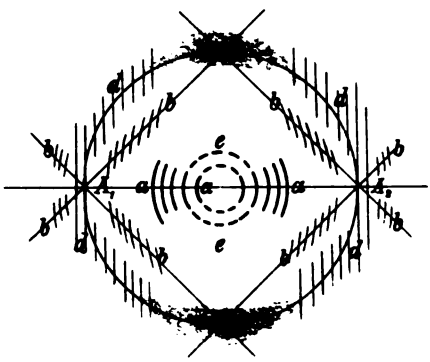
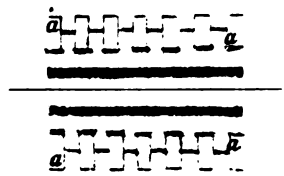
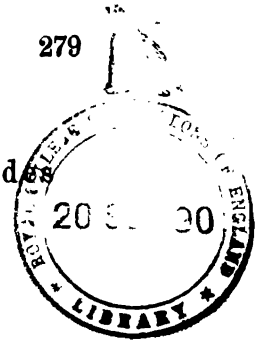


Fig. 6.



A. W. Pistor Nachfl. Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND
20 SEP 90
LIBRARY



Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des brasilianischen Turmalines.

Von

W. Voigt.

Die bekannten Eigenschaften des Turmalines, durch Temperatur- oder Druckänderung electrisch erregt zu werden, geben den Bestimmungen seiner Elasticitäts-Constanten ein ganz besonderes Interesse, denn offenbar ist ihre Kenntniß für die genaue Beurtheilung der bei Compression oder Erwärmung in ihm auftretenden Deformationen und Spannungen nothwendig. Außerdem verspricht ihre Kenntniß einige Aufklärung darüber, ob die Polarität der Moleküle, welche wir zur Erklärung der elastischen Erscheinungen annehmen müssen, eine electrische ist, insofern sie in diesem Falle bei hervorragend pyroelectrischen Krystallen sich auch mit besonderer Stärke geltend machen müßte.

Geleitet durch diese Ueberlegungen habe ich schon seit Jahren versucht, für die Elasticitätsbeobachtungen genügendes Material von Turmalin zu beschaffen, aber erst vor Kurzem ist mir solches durch Vermittelung von Herrn C. F. Pech in Berlin zugegangen.

Der sehr kostbare Turmalinkrystall, den ich ihm verdanke, stammt aus Brasilien und maß bei einer Länge von ca. 9 cm nahe 3 cm in der Dicke; beide Enden waren verbrochen, die Seitenflächen durch abwechselndes Auftreten des trigonalen und hexagonalen Prismas in bekannter Weise gestreift; der Querschnitt zeigte ungefähr ein gleichseitiges Dreieck. Die Farbe des Krystalls war tiefgrün und in großen Strecken völlig homogen; in anderen deutete ein leichter Wechsel derselben auf schaaligen Aufbau in der Richtung der Hauptaxe. Sprünge waren leider mehrfach verhanden und konnten wegen der dunkeln Färbung erst wahrgenommen werden, nachdem der Krystall in Platten resp. in Stäbchen zerlegt war; sie ließen sich demgemäß also nur mit Schwierigkeit vermeiden.

Die zur Beobachtung benutzten Prismen hat Herr Dr. W. Steeg und Reuter in Bad Homburg angefertigt.

Den Krystall denke ich mir wie gewöhnlich aufgestellt, wähle die Hauptaxe zur Z-Axe, eine Symmetrieebene zur YZ-Ebene und lasse die $+Y$-Axe aus einer um die $+Z$-Richtung gelagerten Fläche des Rhomboëders $+R$ austreten. Bezeichne ich dann die Richtungs-

cosinus der Länge L, Breite B, Dicke D des zu betrachtenden rechtwinkligen Prismas nach dem folgenden Schema

	X	Y	Z
L	α	β	γ
B	α_1	β_1	γ_1
D	α_2	β_2	γ_2

so ist die Bezeichnung und Orientirung der benutzten Gattungen von Stäbchen durch folgende Zusammenstellung gegeben

$$\begin{aligned}
&\text{I}(0^0) && \alpha = \beta = 0,\ \gamma = 1,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0;\\
&\text{I}(+45^0) && \alpha = 0,\ \beta = \gamma = 1/\sqrt{2},\ \gamma_1 = 0;\\
&\text{I}(-45^0) && \alpha = 0,\ -\beta = +\gamma = 1/\sqrt{2},\ \gamma_1 = 0;\\
&\text{II}(90^0) && \alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1;\\
&\text{II}'(90^0) && \alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_1 = 1.
\end{aligned}$$

Hierbei deutet I auf die Lage der Längsaxe im ersten Hauptschnitt, nämlich der Symmetrieebene, II auf die Lage im zweiten zum ersten normalen Hauptschnitt.

Bezüglich der für rhomboëdrisch-hemiëdrische Krystalle gültigen Formeln — welche auch auf den hemimorphen Turmalin anwendbar sind — verweise ich auf die gelegentlich der Untersuchung des Kalkspaths gegebene Zusammenstellung[1]).

Hier sei nur noch der Ausdruck für den Dehnungscoefficienten E und den Drillungscoefficienten T angeführt; es gilt nämlich

$$1)\quad \mathrm{E} = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44}+2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2),$$

$$2)\quad \begin{aligned}\mathrm{T} = {} & s_{44} + (2(s_{11}-s_{12})-s_{44})\gamma_2^2 + 4(s_{11}+s_{33}-s_{44}-2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2\\ & + 4s_{14}[(\gamma\beta_1+\beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)-\beta_2\gamma_2].\end{aligned}$$

$E = 1/\mathrm{E}$, $T = 1/\mathrm{T}$ sind die bezüglichen Dehnungs- und Drillungswiderstände.

Aus den obigen allgemeinen Werthen folgen die für die beobachteten Stäbchen gültigen speciellen:

$$3)\quad \mathrm{E}_0 = s_{33},\ \mathrm{E}_{\pm 45} = \tfrac{1}{4}(s_{11}+s_{33}+s_{44}+2(s_{13}\mp s_{14})),\ \mathrm{E}_{90} = \mathrm{E}'_{90} = s_{11},$$
$$\mathrm{T}_{90} = 2(s_{11}-s_{12}),\ \mathrm{T}'_{90} = s_{44}.$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. v. 1889, No. 19, p. 483. Dort finden sich alle Formeln, auf welche im Folgenden Bezug genommen wird.

Sie gestatten die Bestimmung der s_{hk} oder „Elasticitätsmoduln“ aus den beobachteten Deformationscoefficienten E und T; aus ihnen folgen dann die eigentlichen Elasticitäts-Constanten c_{hk} nach den Formeln:

$$c_{11}+c_{12}=\frac{s_{33}}{s_{33}(s_{11}+s_{12})-2s_{13}^2},\quad c_{11}-c_{12}=\frac{s_{44}}{s_{44}(s_{11}-s_{12})-2s_{14}^2},$$

$$c_{13}=\frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11}+s_{12})-2s_{13}^2},\quad c_{14}=\frac{-s_{14}}{s_{44}(s_{11}-s_{12})-2s_{14}^2},\qquad 4)$$

$$c_{33}=\frac{s_{11}+s_{12}}{s_{33}(s_{11}+s_{12})-2s_{13}^2},\quad c_{44}=\frac{s_{11}-s_{12}}{s_{44}(s_{11}-s_{12})-2s_{14}^2}.$$

Die folgenden Beobachtungstabellen sind in derselben Anordnung und Bezeichnung aufgestellt, wie die entsprechenden in meinen früheren Arbeiten. Die Einheiten der Längen L des Stäbchens sind Millimeter, die der Breiten B und Dicken D Trommeltheile des Sphärometers gleich 1/992,6 mm. Die Art und Weise, wie die Beobachtungen der Dimensionen verwerthet sind, ist früher auseinandergesetzt worden.

Die Bestimmung der Dimensionen und eines Theiles der Biegungen hat, wie schon früher, Herr Dr. Drude ausgeführt.

Dimensionen.

I(0°) No. 1. $D = 900 + \delta$ $B = 5700 + \beta$

δ =	106,9	100,7	96,0	95,1	97,9	104,0	111,9
	108,1	101,5	97,5	97,2	99,8	105,4	112,9
	108,0	101,7	97,0	97,1	99,3	105,4	112,6
	114,8	103,4	99,8	98,8	101,7	107,8	116,1
Mittel	111,9	101,8	97,6	97,1	99,7	105,6	113,4
ber.	110,6	102,7	98,1	97,0	99,3	105,1	114,4

β =	59	79	98	123	149	178	199
	61	79	97	118	146	180	199
Mittel	60	79	98	120	147	179	199

$\delta_0 = 97{,}0,\ \delta_1 = 0{,}62,\ \delta_2 = 1{,}72.$

I(0°) No. 2. $D = 900 + \delta$ $B = 5700 + \beta$

δ =	117,5	109,3	101,6	98,6	99,4	102,3	108,5
	118,3	110,3	104,4	99,7	100,3	103,4	108,2
	118,8	109,7	102,8	99,6	100,0	102,5	108,3
	121,2	109,1	103,5	100,2	99,5	102,8	108,1
Mittel	119,0	109,6	103,1	99,5	99,8	102,7	108,3
ber.	119,1	109,5	103,0	99,8	99,6	102,5	108,7

β =	45	68	88	107	136	164	193
	49	68	89	111	136	166	193
Mittel	47	68	89	109	136	165	193

$\delta_0 = 99{,}8,\ \delta_1 = 1{,}74,\ \delta_2 = 1{,}58.$

I(0°) No. 3. $D = 700 + \delta$ $B = 5400 + \beta$

δ =	53,8	51,0	52,0	54,5	59,0	67,0	77,0
	56,0	54,9	54,9	57,3	63,0	70,3	79,5
	56,5	55,3	55,0	57,8	63,0	70,9	80,2
	59,0	57,5	58,0	61,1	67,0	74,5	82,7
Mittel	56,4	54,7	55,0	57,7	63,0	70,7	79,9
ber.	56,5	54,6	55,0	57,8	63,0	70,4	80,3

β =	36	46	54	63	68	75	81
	38	47	55	62	70	76	79
Mittel	37	46	55	62	69	76	80

$\delta_0 = 57{,}8,\ \delta_1 = 3{,}96,\ \delta_2 = 1{,}18$

I(−45°) No. 2. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	48,4	51,5	56,7	63,1	73.4
	54,0	58,5	62,5	69,7	80,0
	55,9	58,3	64,0	71,6	81,8
	60,3	64,3	68,6	75,8	85,9
Mittel	54,6	58,1	62,9	70,0	80,3
ber.	54,9	57,7	62,9	70,3	80,1

$\delta_0 = 62{,}9,\ \delta_1 = 6{,}3,\ \delta_2 = 1{,}14.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	62	56	45	37	30
	61	54	46	36	29
Mittel	61	55	46	37	29

I(−45°) No. 3. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	72,5	74,0	77,8	82,6	87,1
	73,9	75,7	78,5	83,3	90,0
	75,0	77,0	80,2	85,0	93,0
	77,2	79,9	82,0	86,0	92,0
Mittel	74,6	76,6	79,6	84,2	90,5
ber.	74,8	76,5	79,6	84 3	90,4

$\delta_0 = 79{,}6,\ \delta_1 = 3{,}9,\ \delta_2 = 0{,}74.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	71	60	51	43	36
	72	62	52	45	38
Mittel	71	61	52	44	37

I(−45°) No. 4. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	76,9	76,9	76,0	80,8	85,3
	84,1	83,3	84,5	87,0	90,2
	83,7	83,1	84,2	86,5	90,0
	83,8	84,0	85,3	88,8	90,5
Mittel	82,1	81,8	83,0	85,8	89,0
ber.	82,0	81,9	83,1	85,5	89,3

$\delta_0 = 83{,}05,\ \delta_1 = 1{,}82,\ \delta_2 = 0{,}64.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	34	41	49	58	70
	32	41	48	57	67
Mittel	33	41	49	59	69

II(90°) No. 2. $D = 600 + \delta$

$\delta =$	76,1	78,0	81,4	82,9	86,2
	77,8	80,1	81,3	84,3	87,2
	78,6	79,5	81,6	84,3	87,4
	80,6	81,6	83,2	85,5	88,2
Mittel	78,3	79,8	81,9	84,2	87,2
ber.	78,3	79,8	81,9	84,3	87,1

$\delta_0 = 81{,}85,\ \delta_1 = 2{,}22,\ \delta_2 = 0{,}21.$

$B = 4300 + \beta$

$\beta =$	42	44	35	32	27
	40	47	33	33	30
Mittel	41	46	34	32	29

II(90°) No. 3. $D = 600 + \delta$

$\delta =$	78,2	80,0	81,3	82,1	83,0
	78,4	80,6	82,2	83,4	83,6
	78,6	80,7	82,8	83,5	83,5
	79,4	82,1	83,1	83,9	84,8
Mittel	78,7	80,8	82,3	83,2	83,7
ber.	78,7	80,8	82,3	83,2	83,7

$\delta_0 = 82{,}3,\ \delta_1 = 1{,}23,\ \delta_2 = -0{,}28.$

$B = 4200 + \beta$

$\beta =$	88	98	102	107	111
	90	100	105	107	112
Mittel	89	99	104	107	111

II(90°) No. 4. $D = 700 + \delta$

$\delta =$	92,6	96,0	100,1	105,8	110,2
	98,0	101,2	105,3	108,4	112,2
	99,0	103,4	108,0	112,2	114,3
	103,5	108,2	112,0	116,3	119,7
Mittel	98,3	102,2	106,3	110,7	114,1.

$B = 5000 + \beta$

$\beta =$	41	43	43	42	40
	42	44	44	42	39
Mittel	42	43	43	42	40

II(90°) No. 5. $D = 800 + \delta$ $B = 5000 + \beta$

$\delta =$	22,0	23,6	25,0	27,1	27,3	$\beta =$	56	56	58	56	53
	24,0	25,0	26,1	27,4	30,2		58	58	59	58	55
	25,2	26,4	28,3	28,8	30,6	Mittel	57	57	58	57	54
	23,9	26,4	28,1	28,9	30,7						
Mittel	23,8	25,3	26,9	28,0	29,7.						

II'(90°) No. 1. $D = 600 + \delta$ $B = 5100 + \beta$

$\delta =$	80,1	82,6	84,5	87,8	93,3	$\beta =$	21	29	42	49	58
	83,3	84,8	86,2	89,5	94,0		23	35	44	51	60
	83,3	84,8	86,8	89,5	94,0	Mittel	22	32	43	50	59
	84,8	86,7	87,6	91,3	96,3						
Mittel	82,9	84,7	86,3	89,5	94,4						
ber.	83,4	84,3	86,4	89,7	94,2						

$\delta_0 = 86{,}4,\ \delta_1 = 2{,}7,\ \delta_2 = 0{,}60.$

II'(90°) No. 2. $D = 600 + \delta$ $B = 5100 + \beta$

$\delta =$	86,0	86,3	88,1	90,8	93,8	$\beta =$	28	39	47	57	65
	89,1	89,0	90,4	92,2	95,4		28	39	49	56	65
	88,4	88,5	89,4	91,7	94,9	Mittel	28	39	48	56	65
	88,9	90,3	91,4	92,7	96,0						
Mittel	88,1	88,5	89,8	91,8	95,0						
ber.	88,1	88,5	89,8	91,9	94,9						

$\delta_0 = 89{,}8,\ \delta_1 = 1{,}7,\ \delta_2 = 0{,}44.$

II'(90°) No. 3. $D = 600 + \delta$ $B = 5100 + \beta$

$\delta =$	91,5	90,9	92,3	94,7	98,7	$\beta =$	69	62	55	51	36
	90,9	91,0	92,8	94,9	98,5		74	63	57	49	31
	91,9	90,9	92,8	95,6	98,0	Mittel	72	62	56	50	34
	91,7	91,2	92,8	94,7	98,7						
Mittel	91,5	91,0	92,7	95,0	98,5						
ber.	91,1	91,4	92,7	95,0	98,3						

$\delta_0 = 92{,}7,\ \delta_1 = 1{,}8,\ \delta_2 = 0{,}52.$

Biegungen.

Die Einheiten für die Größe der Biegungen η sind Millimeter der Beobachtungsscala, welche je 0,0002954 mm am Apparat entsprechen. Durch Combination der Beobachtung desselben Stäbchens in zwei Längen ist die Eindrückung η' der Schneiden bestimmt; (η') ist der der Berechnung zum Grunde gelegte Mittelwerth aus den auf verschiedene Stäbchen derselben Gattung bezüglichen Resultaten. P ist die in Grammen ausgedrückte Belastung.

Die Beobachtungen sind bei etwa 18° C. angestellt.

I(0°) No. 1. $L = 60{,}07,\ B = 5825,\ D = 998{,}6,\ P = 105,$

1. Lage $\eta = 198{,}4\ \ 198{,}4\ \ 198{,}4$
2. Lage $\eta = 198{,}6\ \ 198{,}7\ \ 198{,}7$

$\eta_{105} = 198{,}5,\ (\eta') = 1{,}05,$ $E = 163\,30000.$

I(0°) No. 2. $L = 60{,}07$, $B = 5814$, $D = 1001{,}2$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 197{,}8\ \ 197{,}7\ \ 197{,}8$
2. Lage $\eta = 197{,}3\ \ 197{,}3\ \ 197{,}2$
$\eta_{105} = 197{,}5$, $(\eta') = 1{,}05$, $\mathfrak{E} = 16320000.$

I(0°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 5461$, $D = 758{,}8$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 7{,}2\ \ 7{,}2\ \ 7{,}3$
2. Lage $\eta = 7{,}2\ \ 7{,}3\ \ 7{,}2$
$\eta_{105} = 7{,}2$, $\eta' = 1{,}03$.
$L = 45{,}07$,
1. Lage $\eta = 203{,}6\ \ 203{,}8\ \ 203{,}7$
2. Lage $\eta = 203{,}6\ \ 203{,}6\ \ 203{,}6$
$\eta_{105} = 203{,}65$, $(\eta') = 1{,}05$, $\mathfrak{E} = 16340000$

I(0°) No. 4. $L = 14{,}07$, $B = 5483$, $D = 989{,}9$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 4{,}0\ \ 4{,}0\ \ 3{,}9$
2. Lage $\eta = 3{,}9\ \ 3{,}8\ \ 3{,}9$
$\eta_{105} = 3{,}9$, η' 1,08.
$L = 40{,}07$,
1. Lage $\eta = 66{,}1\ \ 66{,}1\ \ 66{,}2$
2. Lage $\eta = 66{,}1\ \ 66{,}3\ \ 66{,}1$
$\eta_{105} = 66{,}15$, $(\eta') = 1{,}05$, ($\mathfrak{E} = 16030000.$)[1])
Gesammtmittel $\mathfrak{E}_0 = 16330000$, $E_0 = 6{,}124.10^{-6}$
wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 4000, $\pm$ 0,002.

I(+45°) No. 1. $L = 28{,}07$, $B = 4382$, $D = 780{,}2$ $P = 135$,
1. Lage $\eta = 70{,}4\ \ 70{,}5\ \ 70{,}5$
2. Lage $\eta = 70{,}6\ \ 70{,}7\ \ 70{,}6$
$\eta_{135} = 70{,}55$, $(\eta') = 1{,}8$, $\mathfrak{E} = 17150000.$

I(+45°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 4398$, $D = 785{,}1$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 10{,}4\ \ 10{,}7\ \ 10{,}6\ \ 10{,}6$
2. Lage $\eta = 10{,}4\ \ 10{,}5\ \ 10{,}7\ \ 10{,}8$
$\eta_{135} = 10{,}6$, $\eta' = 2{,}1$.
$L = 30{,}07$,
1. Lage $\eta = 84{,}8\ \ 84{,}8\ \ 84{,}9$
2. Lage $\eta = 84{,}7\ \ 84{,}9\ \ 84{,}9$
$\eta_{135} = 84{,}83$, $(\eta') = 1{,}8$, $\mathfrak{E} = 17070000.$

I(+45°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 4393$, $D = 790{,}8$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 10{,}1\ \ 9{,}9\ \ 10{,}1\ \ 10{,}1$
2. Lage $\eta = 10{,}3\ \ 9{,}8\ \ 9{,}9\ \ 9{,}9$
$\eta_{135} = 10{,}02$, $\eta' = 1{,}7$.
$L = 30{,}07$,
1. Lage $\eta = 82{,}9\ \ 82{,}9\ \ 82{,}8$
2. Lage $\eta = 82{,}5\ \ 82{,}4\ \ 82{,}3$
$\eta_{135} = 82{,}63$, $(\eta') = 1{,}8$, $\mathfrak{E} = 17180000.$

---

1) Von der Berechnung des Mittelwerthes von E ausgeschlossen, da im Innern des Stäbchens kleine Sprünge sichtbar waren.

I(+45°) No. 4. $L = 14{,}07$, $B = 4378$, $D = 781{,}5$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 10{,}3\ \ 10{,}3\ \ 10{,}5$
2. Lage $\eta = 10{,}4\ \ 10{,}3\ \ 10{,}3$
$\eta_{135} = 10{,}35$, $\eta' = 1{,}7$.
$L = 25{,}07$,
1. Lage $\eta = 50{,}4\ \ 50{,}5\ \ 50{,}5$
2. Lage $\eta = 50{,}5\ \ 50{,}5\ \ 50{,}5$
$\eta_{135} = 50{,}5$, $(\eta') = 1{,}8$, $E = 17170000.$
Gesammtmittel $E_{+45} = 1716\,0000$, $E_{+45} = 5{,}828.10^{-8}$
wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 18000. $\pm$ 0,006.

(−45°) No. 1. $L = 34{,}07$, $B = 4347$, $D = 754{,}8$ $P = 135$,
1. Lage $\eta = 152{,}3\ \ 152{,}3\ \ 152{,}5$
2. Lage $\eta = 152{,}3\ \ 152{,}3\ \ 152{,}1$
$\eta_{135} = 152{,}3$, $(\eta') = 1{,}76$, $E = 156\,00000.$

I(−45°) No. 2. $L = 29{,}07$, $B = 4346$, $D = 763{,}4$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 92{,}4\ \ 92{,}4\ \ 92{,}5$
2. Lage $\eta = 92{,}6\ \ 92{,}6\ \ 92{,}6$
$\eta_{135} = 92{,}5$, $(\eta') = 1{,}76$, $E = 155\,50000.$

I(−45°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 4350$, $D = 779{,}9$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 11{,}0\ \ 11{,}0\ \ 11{,}1$
2. Lage $\eta = 11{,}8\ \ 11{,}7\ \ 11{,}7$
$\eta_{135} = 11{,}4$, $\eta' = 1{,}79$.
$L = 32{,}07$,
1. Lage $\eta = 114{,}8\ \ 114{,}9\ \ 114{,}8$
2. Lage $\eta = 116{,}1\ \ 116{,}4\ \ 116{,}3$
$\eta_{135} = 115{,}55$ $(\eta') = 1{,}76$ $E = 155\,90000.$

I(−45°) No. 4. $L = 14{,}07$ $B = 4349$, $D = 783{,}4$, $P = 135$,
1. Lage $\eta = 11{,}0\ \ 10{,}9\ \ 11{,}1$
2. Lage $\eta = 11{,}7\ \ 11{,}4\ \ 11{,}5$
$\eta_{135} = 11{,}3$, $\eta' = 1{,}73$.
$L = 34{,}07$
1. Lage $\eta = 137{,}9\ \ 137{,}8\ \ 137{,}9$
2. Lage $\eta = 137{,}4\ \ 137{,}7\ \ 137{,}6$
$\eta_{135} = 137{,}7$ $(\eta') = 1{,}76$, $E = 154\,90000.$
Gesammtmittel $E_{-45} = 1556\,0000$, $E_{-45} = 6{,}427.10^{-8}$
wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 17000. $\pm$ 0,007.

II (90°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 4337$, $D = 682{,}0$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 8{,}3\ \ 8{,}4\ \ 8{,}4$
2. Lage $\eta = 8{,}5\ \ 8{,}3\ \ 8{,}3$
$\eta_{105} = 8{,}4$, $\eta' = 1{,}56$.
$L = 23{,}07$,
1. Lage $\eta = 31{,}7\ \ 31{,}7\ \ 31{,}7$
2. Lage $\eta = 31{,}8\ \ 31{,}7\ \ 31{,}6$
$\eta_{105} = 31{,}7$, $(\eta') = 1{,}5$, $E = 254\,90000.$

II(90°) No. 3. $L = 14{,}07$, $B = 4302$, $D = 682{,}2$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 8{,}3\ \ 8{,}2\ \ 8{,}2$
2. Lage $\eta = 8{,}4\ \ 8{,}3\ \ 8{,}4$
$\eta_{105} = 8{,}3$, $\eta' = 1{,}42$.
$L = 23{,}07$,
1. Lage $\eta = 31{,}9\ \ 31{,}8\ \ 31{,}9$
2. Lage $\eta = 31{,}7\ \ 31{,}7\ \ 31{,}7$
$\eta_{105} = 31{,}77$, $(\eta') = 1{,}5$, $E = 256\,10000$.

II'(90°) No. 1. $L = 14{,}07$, $B = 5141$, $D = 686{,}6$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 6{,}8\ \ 6{,}9\ \ 6{,}7$
2. Lage $\eta = 6{,}8\ \ 6{,}7\ \ 6{,}8$
$\eta_{105} = 6{,}8$, $\eta' = 1{,}15$.
$L = 27{,}07$,
1. Lage $\eta = 41{,}5\ \ 41{,}4\ \ 41{,}4$
2. Lage $\eta = 41{,}4\ \ 41{,}4\ \ 41{,}3$
$\eta_{105} = 41{,}40$, $\eta' = 1{,}19$, $E = 255\,90000$.

II'(90°) No. 2. $L = 14{,}07$, $B = 5148$, $D = 690{,}0$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 6{,}9\ \ 6{,}9\ \ 6{,}8$
2. Lage $\eta = 6{,}7\ \ 6{,}6\ \ 6{,}6$
$\eta_{105} = 6{,}75$, $\eta' = 1{,}23$.
$L = 28{,}07$,
1. Lage $\eta = 44{,}9\ \ 44{,}9\ \ 44{,}8$
2. Lage $\eta = 45{,}4\ \ 45{,}3\ \ 45{,}1$
$\eta_{105} = 45{,}07$, $(\eta') = 1{,}19$, $E = 257\,10000$.

II'(90°) No. 3. $L = 27{,}07$, $B = 5155$, $D = 692{,}9$, $P = 105$,
1. Lage $\eta = 40{,}4\ \ 40{,}4\ \ 40{,}4$
2. Lage $\eta = 40{,}5\ \ 40{,}5\ \ 40{,}5$
$\eta_{105} = 40{,}45$, $(\eta') = 1{,}19$, $E = 254\,30000$.
Gesammtmittel $E_{90} = 2557\,0000$, $E_{90} = 3.911.10^{-8}$
wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 34000. $\pm$ 0,005.

Die vorstehenden Werthe sind nun noch deswegen zu corrigiren, daß die beobachteten Stäbchen nicht genau die vorausgesetzten Orientirungen besaßen. Für die Gattungen I(0°) und II(90°) hat ein Fehler der Richtung der Längsaxe nur einen Einfluß von zweiter Ordnung, aber bei den Gattungen I(+45°) und I(−45°) kommt er wesentlich in Betracht.

Da Turmalin keine deutliche Spaltbarkeit besitzt, so war der beste Weg, den Fehler der Orientirung zu bestimmen, der, mit dem Anlegegoniometer den Winkel der für die Herstellung der Stäbchen durch eine parallel der Axe hergestellte Platte des Krystalles ausgeführten Schnitte gegen eine Längskante zu messen; dabei ist vorausgesetzt, daß die Orientirung der Stäbchen durch das Abschleifen nicht merklich geändert ist — eine Annahme, die bei einem so harten Material wie Turmalin nahezu erfüllt gewesen sein wird.

Die angestellte Messung ergab für die Gattung I$(+45^0)$ einen Winkel von

$$+44,^05,$$

für die Gattung I(-45^0) einen Winkel von

$$-44,^09$$

zwischen der Längsaxe des Stäbchens und der Hauptaxe des Krystalles. Dem entspricht eine Correction von $+0{,}024.10^{-6}$ für die erstere, von $-0{,}003.10^{-6}$ für die letztere Gattung, so daß nunmehr folgendes System von Werthen resultirt:

$$\begin{aligned} E_0 &= (6{,}124 \pm 0{,}002).10^{-6}, \\ E_{+45} &= (5{,}852 \pm 0{,}006).10^{-6}, \\ E_{-45} &= (6{,}424 \pm 0{,}007).10^{-6}, \\ E_{90} &= (3{,}911 \pm 0{,}005).10^{-6}. \end{aligned}$$

Aus ihm folgen die Werthe der in Formel (1) auftretenden Aggregate der s_{kk}; es ist nämlich:

$$\text{5)} \qquad \begin{aligned} s_{11} &= (3{,}911 \pm 0{,}005).10^{-6}, \\ s_{33} &= (6{,}124 \pm 0{,}002).10^{-6}, \\ s_{14} &= (0{,}572 \pm 0{,}009).10^{-6}, \\ s_{44}+2s_{13} &= (14{,}517 \pm 0{,}014).10^{-6}. \end{aligned}$$

Demgemäß lautet jetzt das allgemeine Gesetz des Dehnungscoefficienten für Turmalin:

$$\text{6)} \quad E = \left(3{,}911.(1-\gamma^2)^2+6{,}124.\gamma^4+14{,}517\,\gamma^2(1-\gamma^2)+1{,}144.\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2)\right).10^{-6}.$$

Setzt man hierin

$$\alpha = 0, \quad \gamma = \cos\psi, \quad \beta = \sin\psi,$$

so erhält man das Entsprechende für die Symmetrieebene des Krystalles; Maxima und Minima liegen etwa bei den Winkeln

$$\psi_I = -35^0, \quad \psi_{II} = 0^0, \quad \psi_{III} = 25^0, \quad \psi_{IV} = 78{,}5^0$$

und haben die Werthe:

$$E_I = 6{,}56.10^{-6}, \quad E_{II} = 6{,}12.10^{-6}, \quad E_{III} = 6{,}31.10^{-6}, \quad E_{IV} = 3{,}96.10^{-6}.$$

Figur 1 auf der beigegebenen Tafel stellt den Verlauf von E in der Symmetrieebene oder dem ersten Hauptschnitt dar.

Setzt man in (6)

$$\beta = 0, \quad \gamma = \cos\phi, \quad \alpha = \sin\phi,$$

so resultirt das Gesetz für die Ebene normal zur Symmetrieebene

oder den zweiten Hauptschnitt. Figur 2 giebt die entsprechende Curve.

Drillungen.

Die Drillungsbeobachtungen stießen bei den Stäbchen II(90°), deren Breitseiten normal zur Krystallaxe liegen, auf eine eigenthümliche Schwierigkeit.

An der einen Seite des Krystalles, dessen Querschnitt, wie oben gesagt, angenähert ein gleichseitiges Dreieck war, befand sich, wie es schien auf der ganzen Länge, eine etwas dunkler gefärbte Partie, welche gegen die Hauptmasse des Krystalles durch einige Flächen des hexagonalen Prismas begrenzt war. Längs dieser Flächen scheint eine Störung der Fortwachsung stattgefunden zu haben und zwar war besonders an dem einen Ende des Krystalles die Verbindung eine unvollkommene, denn die erste normal zur Krystallaxe abgeschnittene Platte zersprang von selbst in zwei Theile längs dieser Grenze. Aus einer zweiten derartigen Platte wurden die ersten drei Stäbchen der Gattung II(90°) hergestellt, die beim Schleifen und Poliren den Zusammenhang behielten. No. 2 und 3 gaben bei den Biegungsbeobachtungen gut übereinstimmende Werthe für E, No. 1 wurde seiner geringen Länge wegen nicht gebogen.

Bei der Drillung gab No. 3 den größten Werth für T, No. 2 einen viel kleineren und No. 1 zersprang längs einer der beschriebenen Grenzen bei einer Belastung, welche die beiden anderen Stäbchen bereits ausgehalten hatten. Da ich überdies in No. 2 mit der Loupe eine Störung in jener Grenze zu sehen glaubte, in No. 3 nicht, so nahm ich an, daß dieselbe von dem einen verbrochenen Ende des Krystalles her bis etwa in die Tiefe von No. 2 mit abnehmender Stärke sich fortgesetzt habe.

Um sichere Werthe für T zu erhalten, ließ ich aus einer dritten Platte parallel einer andern Kante noch drei Stäbchen (No. 4, 5, 6) herstellen. Freilich waren in denselben kleine Sprünge vorhanden, welche No. 6 völlig, No. 4 und 5 fast zur Hälfte unbrauchbar machten, aber die Reste gestatteten noch die Beobachtung und gaben mit No. 3 gut stimmende Werthe, welche, da die Stäbchen sichtlich ziemlich homogen waren, als die wahren der bezüglichen Orientirung entsprechenden zu betrachten sind. No. 3 und 5 als regelmäßiger in der Form sind je zwei Mal, No. 4 als unregelmäßiger nur ein Mal beobachtet.

Die Stäbchen der Gattung II′(90°) waren in der Farbe völlig homogen und gaben zu keinen Bedenken Anlaß.

Bei den Drillungsbeobachtungen war der Abstand zwischen Spiegel und Scala 5174 mm, die Millimeter der Scala waren um 0,00374 zu groß; der mittlere Hebelarm, an welchem die Belastung $G + P$ wirkte (G das Gewicht der Waagschaale), hatte die Länge von 36,80 mm. Die beobachteten Verschiebungen σ sind bereits von der Tangente auf den Bogen reducirt; ρ ist die Größe der Axenreibung in Millimetern der Scala.

Bezüglich der Berechnung von T und T' verweise ich auf die früheren Arbeiten.

II(90°) No. 2. $L = 18{,}89$, $B = 4337$, $D = 682{,}0$,

rR.	$G + 50$,	$\sigma =$	95,6	95,5	95,4	95,5,	$\rho = 2{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma =$	51,9	51,7	51,3	51,5,	$\rho = 1{,}7$
	G ,	$\sigma =$	7,8	7,8	7,7	7,8,	$\rho = 2{,}1$
lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	96,5	96,5	96,3	96,6,	$\rho = 0{,}8$
	$G + 25$,	$\sigma =$	52,5	52,5	52,3	52,4,	$\rho = 0{,}9$
	G ,	$\sigma =$	8,7	8,6	8,6	8,7,	$\rho = 0{,}9$

$\sigma_{50} = 87{,}73$ $(T = 987\,0000.)$ [1])

$L = 18{,}07$

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	92,4	92,3	92,1	92,3,	$\rho = 2{,}4$
	$G + 25$,	$\sigma =$	50,5	50,4	50,4	50,2,	$\rho = 2{,}2$
	G ,	$\sigma =$	8,2	8,2	8,0		$\rho = 2{,}0$

$\sigma_{50} = 84{,}33$ $(T = 982\,0000.)$ [1])

II(90°) No. 3. $L = 20{,}95$, $B = 4303$, $D = 682{,}1$,

rR.	$G + 50$,	$\sigma =$	103,0	102,8	102,8	102,6,	$\rho = 2{,}7$
	$G + 25$,	$\sigma =$	55,2	55,3	55,2	55,0,	$\rho = 3{,}2$
	G ,	$\sigma =$	7,9	8,1	8,0		$\rho = 3{,}3$
lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	103,7	103,7	103,9	103,8,	$\rho = 2{,}4$
	$G + 25$,	$\sigma =$	56,0	56,1	55,9	56,1,	$\rho = 2{,}6$
	G ,	$\sigma =$	8,4	8,5	8,3	,	$\rho = 2{,}7$

$\sigma_{50} = 95{,}00$ $T = 1019\,0000.$

$L = 19{,}17$

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	94,5	94,8	94,5	94,7,	$\rho = 4{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma =$	50,8	51,0	50,9	50,8,	$\rho = 4{,}4$
	G ,	$\sigma =$	6,8	6,8	6,5	,	$\rho = 4{,}6$
rR.	$G + 50$,	$\sigma =$	96,2	95,6	95,4	95,5,	$\rho = 1{,}8$
	$G + 25$,	$\sigma =$	51,8	51,8	51,7	51,7,	$\rho = 2{,}4$
	G ,	$\sigma =$	8,0	7,9	7,9	,	$\rho = 2{,}5$

$\sigma_{50} = 87{,}90$ $T = 1007\,0000.$

II(90°) No. 4. $L = 11{,}93$, $B = 5042$, $D = 806{,}3$

rR.	$G + 40$,	$\sigma =$	24,7	24,6	24,7	24,7,	$\rho = 0{,}7$
	$G + 20$,	$\sigma =$	13,6	13,5	13,5	13,5,	$\rho = 0{,}6$
	G ,	$\sigma =$	2,5	2,7	2,6	,	$\rho = 0{,}7$
lR.	$G + 40$,	$\sigma =$	25,1	25,2	25,1	25,0,	$\rho = 0{,}2$
	$G + 20$,	$\sigma =$	13,9	13,9	13,8	13,9,	$\rho = 0{,}2$
	G ,	$\sigma =$	2,8	2,7	2,7	,	$\rho = 0{,}2$

$\sigma_{40} = 22{,}37$ $T = 1020\,0000.$

1) Von der Berechnung des Gesammtmittels nach Obigem ausgeschlossen.

II(90°) No. 5. $L = 11{,}74$, $B = 5057$, $D = 826{,}7$

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	28,0	27,8	27,9	27,8,	$\rho = 0{,}5$
	$G + 25$,	$\sigma =$	15,3	15,0	15,1	15,2,	$\rho = 0{,}5$
	G ,	$\sigma =$	2,4	2,3	2,4	2,4,	$\rho = 0{,}6$
		$\sigma_{50} =$	25,50				$T = 1021_{0000}$.
		$L =$	10,91				
lR.	$G + 40$,	$\sigma =$	21,6	21,5	21,3	21,4,	$\rho = 0{,}6$
	$G + 20$,	$\sigma =$	11,7	11,8	11,8	11,9.	$\rho = 0{,}5$
	G ,	$\sigma =$	2,2	2,2	2,2	,	$\rho = 0{,}6$
rR.	$G + 40$,	$\sigma =$	21,4	21,4	21,3	21.4,	$\rho = 0{,}4$
	$G + 20$,	$\sigma =$	11,7	11,6	11,7	11,6,	$\rho = 0{,}4$
	G ,	$\sigma =$	2,4	2,4	2,4	,	$\beta = 0{,}5$
		$\sigma_{40} =$	19,09				$T = 1014_{0000}$.

Gesammtmittel $T_{90} = 1016_{0000}$, $T_{90} = 9.843.10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 17000. $\pm$ 0,016.

II'(90°) No. 1. $L = 22{,}68$, $B = 5142$, $D = 686{,}8$,

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	132,8	132,9	132,7	132,9,	$\rho = 1{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma =$	72,2	71,8	72,0	72,1,	$\rho = 1{,}3$
	G ,	$\sigma =$	11,5	11,4	11,5	11,6	$\rho = 1{,}7$
rR.	$G + 50$,	(gestörte Beobachtung)					
	$G + 25$,	$\sigma =$	71,2	71,1	71,0	70,9,	$\rho = 4{,}2$
	G ,	$\sigma =$	10,7	10,5	10,4	10,6,	$\rho = 4{,}3$
		$\sigma_{50} =$	121,1				$(T = 666_{8000}.)^1)$
		$L =$	22,75				
rR.	$G + 50$,	$\sigma =$	128,9	128,9	128,6	128,6,	$\rho = 5{,}8$
	$G + 25$,	$\sigma =$	68,9	68,9	68,5	68,7,	$\rho = 6{,}3$
	G ,	$\sigma =$	9,0	9,2	9,0	9,0,	$\rho = 6{,}5$
lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	131,1	131,1	131,1	131,3,	$\rho = 1{,}5$
	$G + 25$,	$\sigma =$	71,2	71,4	71,3	71,3,	$\rho = 1{,}7$
	G ,	$\sigma =$	11,3	11,2	11,3	,	$\rho = 2{,}0$
		$\sigma_{50} =$	119,8				$T = 676_{3000}$.

II'(90°) No. 2. $L = 23{,}84$, $B = 5148$, $D = 690{,}0$

lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	136,6	136,6	136,9	136,7,	$\rho = 0{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma =$	74,3	74,3	74,4	74,4,	$\rho = 0$
	G ,	$\sigma =$	12,5	12,1	12,2	,	$\rho = 0$
rR.	$G + 50$,	$\sigma =$	135,9	136,4	136,4	136,5,	$\rho = 1{,}3$
	$G + 25$,	$\sigma =$	74,1	74,0	74,2	74,0,	$\rho = 1{,}5$
	G ,	$\sigma =$	12,0	11,8	11,9	,	$\rho = 2{,}0$
		$\sigma_{50} =$	124,3				$T = 673_{9000}$.

II'(90°) No. 3. $L = 22{,}69$, $B = 5156$, $D = 692{,}9$

rR.	$G + 50$,	$\sigma =$	127,8	128,0	127,8	127,8,	$\rho = 2{,}2$
	$G + 25$,	$\sigma =$	69,5	69,2	69,4	69,4,	$\rho = 2{,}4$
	G ,	$\sigma =$	10,6	10,8	10,7	10,7,	$\rho = 2{,}9$
lR.	$G + 50$,	$\sigma =$	128,7	128,7	128,7	128,6,	$\rho = 0{,}6$
	$G + 25$,	$\sigma =$	70,2	70,2	70,0	70,1,	$\rho = 0{,}7$
	G ,	$\sigma =$	11,8	11,9	11,8	11,8,	$\rho = 0{,}7$
		$\sigma_{50} =$	117,0				$T = 672_{5000}$.

Gesammtmittel $T'_{90} = 674_{0000}$, $T'_{90} = 14{,}837.10^{-8}$

wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 9000, $\pm$ 0,019.

1) Die Beobachtung war sichtlich durch mangelhaftes Einkitten des Stäbchens in den Fassungen gestört und ist von der Berechnung ausgeschlossen.

Eine Abweichung der Längsaxe der Stäbchen II(90°) und II′(90°) von der Richtung normal zur Symmetrieebene giebt nur einen Fehler zweiter Ordnung in den Werthen von T; dagegen hat ein Fehler in der Orientirung der Querdimensionen größeren Einfluß. Leider giebt es kein Mittel, deren Genauigkeit mit Schärfe zu prüfen, und man kann höchstens die Größenordnung der Unsicherheit schätzen, welche in Folge des erwähnten Umstandes den obigen Resultaten anhaftet.

Der Einfluß der Orientirung der Querdimensionen auf T folgt aus Formel (2), wenn man in ihr $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\gamma_3 = \cos\varphi$, $\beta_3 = \sin\varphi$ setzt, also bildet

$$7) \qquad (T) = s_{44} + (2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}) \cos^2\varphi - 4 s_{14} \sin\varphi \cos\varphi$$

und dies nach φ differentiirt. Man erhält so

$$8) \qquad \delta(T) = \left(-(2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}) \sin 2\varphi - 4 s_{14} \cos 2\varphi\right) \delta\varphi$$

und, wenn man berücksichtigt, daß

$$\text{für die Gattung II}(90^0)\ \varphi = 0$$

$$\text{für die Gattung II}'(90^0)\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ist,

$$\delta T_{90} = \delta T'_{90} = -4 s_{14} \delta\varphi.$$

Bei Kalkspath blieb der Fehler $\delta\varphi$ laut der früher mitgetheilten Beobachtung unter 30′; bei Turmalin liegen die Verhältnisse in sofern noch günstiger, als die prismatische Form des Krystalles die Schnitte normal zur Axe mit großer Genauigkeit herzustellen gestattet. Macht man aber die ungünstige Annahme $\pm\delta\varphi = 30' = 0{,}0088$, so ergiebt sich wegen $s_{14} = 0{,}572$ der absolute Werth von $\delta T = 0{,}020$, also nur wenig größer als der directe Beobachtungsfehler. Dieser geringe Einfluß hängt damit zusammen, daß die Maxima und Minima von (T) für Winkel φ eintreten, die nicht allzuweit von den benutzten beiden abweichen; die Formel (8) ergiebt nämlich, daß dieselben bei

$$\varphi = 12^0\,18' \quad \text{und} \quad 102^0\,18'$$

stattfinden.

Den ganzen Verlauf von (T) giebt die Figur (3) an; in ihr ist die Größe des Drillungscofficienten für ein rechteckiges Prisma, dessen Längsaxe in die Normale zur Symmetrieebene fällt, als Function der Richtung der kleineren Querdimension (D) aufgetragen. —

Die durch Drillungsbeobachtungen gefundenen Resultate sind nach Obigem also:

$$\begin{aligned} 2(s_{11} - s_{12}) &= (\ 9{,}843 \pm 0{,}016)\,10^{-6}, \\ s_{44} &= (14{,}837 \pm 0{,}019)\,10^{-6}; \end{aligned} \qquad 9)$$

sie ergeben zusammen mit den durch Biegung erhaltenen (5) alle in der allgemeinen Formel (2) für den Drillungscoefficienten T eines rechteckigen Prismas auftretenden Coefficienten und somit das allgemeine Gesetz selbst. Uebersichtlicher ist der Werth des Drillungscoefficienten T^0 für einen Kreiscylinder, welcher nur von der Orientirung der Längsaxe abhängt. Man erhält hierfür

$$T^0 = \left(24{,}68 - 12{,}94\,\gamma^2 + 17{,}93\,\gamma^4 - 4{,}58\,\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2)\right)10^{-6}; \qquad 10)$$

Figur 4 und 5 stellt den Verlauf dieser Function für den ersten und zweiten Hauptschnitt dar.

Resultate.

Aus den Werthen (5) und (9) folgt zunächst das ganze System der Moduln s_{kk}:

$$\begin{aligned} s_{11} &= (\ 3{,}911 \pm 0{,}005).10^{-6}, & s_{12} &= -(1{,}011 \pm 0{,}009).10^{-6}, \\ s_{33} &= (\ 6{,}124 \pm 0{,}002).10^{-6}, & s_{13} &= -(0{,}160 \pm 0{,}017).10^{-6}, \\ s_{44} &= (14{,}837 \pm 0{,}019).10^{-6}, & s_{14} &= +(0{,}572 \pm 0{,}009).10^{-6}. \end{aligned} \qquad 11)$$

Hieraus ergeben sich die Coefficienten der lineären Compression parallel den Coordinatenaxen bei allseitig gleichem Druck:

$$A_1 = A_2 = 2{,}74.10^{-6}, \quad A_3 = 5{,}80.10^{-6}, \qquad 12)$$

sowie desjenigen der cubischen Compression:

$$M = 11{,}28.10^{-6}.$$

Die Elasticitätsconstanten c_{kk} erhalten folgende Werthe:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 27{,}54.10^6, & c_{12} &= +7{,}04.10^6, \\ c_{33} &= 16{,}38.10^6, & c_{13} &= +0{,}90.10^6, \\ c_{44} &= 6{,}80.10^6, & c_{14} &= -0{,}79.10^6. \end{aligned} \qquad 13)$$

Alle vorstehenden Werthe gelten für brasilianischen Turmalin bei der Temperatur von ca. 18° C.

Bekanntlich verlangt die Poisson'sche Theorie, welche die elastischen Kräfte aus Wechselwirkungen der nicht polarisirten Moleküle ableitet, für alle Gruppen des hexagonalen Krystallsystems die Beziehungen

$$c_{13} = c_{44}, \qquad c_{11} = 3\,c_{12}.$$

Die zweite ist nicht erfüllt, wenn die Richtungen normal zur Hauptaxe Differenzen bezüglich der Attraction zeigen, die erste, wenn die Hauptaxe (Z) von der (X)- und (Y)-Axe abweicht.

Bildet man diese Werthe für die bisher von mir untersuchten hexagonalen Krystalle so erhält man folgende Tabelle.

Beryll	$c_{13} = 6{,}74$	$c_{44} = 6{,}66$	$c_{11} = 27{,}46$	$3c_{12} = 29{,}40$
Bergkrystall	$= 1{,}44$	$= 5{,}82$	$= 8{,}68$	$= 2{,}13$
Kalkspath	$= 4{,}60$	$= 3{,}49$	$= 13{,}97$	$= 13{,}95$
Turmalin	$= 0{,}90$	$= 6{,}80$	$= 27{,}54$	$= 21{,}12$

Man erkennt, daß bei Beryll und Kalkspath beide Relationen theils genau, theils angenähert gelten; bei Turmalin ist besonders die erste, bei Bergkrystall auch die zweite nicht erfüllt. Die hierin liegende Analogie mit der pyroëlectrischen Polarisation dieser Krystalle ist wohl nicht zufällig. —

Benutzt man die von Pfaff[1]) gegebenen Werthe der thermischen lineären Ausdehnungscoefficienten

$$a_1 = a_2 = 7{,}73 . 10^{-6}, \qquad a_3 = 9{,}37 . 10^{-6},$$

so folgen die Werthe der thermischen Drucke parallel den Axen:

14) $$q_1 = q_2 = 275{,}8, \qquad q_3 = 167{,}5.$$

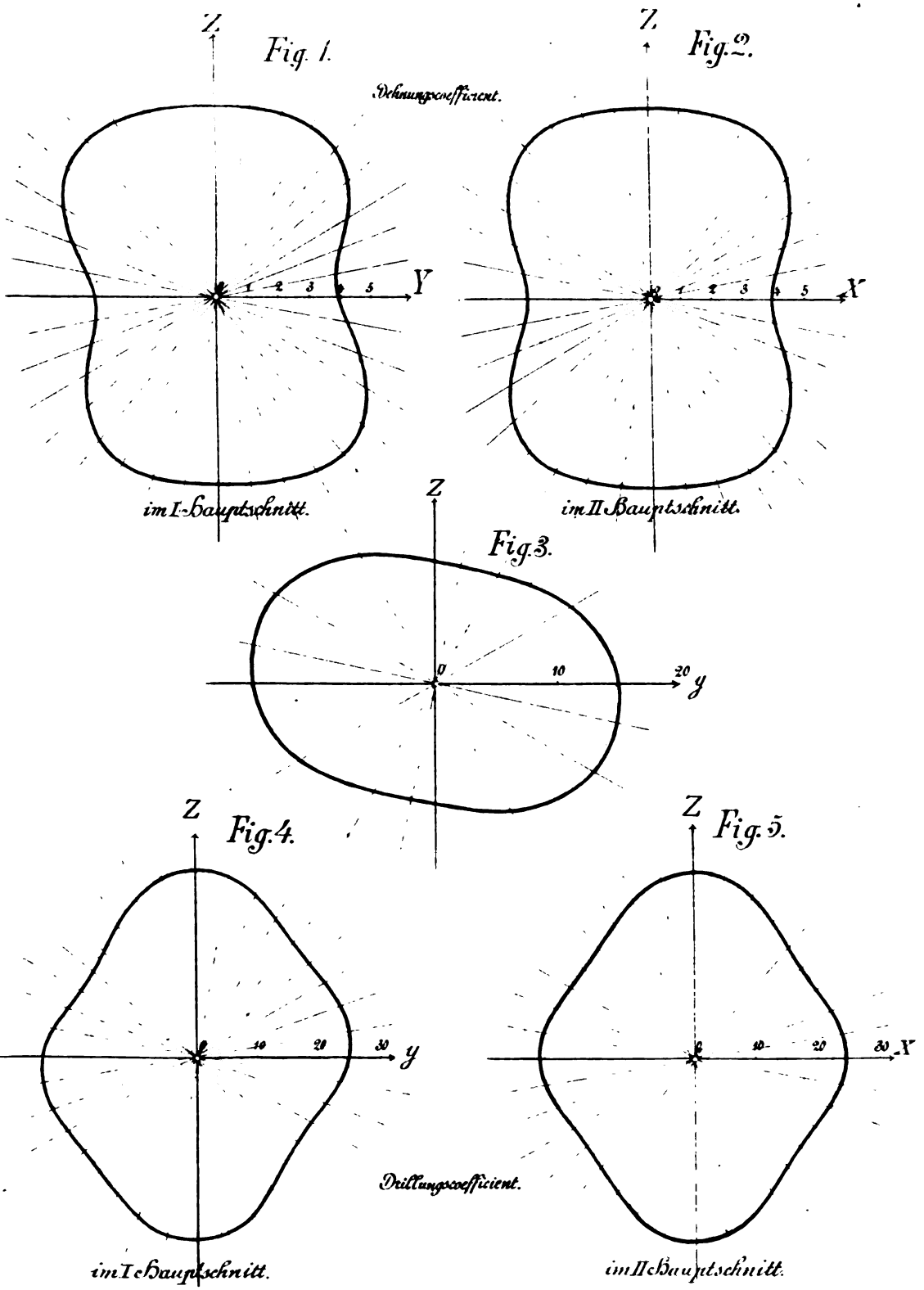
Die Unterschiede der isothermischen und adiabatischen Elasticitätsmoduln (s_{hk} und σ_{hk}) und Elasticitätsconstanten (c_{hk} und γ_{hk}) berechnen sich bei Einführung des Werthes der absoluten Temperatur $\Theta = 291$, des mechanischen Wärmeäquivalentes $A = 426000$, der Dichte des Turmalins[2]) $\varepsilon = 3{,}116 . 10^{-6}$, der gewöhnlichen specifischen Wärme[3]) $c = 0{,}245$, nach den früher gegebenen Formeln folgendermaßen:

15)
$$\gamma_{11} - c_{11} = \gamma_{12} - c_{12} = 0{,}068 . 10^6,$$
$$\gamma_{13} - c_{13} = 0{,}052 . 10^6, \quad \gamma_{33} - c_{33} = 0{,}031 . 10^6,$$
$$\gamma_{14} - c_{14} = \gamma_{44} - c_{44} = 0;$$

16)
$$s_{11} - \sigma_{11} = s_{12} - \sigma_{12} = 0{,}0067 . 10^{-6},$$
$$s_{13} - \sigma_{13} = 0{,}0081 . 10^{-6}; \quad s_{33} - \sigma_{33} = 0{,}0098 . 10^{-6},$$
$$s_{14} - \sigma_{14} = s_{44} - \sigma_{44} = 0.$$

Endlich findet sich die Differenz der specifischen Wärmen bei constanter Spannung c_p und constanter Deformation c_d

1) F. Pfaff, Pogg. Ann. CVII, 148, 1859.
2) E. Riecke, Gött. Nachr. 1885, p. 410.
3) E. Riecke, ib. p. 423.



Nachr. d. K. G. d. W. zu Göttingen 1890. № 7.

W. Voigt, Bestimmung der Elasticitätsconstanten für brasilianischen Turmalin.

20 SEP 90
LIBRARY

$$c_p - c_a = 0{,}00128,$$

und ihr Verhältniß

$$\frac{c_p}{c_a} = \varkappa = 1{,}0052.$$

Bemerkung. Herr Elie[1]) hat versucht, die Anzahl der Constanten der rhomboëdrisch-hemiëdrischen Krystalle dadurch zu reduciren, daß er annahm, das elastische Potential besitze auf die Kanten eines Rhomboëders — dessen Wahl er, wie es scheint, freiläßt — als schiefwinklige Coordinatenaxen bezogen, die Rhomboëderflächen als analytische Symmetrieebenen.

So unwahrscheinlich diese Annahme von vorn herein erscheint, so habe ich doch im Falle des Kalkspathes, wo wohl kein Zweifel darüber sein kann, daß wenn überhaupt eines, so das Spaltungsrhomboëder eine ausgezeichnete Bedeutung besitzt, dieselbe unter Benutzung der früher von mir gefundenen Constantenwerthe durch Rechnung geprüft.

Die drei von Herrn Elie selbst aufgestellten Bedingungen für die Zulässigkeit seiner Annahme führen auf die Widersprüche

$$0{,}025 = -5{,}70, \quad 22{,}4 = -5{,}3, \quad 33{,}6 = -5{,}94,$$

woraus deren Unhaltbarkeit wohl klar hervorgeht.

1) B. Elie, J. de phys. (2) 5, p. 204, 1886.

Göttingen, am 5. Juli 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1890.

(Fortsetzung.)

A. Kölliker: Ueber den feineren Bau des Rückenmarkes. Aus den Sitzungsberichten der Würzburger Phys. med. Gesellschaft 1890. VI. Sitzung.

Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. Jahrgang 21. 1889. Berlin 1890.

60. Jahresbericht des Voigtländischen Alterthumsforschenden Vereins zu Hohenleuben. Weida 1889.

Germanisches Museum in Nürnberg.

a. Mittheilungen. II. Band. 3. Heft. Jahrgang 1889.

b. Anzeiger. II. Band. 3. Heft. Seite 179 und 288. Jahrgang 1889.

c. Katalog der im G. M. vorhandenen interessanten Bucheinbände. Nürnberg 1889.

Musikalische Werke Friedrich des Grossen. Leipzig.
Proceedings of the R. society. Vol. XLVII. Nr. 287. London.
Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. VII. Part. 1. 1889. Appendices by Prof. J. C. Adams. M. A. T. R. S. Cambridge.
Journal of the R. Microscopical society 1890. Part II. April.
Proceedings of the London mathematical society. Nr. 368—369.
Monthly notices of the R. Astronomical society. Vol. L. Nro. 4, 5. 1890.
The transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIX. Part XII.
Proceedings of the R. Irish Academy. Third series. Vol. I. Nro. 2.
Nature. Vol. 41. Nro. 1061—1069.
Annual report of the Canadian Institute. Session 1888—1889. Toronto 1889.
Geological and natural history survey of Canada.
a) Annual report. (New series.) Vol. III. Part I, II. 1887—1888. Reports A. B. C. E. F.
b. Maps etc. to accompany Annual Report. Vol. III. N. S. 1887—1888. Montreal 1889.
Records of the Geological survey of India. Vol. XXIII. Part 1. Calcutta 1890.
Natural history of Victoria. Prodromus of the Zoology of Victoria. Decade XIX. Melbourne 1889.
Journal and proceedings of the R. society of New-South Wales. Vol. XXIII. 1889. Part 1. Sidney.
Catalogue of the scientific books in the library of the R. S. of New-South Wales. Part. 1. General catalogue. Sidney 1889.
Report of the first meeting of the Australian association for the advancement of science. Sidney 1887. Vol. I. Sidney 1889.
Abhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt.
a. Die Liburnische Stufe und deren Grenzhorizonte. Heft 1. Abth. 1. Geologische Uebersicht und Beschreibung der Faunen und Florenreste. (Abhandl. d. geol. Reichsanst.) Band XIII. Heft 1.
b. Ueber die Liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstadt. (Band XV. Heft 1. Abh. d. K. K. Geolog. Reichsanst.) Wien 1889.
Jahrbuch d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1889. Band XXXIX. Heft 3, 4. Wien 1889.
Verhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Nro. 4. 5. 1890.
Sitzungsberichte d. K. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe 1889. II.
Philos.-histor.-philog. Classe 1889.
Jahresbericht d. K. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften für das Jahr 1889. I. Prag 1890.
Archiv des Vereines für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 22. 3. Heft. Hermannstadt 1890.
Jahresbericht d. Vereines für siebenbürg. Landeskunde. Vereinsjahr 1888—1890. Hermanstadt 1889.
Ungarische Revue 1890. Heft III, IV. Budapest 1890.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1890. Jan. Febr. März. Inhaltsverzeichniss von 1889.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Theil 8. Heft 3. Schluss. Basel 1890.
Mémoires de la société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tome XXX. Seconde partie. Genève 1889—1890.
Wolf: Astronomische Mittheilungen. (LXXV.) Dezember 1889. Zürich.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 7.

Fr. Merkel, über argentinische Gräberschädel. — *Fr. Pockels*, über die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen. — *W. Voigt*, Bestimmung der Elasticitäts-Constanten des brasilianischen Turmalines.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

13. August. № 8.

Universität.

Verzeichniß der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 1890/91.

Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 14. März.

Theologie.

Einleitung in das Alte Testament: Prof. *Smend* fünfstündig um 4 Uhr.

Geschichte des Kanons und des Textes des alten Testaments: *Derselbe* Sonnabend um 12 Uhr publice.

Erklärung des Buches Jesajas: Prof. *Schultz* fünfstündig um 10 Uhr.

Neutestamentliche Theologie: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Ueber die Evangelienfrage: Prof. *Weiss* zweimal um 12 Uhr publice.

Erklärung der synoptischen Evangelien: Prof. *Weiss* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Lünemann* vierstündig um 9 Uhr.

Erklärung der Apostelgeschichte: Prof. *Weiss* dreimal um 12 Uhr.

Erklärung des Briefes Pauli an die Philipper: Prof. *Häring*.

Kirchengeschichte der ersten acht Jahrhunderte: Prof. *Tschackert* fünfmal um 11 Uhr.

Kirchengeschichte Theil II.: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des neunzehnten Jahrhunderts: *Derselbe* vier bis fünfmal um 4 Uhr.

Dogmengeschichte der alten Kirche und des Mittelalters: Prof. *Tschackert* fünfmal um 10 Uhr.

Dogmatik Theil I: Prof. *Schultz* fünfstündig um 12 Uhr.
Theologische Ethik: Prof. *Häring* fünfstündig um 11 Uhr.

Praktische Theologie: Prof. *Knoke* fünfstündig um 5 Uhr.
Praktische Auslegung der Perikopen verbunden mit homiletischen Meditationsübungen: *Derselbe* zweimal um 8 Uhr.
Kirchenrecht siehe unter Rechtswissenschaft S. 299.

Die alttestamentlichen Uebungen der wissenschaftlichen Abtheilung des theologischen Seminars leitet Prof. *Smend* Dienstag um 6 Uhr; die neutestamentlichen Prof. *Wiesinger* Montags um 6 Uhr; die kirchen- und dogmenhistorischen Prof. *Tschackert* Freitags um 6 Uhr; die dogmatischen Prof. *Häring* Mittwochs um 6 Uhr.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten Prof. *Schultz* und Prof. *Knoke* Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich; die Uebungen des liturgischen Seminars leitet Prof. *Knoke* Sonnabends um 9 und um 11 Uhr; die Uebungen des katechetischen Seminars Prof. *Wiesinger* Mittwochs von 2—3 Uhr, Prof. *Knoke* Sonnabends von 2—3 Uhr öffentlich.

Eine historisch-theologische Societät hält Prof. *Wagenmann* einmal in geeigneten Stunden; biblisch-theologische Uebungen Prof. *Weiss* einmal privatissime und gratis.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Privatrechts: Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Merkel.*

Römische Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag von 3—4 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Römischer Civilproceß: Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr Dr. *Goldschmidt.*

Lektüre eines juristischen Schriftstellers aus der römischen Kaiserzeit: Mittwoch von 10—11 Uhr Prof. *Merkel* (unentgeltlich).

Pandekten, I. Theil (Allgemeine Lehren, Obligationenrecht, Pfandrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 8—10 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Römisches Sachenrecht: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr Prof. *v. Jhering.*

Pandekten, II. Theil (Erbrecht und Familienrecht): Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Merkel.*

Conversatorium über Pandekten: Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 6—7 Uhr Dr. *Goldschmidt.*

Pandektenprakticum: Freitag von 4—6 Uhr Prof. *Regelsberger.*

Exegetische Uebungen im corpus juris: Montag von 5—7 Uhr Prof. *Merkel.*

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 11—12 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Deutsches Privatrecht: Montag bis Freitag von 9—10 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Handels-, Wechsel- und Seerecht: Montag bis Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ehrenberg.*

Preußisches Privatrecht: viermal von 11—12 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Die neuen Rechtsbegriffe im deutschen Arbeiterversicherungsrecht: Sonnabend von 11—12 Uhr Dr. *Goldschmidt* öffentlich.

Uebungen im Anschluß an die deutsche Rechtsgeschichte: Donnerstag von 6—7 Uhr Prof. *Frensdorff* öffentlich.

Strafrecht: Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 3—4 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Deutsches Reichs- und Landesstaatsrecht eingeleitet durch eine Uebersicht über das allgemeine Staatsrecht: fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr Prof. *Dove.*

Verwaltungsrecht: Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr Prof. *Frensdorff.*

Völkerrecht: Mittwoch von 12—1 Uhr und Sonnabend von 11—1 Uhr Prof. *v. Bar.*

Kirchenrecht: täglich von 8—9 Uhr Prof. *Dove.*

Civilproceß: Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag von 11—12 Uhr Prof. *Detmold.*

Strafproceß: Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 10—11 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Civilproceßprakticum: Dienstag von 4—6 Uhr Prof. *von Bar.*

Criminalistische Uebungen: Mittw. von 4—6 Uhr Prof. *Ziebarth.*

Vorlesungen über Staatswissenschaft s. S. 307.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie, siehe unter *Naturwissenschaften.*

Knochen- u. Bänderlehre lehrt Dr. *Disse* Montag, Mittwoch und Freitag von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie, I. Theil, trägt vor Prof. *Fr. Merkel* tägl. von 12—1 Uhr.

Anatomie des Gehirns lehrt Dr. *Disse* Montag von 2—3 Uhr öffentlich.

Topographische Anatomie lehrt Prof. *Fr. Merkel* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Examinatorium der Anatomie hält Prof. *Merkel* in passenden Stunden.

Präparirübungen leitet Prof. *Fr. Merkel* täglich von 9—4 Uhr.

Mikroskopische Uebungen für Geübtere hält Dr. *Disse* Dienstag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Uebungen in der normalen Histologie hält Prof. *Krause* viermal wöchentlich für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 2 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Specielle Histologie der Sinnesorgane lehrt Prof. *Krause* öffentlich am Mittwoch um 4 Uhr oder zu passender Stunde.

Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente u. mikroskopische Demonstrationen lehrt Prof. *Herbst* in 6 Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie, II. Theil (Physiologie des Nervensystems u. der Sinnesorgane) lehrt Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Pathologische Anatomie der Knochen und Muskeln trägt öffentlich vor Prof. *Orth* Montag von 6—7 Uhr.

Specielle pathologische Anatomie lehrt Prof. *Orth* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 2—3 Uhr.

Pathologisch-anatomische Demonstrationen hält Prof. *Orth* privatissime Mittwoch und Sonnabend von 2—4 Uhr.

Praktische Uebungen in der pathologischen Histologie leitet Prof. *Orth* Dienstag u. Freitag von 6—8 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit Uebungen lehrt Prof. *Damsch* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr.

Laryngoskopische Uebungen hält Prof. *Damsch* Sonnabend von 12—1 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit Experimenten und praktischen Uebungen im Receptiren und Dispensiren lehrt Prof. *Marmé* Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Die gesammte Arzneimittellehre trägt Prof. *Husemann* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Uebungen im Verschreiben der Arzneimittel leitet Prof. *Husemann* Freitags von 3—4 Uhr.

Specielle Toxikologie, II. Theil, verbunden mit Experimenten trägt Prof. *Marmé* für ältere Mediciner vor Montag u. Donnerstag von 3—4 Uhr.

Arbeiten im pharmakologischen Institut leitet Prof. *Marmé* täglich in passenden Stunden.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Marmé* dreimal wöchentlich Dienstag bis Donnerstag von 8—9 Uhr.

Pharmakognotisch-mikroskopische Uebungen hält Prof. *Marmé* Mittwoch von 10—12 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie, II. Hälfte, trägt vor Prof. *Ebstein* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 4—5 Uhr.

Medicinische Klinik leitet Prof. *Ebstein* fünfmal wöchentlich von 10½—12 Uhr, Sonnabend von 9¼—10¾ Uhr.

Kinderheilkunde lehrt Montag u. Donnerstag von 6—7 Uhr und Dienstag von 5—6 Uhr Prof. *Damsch*.

Medicinische Poliklinik hält Prof. *Damsch* täglich um 12 Uhr öffentlich.

Die Untersuchung des Harns u. Sputums mit praktischen Uebungen leitet Prof. *Ebstein* mit Dr. *Nicolaier* einmal wöchentlich in zu verabredender Stunde.

Specielle Chirurgie, II. Theil, lehrt Prof. *König* viermal wöchentlich von 4—5 Uhr.

Specielle Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Einen chirurgisch-diagnotischen Cursus hält Prof. *Rosenbach* Dienstag u. Freitag von 3—4 Uhr.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen trägt Prof. *Rosenbach* dreimal wöchentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Chirurgische Klinik leitet Prof. *König* von 9½ ohne academ. Viertel bis 10½ Uhr täglich außer Sonnabend.

Chirurgische Poliklinik wird öffentlich Sonnabend von 10¾—12 Uhr von Prof. *König* u. Prof. *Rosenbach* gemeinschaftlich gehalten.

Einen Verbandcursus leitet Dr. *Hildebrand* dreimal wöchentlich in passenden Stunden.

Ausgewählte Capitel aus der speciellen Chirurgie liest Dr. *Hildebrand*.

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Schmidt-Rimpler* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Augenspiegel- und Operationscursus hält Prof. *Schmidt-Rimpler* Mittwoch u. Sonnabend von 12—1 Uhr.

Ueber Krankheiten des vorderen Bulbusabschnittes liest Dr.

Schirmer Donnerstag von 8—9 Uhr und in einer zweiten zu bestimmenden Stunde privatim.

Ueber die praktisch wichtigen Abschnitte der Ohrenheilkunde mit Uebungen im Ohrenspiegeln spricht Prof. *Bürkner* Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr oder zu besser passender Zeit.

Poliklinik für Ohrenkranke hält Prof. *Bürkner* (für Geübtere) Mittwoch u. Sonnabend von 12—1 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Runge* Dienstag, Mittwoch, Freitag, Sonnabend von 8—9 Uhr.

Geburtshülflich.-gynäkologischen Untersuchungscursus hält Prof. *Runge* Dienstag, Freitag von 4—5 Uhr.

Geburtshülfe lehrt Montag u. Donnerstag von 3—4 Uhr Prof. *Runge.*

Physiologie und Pathologie des Wochenbetts bespricht Mittwoch von 4—5 Uhr Prof. *Runge.*

Ueber Frauenkrankheiten: Dr. *Droysen* Mittwoch und Sonnabend von 8—9 Uhr und in einer zu bestimmenden Stunde.

Psychiatrische Klinik in Verbindung mit systematischen Vorträgen über Geisteskrankheiten hält Prof. *L. Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Forensische Psychiatrie mit casuistischen Demonstrationen lehrt (für Juristen) Prof. *L. Meyer* wöchentlich in 2 zu verabredenden Stunden.

Hygiene, I. Theil, lehrt Prof. *Wolffhügel* Montag, Mittwoch und Donnerstag von 5—6 Uhr.

Praktische Uebungen im Anschluß an die Vorlesung über Hygiene hält Prof. *Wolffhügel* unentgeltlich Dienstag und Freitag von 3—4 Uhr.

Hygienische u. bakteriologische Curse giebt Prof. *Wolffhügel* in passenden Stunden.

Arbeiten im hygienischen Institut leitet täglich von 9—5 Uhr Prof. *Wolffhügel.*

Anatomie u. Physiologie der Hausthiere sowie die Lehre von den inneren Krankheiten derselben trägt Prof. *Esser* fünfmal wöchentlich von 9—10 Uhr vor.

Klinische Demonstrationen im Thierhospitale hält Prof. *Esser* in zu verabredenden Stunden.

Philosophie.

Geschichte der neueren Philosophie mit Ueberblick über Patristik und Scholastik unter Zugrundelegung seines Buches „Ge-

schichte der Philosophie nach Ideengehalt und Beweisen": Prof. *Baumann*, Donnerstag und Freitag 5 Uhr.

Kurze Uebersicht über die deutsche Philosophie seit Kant: Prof. *Rehnisch*, Sonnabend öffentlich.

Logik unter Zugrundelegung seines Buches: „Elemente der Philosophie": Prof. *Baumann*, Montag u. Dienstag 5 Uhr.

Logik: Prof. *Rehnisch*, 4 St. 12 Uhr.

Metaphysik und Erkenntnißtheorie: Prof. *Peipers*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *G. E. Müller*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die Eigentümlichkeiten der lebenden Materie: Prof. *G. E. Müller*, Mittwoch 6 Uhr, öffentlich.

Darstellung und Kritik der neueren Theorien über das Wesen des Willens: Prof. *Peipers*, Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Philosophische Uebungen hält Prof. *Baumann* im Anschluß an seine Vorlesungen 1) über Trendelenburgs elementa logices aristoteleae Mittw. 4 Uhr; 2) über Leibniz' Nouveaux essais sur l'entendement humain, Mittw. 5 Uhr, beide öffentlich.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Dienstag und Freitag 11 Uhr öffentlich.

Mathematik, Astronomie und theoretische Physik.

Differentialrechnung: Dr. *Schönflies*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 9 Uhr.

Projective Geometrie: Dr. *Burkhardt*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag 8 Uhr.

Krumme Flächen und Curven doppelter Krümmung: Prof. *Schwarz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 11 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Schwarz*, Montag bis Freitag 9 Uhr.

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Theil II: Prof. *Klein* Mittwoch 11—1 Uhr.

Die exacten Wissenschaften im Alterthume: Dr. *Burkhardt*, Mittwoch 6 Uhr, unentgeltlich.

Analytische Mechanik: Prof. *Klein*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 12 Uhr.

Elektrostatik: Dr. *Drude*, Montag und Donnerstag 3 Uhr.

Hydrodynamik: Prof. *Voigt*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Mathematische Untersuchungen über die Constitution der Molecüle: Prof. *Schering*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Theorie und Geschichte der Bestimmung von Doppelsternen: Prof. *Schur*, Montag, Donnerstag, Sonnabend 11 Uhr.

Ueber die Hülfsmittel der Berechnung historischer Sonnen- u. Mondfinsternisse: Prof. *Schur*, Dienstag, Freitag 11 Uhr.

Uebungen in geometrischen Constructionen: Prof. *Schwarz*, Mittwoch und Sonnabend 3—6 Uhr.

Uebungen in der Differentialrechnung: Dr. *Schönflies*, Mittwoch 9 Uhr.

Uebungen in projectiver Geometrie: Dr. *Burkhardt*, Freitag 8 Uhr, unentgeltlich.

Mathematische Colloquien wird Prof. *Schwarz* unentgeltlich, wie bisher Dienstag 5—7 Uhr, privatissime veranstalten.

Practische Uebungen an den Instrumenten der Königl. Sternwarte: Prof. *Schur*, täglich.

Erdmagnetische Beobachtungen wird im Gaussobservatorium Prof. *Schering*, Montag 7 Uhr zusammen mit dem Assistenten Herrn *Felgenträger* veranstalten.

Im Kgl. math.-phys. Seminare wird Prof. *Riecke* über Elektrooptik vortragen Donnerstag 2 Uhr, Prof. *Schering* mathem. Uebungen Montag 6 Uhr, Prof. *Schwarz* mathem. Uebungen Sonnabend 9 Uhr veranstalten, Prof. *Voigt* ausgewählte Kapitel aus der Lehre vom Galvanismus vortragen Mittwoch 10 Uhr, Prof. *Klein* ausgewählte Kapitel aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen Sonnabend 11—1 Uhr behandeln, Prof. *Schur* astronomische Uebungen veranstalten Dienstag 7 Uhr.

Experimentalphysik s. *Naturwissenschaften.*

Naturwissenschaften.

Specielle Zoologie II. Theil: Prof. *Ehlers*, Mont.—Freit. 9 Uhr.

Anthropologie: Prof. *Ehlers*, Mont., Dienst., Mittw. 6 Uhr.

Vergleichende Osteologie: Dr. *Henking*, Mont. u. Dienst. 3 Uhr.

Die Parasiten des Menschen mit Demonstrationen am Skioptikon: Dr. *Hamann*, Freitag 6 Uhr.

Kritik des Darwinismus (Descendenzlehre und Selektionshypothese): Dr. *Hamann*, Mittwoch 6 Uhr unentgeltlich.

Vergleichende Entwicklungsgeschichte der Wirbellosen, Dr. *Hamann* in 2 zu bestimmenden Stunden.

Ueber Darwinismus (mit Demonstrationen): Dr. *Henking*, Donnerstag 6 Uhr, unentgeltlich.

Zootomischer Kurs: Prof. *Ehlers*, Dienst. u. Mittw. 10—12 Uhr.

Zoologische Uebungen wird Prof. *Ehlers* täglich (mit Ausnahme des Sonnabend) von 10—1 Uhr anstellen.

Zoologische Societät für Vorgeschrittenere: Prof. *Ehlers* unentgeltlich.

Morphologie und Systematik der Thallophyten: Prof. *Peter*, Dienst., Mittw., Freit. 6 Uhr.

Pflanzengeographie: Prof. *Peter*, Mont., Dienst., Donn. 3 Uhr.

Pflanzenanatomie und Entwickelungsgeschichte: Prof. *Berthold*, Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Ueber die Vegetation des Meeres: Prof. *Berthold*, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Demonstrationen an lebenden Pflanzen und Präparaten: Prof. *Peter*, Mittwoch $10^1/_2$—12 Uhr öffentlich.

Ueber Bakterien und Hefen: s. *Landwirthschaft* S. 308.

Mikroskopisch-botanischer Kursus für Anfänger: Prof. *Berthold*, Sonnabend von 9—1 Uhr.

Mikroskopisch-botanischer Kursus für Anfänger: Prof. *Peter*, vierstündig, Sonnabend Vormittag.

Tägliche Arbeiten im pflanzenphysiologischen Institut: Prof. *Berthold*.

Leitung botanischer Arbeiten für Vorgeschrittenere: Prof. *Peter*, täglich, privatissime.

Mineralogie 2. Theil: Prof. *Liebisch*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 12 Uhr.

Physikalische Krystallographie: Prof. *Liebisch*, Mittwoch und Sonnabend 12 Uhr.

Arbeiten im mineralogisch-petrographischen Institut: Prof. *Liebisch*, öffentlich.

Geologie: Prof. *von Koenen*, Montag bis Freitag 8 Uhr.

Ueber einzelne Klassen von Fossilien: Prof. *von Koenen*, Sonnabend 8 Uhr, öffentlich.

Geologische und palaeontologische Uebungen: Prof. *von Koenen* 2 Stunden, öffentlich.

Uebungen im Bestimmen: Prof. *von Koenen*, täglich privatissime, aber unentgeltlich.

Experimentalphysik, zweiter Theil: Magnetismus, Elektricität und Wärme: Prof. *Riecke*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 5 Uhr.

Die Uebungen im physikalischen Institute leiten die Prof. *Riecke* und *Voigt*, in Gemeinschaft mit den Assistenten Dr. *Drude* und Dr. *Nernst*. Für Mathematiker und Physiker: Dienstag und Freitag 2—4 Uhr; für Chemiker: Sonnabend 9—1 Uhr.

Vgl. Mathematisch-physikal. Seminar S. 304.

Allgemeine Chemie, unorganischer Theil (unorganische Experimentalchemie): Prof. *Wallach*, sechs Stunden 9 Uhr.

Die Lehre von der chemischen Verwandtschaft: Dr. *Nernst*, Dienst. und Freit. 6 Uhr.

Organische Chemie für Mediciner: Prof. *von Uslar*, 4 St., 9 Uhr.

Chemie der Benzolderivate: Dr. *Buchka*, Dienst., Mittw. und Donnerst. 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie (organischer Theil): Prof. *Polstorff*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Ueber die Verunreinigungen und Verfälschungen der Nahrungs- und Genußmittel und deren Erkennung: Prof. *Polstorff*, Montag und Mittwoch 12 Uhr.

Pharmacie: Prof. *von Uslar*, viermal 3 Uhr.

Chemisches Colloquium für Mediciner (im Anschluß an das Practicum): Prof. *Wallach*, öffentlich, Mittwoch 3 Uhr.

Technische Chemie für Landwirthe (Zuckerfabrikation, Gährungsindustrien, Molkerei): Prof. *Tollens*, Mont., Dienst., Mittw. 10 Uhr.

Grundzüge der Chemie, II. Theil: Dr. *Pfeiffer*, Donnerstag und Freitag 10 Uhr.

Zuckerbestimmungen, besonders durch Polarisation: Prof. *Tollens*, 1 Stunde, öffentlich.

Agriculturchemische Untersuchungsmethoden: Dr. *Pfeiffer*, in zu verabredender Stunde.

Die chemischen Uebungen und wissenschaftlichen Arbeiten im akadem. Laboratorium leitet Prof. *Wallach* in Gemeinschaft mit Prof. *Polstorff* und Dr. *Buchka* und zwar: 1) Vollpraktikum, Mont. bis Freit. von 9—1 und von 3 bis 6 Uhr; 2) Halbpraktikum, je Vor- und Nachmittags zu denselben Stunden; 3) Chemisches Anfängerpraktikum für Mediciner Nachmittags.

Prof. *Tollens* leitet die praktischen Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium in Gemeinschaft mit Dr. *Dubbers* Montags bis Freitags 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Lateinische Paläographie, II. Theil: Prof. *Steindorff*, Mont. u. Dienst. 10 Uhr.

Mittelalterliche Siegelkunde: Prof. *Steindorff*, Donn. u. Freit. 10 Uhr.

Historisch-diplomatische Uebungen leitet Prof. *Steindorff*, Mittwoch 10 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Geschichte des alten Aegyptens: Prof. *Pietschmann*, Dienst. und Freitag 6 Uhr, öffentlich.

Allgemeine Geschichte des ausgehenden Mittelalters und der Reformationszeit: Prof. *Kluckhohn*, viermal wöchentlich 12 Uhr.

Deutsche Geschichte bis 1816: Prof. *Weiland*, 5 St. 9 Uhr.

Geschichte der deutschen Kaiserzeit: Dr. *v. Kap-herr*, Dienst. bis Freit. 11 Uhr.

Geschichte der deutschen Historiographie seit dem Ausgange des Mittelalters: Prof. *Kluckhohn*, zweimal wöchentlich 8 Uhr.

Geschichte Italiens im Mittelalter: Prof. *Theod. Wüstenfeld*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr, öffentlich in seiner Wohnung.

Historische Uebungen leitet Prof. *Volquardsen*, Dienstag 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen: Prof. *Weiland*, Freitag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Historische Uebungen: Prof. *Kluckhohn*, Montag 6 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 297—298.

Erd- und Völkerkunde.

Allgemeine Erdkunde, Theil II (Morphologie der Erdoberfläche, Ozeanographie, Klimatologie: Prof. *Wagner*, Mont., Dienst, Donnerst., Freit. 11 Uhr.

Kartographischer Kursus für Anfänger: Prof. *Wagner*, Sonnabend 9—12 Uhr, privatissime.

Geographisches Colloquium: Prof. *Wagner*, privatissime, aber unentgeltlich, in später zu bestimmenden Stunden.

Staatswissenschaft.

Nationalökonomie, grundlegender Theil, als Einleitung in das Studium der Staatswissenschaften: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 4 Uhr.

Praktische Nationalökonomie oder Volkswirthschaftspolitik: Prof. *Lexis*, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag 10 Uhr.

Finanzwissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die deutsche und preußische Steuergesetzgebung: Prof. *Cohn*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 5 Uhr.

Statistische Uebungen: Prof. *Lexis*, 2 Stunden.

Nationalökonomische Zeitfragen: Prof. *Mithoff*, Mittw. 5 Uhr, öffentlich.

Staatswissenschaftliche Uebungen: Prof. *Cohn*, Mittw. 5—7 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Landwirthschaft.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Liebscher*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Allgemeine Ackerbaulehre: Prof. *Liebscher*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Betriebslehre: Prof. *Liebscher*, an denselben Tagen, 11 Uhr.

Thierernährungslehre, I. Theil: Dr. *Lehmann*, Donn. u. Freit. 10 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierzüchtungslehre: Prof. *Griepenkerl*, Montag, Dienstag, 5 Uhr.

Die landwirthschaftliche Rassenkunde: Prof. *Griepenkerl*, Mittwoch 5—7 Uhr, öffentlich.

Die Ackerbausysteme (Felderwirthschaft, Feldgraswirthschaft, Fruchtwechselwirthschaft u. s. w.): Prof. *Griepenkerl*, Donnerst. und Freit. 5 Uhr.

Im Anschluß an diese Vorlesungen werden Excursionen nach benachbarten Landgütern und Fabriken veranstaltet werden.

Ueber Bakterien und Hefen: Dr. *Koch*, Mont. 6 Uhr.

Praktische Uebungen im Cultiviren der Bakterien und Hefen hält für Studierende der Landwirthschaft im Anschluß an seine Vorlesung in 2 St. Dr. *Koch*.

Landwirthschaftliche Maschinenkunde: Dr. *Rümker*, Montag u. Donnerstag, 3 Uhr.

Prof. *Henneberg* wird Vorlesungen anzeigen, sobald er wieder hergestellt ist.

Molkereiwesen: Dr. *Rümker*, Mittwoch u. Sonnabend 12 Uhr.

Uebungen im landw. Laboratorium, Prof. *Liebscher*, Mittw. und Sonnabd. 9—1 Uhr, privatissime.

Landwirthschaftl. Seminar: Prof. *Liebscher*, in noch zu bestimmenden Stunden, privatissime, unentgeltlich.

Chemie und praktisch-chemische Uebungen für Landwirthe: vgl. *Naturwissenschaften* S. 306.

Anatomie, Physiologie und Pathologie der Hausthiere: vgl. *Medicin* S. 302.

Literär- und Kunstgeschichte.

Geschichte der Buchdruckerkunst und des Buchhandels im 15. Jahrh.: Prof. *Dziatzko*, Montag, Dienstag, Donnerst. 3 Uhr.

Bibliographische Uebungen: Prof. *Dziatzko*, Freit. 3 Uhr, privatissime, unentgeltlich.

Geschichte der indischen Grammatik: s. *Oriental. Sprachen* S. 309 f.

Geschichte der griechischen Literatur von Alexander bis auf Mithradates: Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, 4 Stunden, 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur von Anfang des 16. bis zu Ende des 18. Jahrh.: Prof. *Heyne*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Ueber die Hauptströmungen der neuern deutschen Literatur seit Goethes Tode: Prof. *Roethe*, Donnerst. 6 Uhr.

Geschichte der altfranzösischen Literatur, II.: Prof. *Vollmöller*, Mont. Dienst. Mittw. Donn. 12 Uhr.

Geschichte der dramatischen Literatur in Frankreich im XVIII. Jahrh.: Lektor *Ebray*, 2 mal wöch. in franz. Sprache.

Shaksperes Leben und Dichtungen: Prof. *Brandl*, Mittwoch, Freitag und Sonnabend, 6 Uhr Abends.

Geschichte der europäischen Kunst im Mittelalter: Prof. *Lange*, Dienst. 6—8 Uhr Abends.

Kunstgeschichte Italiens und Deutschlands im Zeitalter der Renaissance: Prof. *Lange*, Montag 6—8 Uhr Abends.

Alterthumskunde.

Griechische Alterthümer: Prof. *Volquardsen*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag 8 Uhr.

Ueber Pompei, mit besonderer Berücksichtigung der Wandmalereien: Prof. *Dilthey*, Dienst., Donn., Freit., 12 Uhr.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* ausgewählte Kunstwerke, namentlich Griechische und Römische Münzen, zur Erklärung vorlegen, Sonnabend 12 Uhr öffentlich.

Die eingereichten Abhandlungen der Mitglieder des K. archäologischen Seminars wird er privatissime beurtheilen.

Archäologische Uebungen: Prof. *Dilthey*, Sonnabend 10—12 Uhr, öffentlich.

Vergleichende Sprachlehre.

Vergleichende Flexionslehre des Sanskrit, Griechischen und Germanischen: Prof. *Bechtel*, Dienst., Donnerst. u. Freitag, 9 Uhr.

Uebungen auf dem Gebiete der vergleichenden Lautlehre: Prof. *Bechtel*, privatissime, gratis, Sonnabend, 12 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das alte Testament s. unter *Theologie* S. 297.

Anfangsgründe des Arabischen: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Die arabische Grammatik lehrt 5 mal um 11 Uhr Prof. *de Lagarde*, der auch den 1. Band der Beiruter Chrestomathie erklären läßt.

Eine syrische Gesellschaft leitet zu noch zu bestimmenden Stunden Prof. *de Lagarde*, privatissime, aber unentgeltlich.

Fortsetzung der Sanskritgrammatik und Erklärung des Hitopadeça: Prof. *Kielhorn*, Mittwoch und Sonnabend 8 Uhr.

Erklärung von Bhavabhûti's Uttararâmacharita: Prof. *Kielhorn*, Montag, Mittwoch 9 Uhr.

Erklärung ausgewählter Hymnen des Ṛigveda mit Sâyaṇa's Commentare: Prof. *Kielhorn*, Mont. 8 Uhr, und Sonnab. 9 Uhr, öffentl.

Erklärung der Lacqukaumudî: Prof. *Kielhorn*, einmal wöchentlich, privatissime u. gratis.

Schrift und Sprache des alten Aegypten, 2. Cursus: Prof. *Pietschmann*, in zu verabredender Stunde, privatissime, unentgeltlich.

Griechische und Lateinische Sprache.

Syntax der griechischen Sprache: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 9 Uhr.

Euripides Schutzflehende: Prof *v. Wilamowitz-Moellendorff*, vierstündig 8 Uhr.

Ueber Cicero's Leben und Schriften, mit Interpretation der Briefe an Atticus: Prof. *Leo*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 10 Uhr.

Interpretation der ältesten italischen Sprachdenkmäler: Prof. *Leo*, privatissime.

Im K. philologischen Seminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe* und Prof. *von Wilamowitz-Moellendorff*, Mittwoch 11 Uhr; läßt Lysias R. 13 erklären Prof. *Sauppe*, Mont. und Donn., 11 Uhr; läßt Catulls Hochzeitslieder erklären Prof. *v. Wilamowitz*, Dienst. und Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im K. philologischen Proseminar wird Prof. *Leo* Aristophanes Plutus interpretiren lassen, sowie die Disputationen über die Arbeiten der Mitglieder leiten, Mittw. 9—11 Uhr, öffentlich.

Deutsche Sprache.

Einleitung in die niederdeutsche Sprache und Literatur mit Erklärung ausgewählter Stellen des Heliand und Reineke Vos: Prof. *Roethe*, Mont., Mittw., Freit. 3 Uhr.

Erklärung der Gudrun (nach Martins kleiner Ausgabe): Prof. *Roethe*, Dienstag, Donnerstag 3 Uhr.

Im K. deutschen Seminar läßt Prof. *Heyne* den guten Gerhard des Rudolf von Ems erklären, Freitag 12 Uhr, behandelt Prof. *Roethe* Goethes Faust, Dienstag 12 Uhr, und bespricht Prof. *Roethe* die Arbeiten der Mitglieder, Donnerst. 12 Uhr, alles privatissime aber unentgeltlich.

Im deutschen Proseminar leitet Prof. *Heyne* althochdeutsche Uebungen, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich; erklärt Prof. *Roethe* für Anfänger den Gregorius Hartmanns, von Aue nach Pauls Ausgabe, Mittwoch 12 Uhr, öffentlich.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte* S. 309.

Neuere Sprachen.

Geschichte der altfranzösischen Litteratur: s. Lit. Gesch. S. 309.

Französische Metrik: Dr. *Andresen*, Mont. u. Dienst., 10 Uhr.

Einführung in die provenzalische Sprache und Erklärung ausgewählter provenzalischer Denkmäler: Dr. *Cloetta*, Mont. und Donnerst. 11 Uhr.

Erklärung verschiedenartiger altfranzösischer Texte: Dr. *Cloetta*.

Historische Grammatik des Alt- und Mittel-Englischen mit besonderer Rücksicht auf Dialekte und Schriftsprache: Prof. *Brandl*, Dienst., Donnerst. und Sonnabend 8 Uhr Morgens.

Shaksperes Leben und Dichtungen: s. Lit. Gesch. S. 309.

Erklärung von Cynewulfs Elene: Dr. *F. Holthausen*, 2 mal wöch.

Englische Metrik: Dr. *F. Holthausen*, 2 mal wöch.

Im romanischen Seminar giebt Prof. *Vollmöller*, Dienstag 6—8 Uhr, die Erklärung des Chevalier au Lyon von Christian von Troyes; provenzalische Uebungen leitet Dr. *Andresen*, Mont. 6 Uhr; Dr. *Cloetta* leitet die Erklärung von Dante's Komödie, Domerst. 6—8 Uhr.

Neufranzösische Uebungen: Lektor *Ebray*, drei Stunden, im romanischen Seminar (a. Uebersetzung eines deutschen Schriftstellers ins Franz., b. eines französ. ins Deutsche, c. Conversation).

Im englischen Seminar hält Prof. *Brandl* Uebungen im Uebersetzen ins Altenglische: 6—8 Uhr Abends an einem zu bestimmenden Tage.

Neuenglische Uebungen stellt im englischen Seminar Lektor Dr. *Miller* an zwei Tagen 6—8 Uhr an, a) in Grammatik und Stilistik, b) Lektüre von Thackeray's Book of Snobs, c) Uebersetzung von Hauff „das Wirthshaus im Spessart", d) Vorträge über Johnson und seine Zeitgenossen, in englischer Sprache.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Uebungen im Erklären und Bestimmen der Handzeichnungen alter Meister in der Universitätssammlung: Prof. *Lange*, Sonnabend 12 Uhr.

Harmonielehre: Prof. *Freiberg*, wöch. 2 Stunden, öffentlich. — Auch hält er Uebungen im Ensemblespiel.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Prof. *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Prof. *Hille* ein.

Unterricht im Zeichnen ertheilt Zeichenlehrer *Peters*, Sonnabend 2—4 Uhr, unentgeltlich.

Unterricht im Malen *Derselbe* in zu verabredenden Stunden.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ. Stallmeister, Rittmeister a. D. *Schweppe*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, Sonnabend, Vormittags v. 8—12, und Nachm. (außer Sonnab.) v. 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*, Montag und Donnerstag 8—10 Uhr Abends.

Oeffentliche Sammlungen.

In der *Universitätsbibliothek* ist das Ausleihezimmer an den Wochentagen von 11—1 und von 2—3 Uhr, der Lesesaal von 10—4 Uhr geöffnet. Verliehen werden Bücher nach Abgabe einer Semesterkarte mit der Bürgschaft eines Professors.

Die *Gemäldesammlung* (Aula, 1 Treppe hoch links) ist Sonntags von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 7—12 und von 2—6 Uhr geöffnet.

Die *mineralogische* und die *geologisch-paläontologische Schausammlung* sind im Winterhalbjahr bis zum 11. December Sonnabends von 2 bis 4 Uhr dem Publicum geöffnet.

Die Sammlungen des *landwirthschaftlichen Instituts* sind dem Publicum Mittwoch Nachmittag von 2—4 Uhr zugänglich. Anmeldung im Institutsgebäude.

Besuchszeit des *agriculturchemischen Laboratoriums* Donnerst. v. 10—12 Uhr.

Ueber den Besuch und die Benutzung der *theologischen Seminarbibliothek*, des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens* und des *pflanzenphysiologischen Instituts*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Kabinets* und *Laboratoriums*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des K. philologischen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Arbeitszimmers des K. deutschen Seminars*, der *Bibliothek* und des *Lesezimmers des K. mathematisch-physikalischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, der *Sammlungen des landwirthschaftlichen Instituts* bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissar, Pedell *Mankel* (Jüdenstrasse 11), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten und auch im voraus Bestellungen machen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

R Coll of Surg

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND LIBRARY 24 OCT 90

20. August. **№ 9.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli.

Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen.

Von

Julius Weingarten, Corresp.

Bekanntlich entspricht jeder in einem begrenzten Raume eindeutigen die Zeit nicht explicite enthaltenden Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung eine in diesem Raume mögliche stationäre Bewegung einer äußeren Kräften nicht unterworfenen homogenen incompressiblen Flüssigkeit.

Für diese Bewegung sind die Flächen gleichen hydrodynamischen Druckes zugleich Flächen gleicher Geschwindigkeit der in ihnen enthaltenen Flüssigkeitstheilchen. Unter den mannigfachen Bewegungen, welche den verschiedenen Lösungen jener Differentialgleichung entsprechen, beanspruchen diejenigen ein besonderes In-

teresse, für welche eine oder mehrere der Flächen gleichen Druckes aus Stromlinien gebildet sind.

Herr von Helmholtz hat zuerst Beispiele solcher Bewegungen entdeckt und dargestellt, bei denen Stromflächen auftreten, deren Stromlinien nicht in ihrem ganzen Verlaufe, sondern nur theilweise mit derselben constanten Geschwindigkeit durchlaufen werden. Diese Beispiele entsprechen der Anwendung von Potentialfunctionen, die nur von zweien der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des Raumes abhängen, oder auf solche zurückführbar sind. Allein selbst wenn man auf die Bedingung verzichtet, daß nur einzelne Theile einer Stromfläche Flächen gleichen Druckes sein sollen, so scheint doch bisher kein Beispiel einer allgemeinen räumlichen Potentialfunction gegeben worden zu sein, welchem eine Flüssigkeitsbewegung entspricht, für die eine Stromfläche zugleich Fläche gleichen Druckes wird. Auch scheinen die bisher fast ausschließlich untersuchten im ganzen unendlichen Raume eindeutigen Potentialfunctionen zur Darstellung solcher Bewegungen nicht geeignet zu sein.

Für die von Herrn von Helmholtz entdeckten Bewegungen findet die Eigenthümlichkeit statt, daß zwischen den Componenten der Geschwindigkeit jedes bewegten Punktes der Flüssigkeit, d. h. zwischen den 3 ersten Derivirten des betreffenden Geschwindigkeitspotentials, eine und dieselbe lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Diese Bemerkung führt dazu, zu untersuchen, ob unter denjenigen Potentialfunctionen, zwischen deren ersten Derivirten überhaupt eine und dieselbe Gleichung besteht, solche gefunden werden können, welche zur Darstellung von Bewegungen der in Rede stehenden Art geeignet sind. Der Erfolg bestätigt diese Vermuthung.

I.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Aufsuchung derjenigen Potentialfunctionen, zwischen deren ersten Derivirten in jedem durch rechtwinklige Coordinaten x, y, z bestimmten Punkte des Raumes eine und dieselbe Gleichung besteht, oder mit anderen Worten, derjenigen Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.

Wenn für eine Function V der Variablen x, y, z, deren Differential durch die Gleichung

$$dV = \xi dx + \eta dy + \zeta dz \tag{1.}$$

gegeben sei, eine nicht lineare Gleichung zwischen den ersten Derivirten ξ, η, ζ besteht, so können die Größen ξ, η, ζ als die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer krummen Fläche aufgefaßt, und als Functionen zweier unabhängiger Variablen p, q dargestellt gedacht werden, welche Functionen wir, wenigstens in den in Betracht kommenden Gebieten der Argumente p, q, als eindeutig voraussetzen wollen.

Die Differentialgleichung (1) kann in die nachstehende:

$$d(x\xi+y\eta+z\zeta-V) = \left(x\frac{\partial\xi}{\partial p}+y\frac{\partial\eta}{\partial p}+z\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)dp+\left(x\frac{\partial\xi}{\partial q}+y\frac{\partial\eta}{\partial q}+z\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)dq$$

umgeformt werden, und diese sagt aus, daß unter der gemachten Voraussetzung die nachstehenden Gleichungen, in denen θ eine Function der Größen p, q allein bezeichnet,

$$\begin{aligned} x\xi+y\eta+z\zeta-V &= \theta \\ x\frac{\partial\xi}{\partial p}+y\frac{\partial\eta}{\partial p}+z\frac{\partial\zeta}{\partial p} &= \frac{\partial\theta}{\partial p} \\ x\frac{\partial\xi}{\partial q}+y\frac{\partial\eta}{\partial q}+z\frac{\partial\zeta}{\partial q} &= \frac{\partial\theta}{\partial q} \end{aligned} \qquad (2.)$$

statthaben müssen. Hiernach bestimmen die Gleichungen

$$V = x\xi+y\eta+z\zeta-\theta = \Sigma x\xi-\theta \qquad (3.)$$

$$0 = x\frac{\partial\xi}{\partial p}+y\frac{\partial\eta}{\partial p}+z\frac{\partial\zeta}{\partial p}-\frac{\partial\theta}{\partial p} = \Sigma x\frac{\partial\xi}{\partial p}-\frac{\partial\theta}{\partial p} \qquad (4.)$$

$$0 = x\frac{\partial\xi}{\partial q}+y\frac{\partial\eta}{\partial q}+z\frac{\partial\zeta}{\partial q}-\frac{\partial\theta}{\partial q} = \Sigma x\frac{\partial\xi}{\partial q}-\frac{\partial\theta}{\partial q} \qquad (5.)$$

in denen ξ, η, ζ und θ irgendwelche Functionen der Größen p, q bezeichnen, alle Functionen V, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. Wird noch die Function θ als eindeutig vorausgesetzt, so folgt aus den Gleichungen (4) und (5), daß jedem bestimmten Werthepaare der Größen p, q eine und nur eine Gerade im Raume entspricht, und daß bei entsprechender Einschränkung des Größengebiets der Argumente p, q zweien von einander verschiedenen Werthepaaren nie dieselbe Gerade zugehört. In dem durch die Gleichungen (4, 5) dargestellten Strahlensystem entspricht daher bei solcher Einschränkung des Gebietes (p, q) jedem Strahle nur ein bestimmtes Werthepaar p, q.

Innerhalb eines Raumgebietes, für welches jeder Punkt (x, y, z) nur von einem Strahle des Systems getroffen wird, sind daher die

Werthe der Größen p und q eindeutig durch die Coordinaten x, y, z dieses Punktes bestimmt, und demnach vermöge der Gleichung (3) auch die Function V.

Zur Darstellung der zweiten Differentialquotienten der Function V sind zunächst vermöge der Gleichungen (4) und (5), welche die Veränderlichen p und q implicite als Functionen der Coordinaten x, y, z definiren, die ersten Differentialquotienten dieser Veränderlichen in Bezug auf die Coordinaten zu ermitteln. Man erhält durch partielle Differentiation in Bezug auf die Coordinate x die Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial\xi}{\partial p} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2\xi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial\xi}{\partial q} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q}\right)\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\Sigma x \frac{\partial^2\xi}{\partial q^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial q^2}\right)\frac{\partial q}{\partial x}$$

und zwei ähnliche zur Bestimmung der Derivirten in Bezug auf jede der Coordinaten y und z. Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$C_{11} = \frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} - \Sigma x \frac{\partial^2\xi}{\partial p^2},\quad C_{12} = \frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q} - \Sigma x \frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q},\quad C_{22} = \frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} - \Sigma x \frac{\partial^2\xi}{\partial q^2}$$

$$\delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 \tag{6.}$$

ergeben sich:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{C_{22}\frac{\partial\xi}{\partial p} - C_{12}\frac{\partial\xi}{\partial q}}{\delta} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{C_{11}\frac{\partial\xi}{\partial q} - C_{12}\frac{\partial\xi}{\partial p}}{\delta} \tag{7.}$$

und durch Vertauschung von ξ mit η oder ζ die betreffenden Derivirten von p, q in Bezug auf die Coordinaten y oder z.

Wenn man die Functionen ξ, η, ζ als die Coordinaten der Punkte einer krummen Fläche (ξ, η, ζ) betrachtet, so erweist es sich als vortheilhaft, die Ausdrücke für die Größen C_{ik} mit Hülfe einiger allgemeinen Formeln der Theorie der krummen Flächen umzugestalten. Ich werde diese Formeln in derjenigen Form benutzen, in der ich sie in der Abhandlung „Ueber die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche.“ (Journal für Mathematik Bd. 100, pag. 300—301) mitgetheilt habe.

Bezeichnen noch X, Y, Z die Coordinaten der nach Gauss vermittelten Abbildung eines Punktes der Fläche (ξ, η, ζ) auf eine Kugel mit dem Radius Eins, und setzt man das Bestehen der Gleichungen

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = a_{11}dp^2 + 2a_{12}dpdq + a_{22}dq^2$$
$$dXd\xi + dYd\eta + dZd\zeta = c_{11}dp^2 + 2c_{12}dpdq + c_{22}dq^2$$

voraus, so ist bekanntlich die Summe der Hauptkrümmungen in einem bestimmten Punkte der Fläche (ξ, η, ζ) durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{c_{22}a_{11} - 2c_{12}a_{12} + c_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

gegeben, und es gelten für die zweiten Differentialquotienten der Coordinate ξ die Relationen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial p^2} &= \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial q} - c_{11}X \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q} &= \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial q} - c_{12}X \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2} &= \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial q} - c_{22}X
\end{aligned} \qquad (8.)$$

so wie die entsprechenden für die Coordinaten η, ζ. (A. a. O. pag. 301).

Mit Hilfe dieser letzteren Gleichungen gehen die Werthe der durch die Gleichungen (6) bestimmten Größen C_{ik} in die nachstehenden über:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q} + c_{11}R \\
C_{12} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q} + c_{12}R \\
C_{22} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q} + c_{22}R \\
R &= Xx + Yy + Zz = \Sigma Xx.
\end{aligned} \qquad (9.)$$

Vermöge der Gleichungen (7) erhält man nunmehr für die Differentialquotienten der Derivirten ξ, η, ζ in Bezug auf die Coordinaten x, y, z oder für die entsprechenden zweiten Differentialquotienten der Function V die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{\delta}\left[C_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2 - 2C_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right) + C_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2\right] \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{1}{\delta}\left[C_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)^2 - 2C_{12}\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right) + C_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2\right] \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{1}{\delta}\left[C_{22}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)^2 - 2C_{12}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right) + C_{11}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

aus deren Addition die Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{\delta}\left[a_{11}C_{22}-2a_{12}C_{12}+a_{22}C_{11}\right]$$

hervorgeht. Nach Einführung der Werthe der Ausdrücke C_{ik} aus (9.) und nachdem man bemerkt hat, daß einer bekannten Umformung zufolge

$$a_{22}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2}-\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)-2a_{12}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q}-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)$$
$$+a_{22}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}-\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p}-\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)=\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\Delta(\theta)$$

wenn $\Delta(\theta)$ den zweiten Differentialparameter der Function θ für die Fläche (ξ, η, ζ) bezeichnet, verwandelt sich die Gleichung (10.) in:

$$(11.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\delta}\left[\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)R+\Delta(\theta)\right].$$

Diese Gleichung beweist, daß eine Function V, deren Hesse'sche Determinante verschwindet, die Potentialgleichung stets dann und nur dann erfüllt, wenn gleichzeitig den Bedingungen

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=0,\quad \Delta(\theta)=0$$

Genüge geschieht, d. h. wenn erstens die Fläche (ξ, η, ζ) eine Minimalfläche ist, und zweitens der zweite Differentialparameter der Function θ identisch verschwindet. Diese letztere Bedingung erfordert, in anderer Form ausgesprochen, das θ irgend ein Integral der Differentialgleichung:

$$(12.)\qquad \frac{\partial\dfrac{a_{22}\dfrac{\partial\theta}{\partial p}-a_{12}\dfrac{\partial\theta}{\partial q}}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}}{\partial p}+\frac{\partial\dfrac{a_{11}\dfrac{\partial\theta}{\partial q}-a_{12}\dfrac{\partial\theta}{\partial p}}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}}{\partial q}=0$$

sei, von welcher Gleichung im Falle der Minimalflächen ξ, η, ζ bekanntlich selbst Integrale sind.

Wenn andererseits die Hesse'sche Determinante einer Potentialfunction verschwindet, so besteht zwischen den ersten Derivirten dieser Function nothwendig eine Gleichung, welche mit einer Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche übereinstimmt.

Wir wollen nunmehr in der weiteren Folge unter ξ, η, ζ stets die Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche als Functionen der, zwei Curvenschaaren dieser Fläche bestimmenden, Parameter p, q dargestellt, verstehen, und unter θ irgend ein Integral der Differentialgleichung (12). Alsdann ergeben die Gleichungen:

$$V = x\xi + y\eta + z\zeta - \theta \tag{3.*}$$

$$0 = x\frac{\partial \xi}{\partial p} + y\frac{\partial \eta}{\partial p} + z\frac{\partial \zeta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial p} \tag{4.*}$$

$$0 = x\frac{\partial \xi}{\partial q} + y\frac{\partial \eta}{\partial q} + z\frac{\partial \zeta}{\partial q} - \frac{\partial \theta}{\partial q} \tag{5.*}$$

eine, oder besser, jede Potentialfunction V von verschwindender Hesse'scher Determinante. Der analytische Charakter, die Verzweigung dieser Function im Raume, wird wesentlich durch die geometrischen Eigenschaften des durch die Gleichungen (4*, 5*) bestimmten Strahlensystems bedingt sein, welche Gleichungen die Parameter p, q als Function der Coordinaten x, y, z definiren.

Der Kürze wegen, und ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, wollen wir in den ferneren Entwickelungen die Parameter p, q durchweg als orthogonalen isothermen Curvenschaaren der Minimalfläche angehörig betrachten, mit anderen Worten, wir setzen voraus, daß das Quadrat der Länge des Linienelementes der Minimalfläche (ξ, η, ζ) durch Einführung dieser Parameter die Form

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \mu(dp^2 + dq^2) \tag{13.}$$

annehme. Diese Voraussetzung hat bekanntlich auch das Bestehen einer Gleichung von der Form

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \lambda(dp^2 + dq^2) \tag{14.}$$

zur nothwendigen Folge.

Alsdann verwandelt sich die Gleichung (12) in

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} = 0 \tag{12.*}$$

welcher Differentialgleichung die Function θ sowie die Functionen ξ, η, ζ der Gleichungen 3*, 4* und 5* zu genügen haben.

Es möge daran erinnert werden, daß für die Minimalflächen sowohl Parameter der Krümmungslinien wie auch Parameter der asymptotischen Linien die von nun an für die Parameter p, q vorausgesetzte Eigenschaft besitzen.

Ehe wir zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften des, bei der Bestimmung der Function V auftretenden Strahlensystems übergehen, wollen wir noch hervorheben, daß die isothermen Parameter p, q, wenn man sie den Gleichungen (4*, 5*) gemäß als Functionen der Coordinaten x, y, z auffaßt, selbst Potentialfunctionen sind. Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich leicht mit Hilfe eines Theorems von Jacobi (Jacobi Gesammelte Werke Bd. II. pag. 208)[1]), nach welchem jede Größe σ, die als Function von x, y, z durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

bestimmt wird, in welcher A, B, C beliebige Functionen von σ bedeuten, die der Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

genügen, eine Potentialfunction ist.

Die zwei Gleichungen (4*, 5*) lassen sich nämlich durch die eine:

$$0 = x\left(\frac{\partial\xi}{\partial p} - i\frac{\partial\xi}{\partial q}\right) + y\left(\frac{\partial\eta}{\partial p} - i\frac{\partial\eta}{\partial q}\right) + z\left(\frac{\partial\zeta}{\partial p} - i\frac{\partial\zeta}{\partial q}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial p} - i\frac{\partial\theta}{\partial q}$$

ersetzen. Für diese Gleichung verschwindet offenbar, wegen der Voraussetzung isothermer Parameter, die Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z. Ferner sind sämmtliche Coefficienten derselben, in Folge der für die Functionen ξ, η, ζ und θ geltenden Gleichung (12*) der Differentialgleichung

$$i\frac{\partial\psi}{\partial p} = \frac{\partial\psi}{\partial q}$$

unterworfen, welche aussagt, daß diese Coefficienten Functionen der Größe $\sigma = p + qi$ sind. Es ist daher σ selbst, und folglich auch jede der Größen p, q eine Potentialfunction.

Um jetzt die Gleichungen (4*, 5*) des bei unseren Betrachtungen auftretenden Strahlensystems in eine angemessene Form zu setzen, wollen wir drei neue Functionen u, v, w der Parameter p, q in die Rechnung einführen, welche der Bedingung genügen, daß

$$d\theta = ud\xi + vd\eta + wd\zeta \tag{13.}$$

wird. Bei Erfüllung dieser Bedingung gehen die Gleichungen des Strahlensystems über in die folgenden:

---

1) Journal für Mathematik. Bd. 36. pag. 113—134.

$$(x-u)\frac{\partial \xi}{\partial p}+(y-v)\frac{\partial \eta}{\partial p}+(z-w)\frac{\partial \zeta}{\partial p} = 0$$

$$(x-u)\frac{\partial \xi}{\partial q}+(y-v)\frac{\partial \eta}{\partial q}+(z-w)\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0$$

aus denen folgt:

$$x-u = rX, \quad y-v = rY, \quad z-w = rZ \qquad (4.^{**})$$

welche das Strahlensystem als ein von den Punkten einer Fläche (u, v, w) ausgehendes darstellen und zeigen, daß jeder von einem Punkte (u, v, w) ausgehende Strahl die Richtungscosinus X, Y, Z besitzt. Drei Functionen u, v, w, welche der Bedingung (13) genügen, verlieren offenbar diese Eigenschaft nicht, wenn man sie beziehungsweise um $\tau X, \tau Y, \tau Z$ vermehrt, unter τ eine willkürliche Function von p, q verstanden; eine Operation, durch welche das Strahlensystem nur auf eine andere Anfangsfläche bezogen wird.

Die Gleichung (13) erfordert erstens die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial p} \qquad (14.)$$

und wegen der für die Function θ geltenden Gleichung (12*) die auch die Functionen ξ, η, ζ beherrscht, das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0. \qquad (15.)$$

Um die Bedeutung dieser Gleichungen in einfacherer Form zu übersehen, wollen wir für einen Augenblick den isothermen Parametern p, q die Bedeutung von Parametern der Krümmungslinien der Minimalfläche ξ, η, ζ beilegen. Bezeichnet alsdann ϱ den Hauptkrümmungsradius dieser Minimalfläche im Punkte (p, q), so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \varrho\frac{\partial X}{\partial p}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial q} = -\varrho\frac{\partial X}{\partial q}$$

und entsprechende für die Differentialquotienten von η und ζ. Die Gleichungen (15.) und (16.) gehen alsdann mit Hilfe der vorstehenden über in:

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial p} = 0 \qquad (14.^{*})$$

$$(15.^*)\quad \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial p}=\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial q}$$

denen genügt wird, wenn man die Functionen u, v, w der Bedingung:

$$(16.)\quad dXdu+dYdv+dZdw=0$$

unterwirft, welche keine andere ist, als diejenige, die die unendlich kleinen Deformationen einer Kugel vom Radius Eins bestimmt. Die Linienelemente der durch sie bestimmten Fläche (u, v, w) correspondiren den betreffenden der Kugel rechtwinklig.

Aus dreien dieser Bedingung genügenden Functionen u, v, w kann man, wie oben bemerkt, drei andere allgemeinere ableiten. Allein es erweist sich als vortheilhaft, gerade diese Functionen u, v, w zur Bestimmung der Ausgangsfläche des betrachteten Strahlensystsms zu wählen, da sie die Coordinaten der Mittelfläche desselben bestimmen.

In der im Anfange angeführten Abhandlung über die unendlich kleinen Deformationen einer krummen Fläche ist die Bestimmung der durch die Gleichung (16) definirten Functionen u, v, w auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, zurückgeführt worden. Auch ohne die dort gegebenen Entwickelungen verfolgen zu müssen, wird man aus den nachstehend mitgetheilten Formeln für die Functionen u, v, w das Bestehen der Gleichung (16) ohne Weiteres verificiren können.

Ergiebt sich für die betrachtete Minimalfläche, für irgend welche Parameter p, q zweier orthogonalen isothermen Curvenschaaren die Gleichung:

$$(14.)\quad dX^2+dY^2+dZ^2=\lambda(dp^2+dq^2)$$

und ist φ irgend ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(17.)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}+2\lambda\varphi=0$$

so bestimmen die Gleichungen

$$(18.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p}&=X\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi\frac{\partial X}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial q}&=-X\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\varphi\frac{\partial X}{\partial p}\\ \frac{\partial v}{\partial p}&=Y\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi\frac{\partial Y}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q}&=-Y\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\varphi\frac{\partial Y}{\partial p}\\ \frac{\partial w}{\partial p}&=Z\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\varphi\frac{\partial Z}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial q}&=-Z\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\varphi\frac{\partial Z}{\partial p} \end{aligned}$$

die gesuchten Functionen u, v, w durch Quadraturen.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (17) ist durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial q} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

gegeben, wenn ψ irgend eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = 0$$

bezeichnet, von welcher Behauptung man sich leicht durch eine directe Rechnung überzeugt. Wenn man den obigen Werth von φ zur Darstellung der Functionen u, v, w durch die Gleichungen (18) benutzt, so erweisen sich die erforderten Quadraturen als ausführbar, und man erhält für u, v, w die Bestimmungen

$$\begin{aligned} u &= \Omega X - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial q} \\ v &= \Omega Y - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial q} \\ w &= \Omega Z - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial q} \\ \Omega &= \frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q}, \end{aligned} \qquad (18.^*)$$

durch welche die Gleichung (16) sich nach unmittelbarer Rechnung allgemein erfüllt erweist.

Der Differentialgleichung (17) genügt bekanntlich das vom Anfangspunkte der Coordinaten ξ, η, ζ auf die im Punkte (p, q) der betrachteten Minimalfläche stattfindende Tangentialebene gefällte Loth

$$P = X\xi + Y\eta + Z\zeta.$$

Führt man dasselbe als gegebene unabhängige Variable in die Rechnung ein, so kann man aus den Gleichungen (18) die Folgerungen:

$$\begin{aligned} \xi\frac{\partial u}{\partial p} + \eta\frac{\partial v}{\partial p} + \zeta\frac{\partial w}{\partial p} &= P\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\frac{\partial P}{\partial q} \\ \xi\frac{\partial u}{\partial q} + \eta\frac{\partial v}{\partial q} + \zeta\frac{\partial w}{\partial q} &= -P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi\frac{\partial P}{\partial p} \end{aligned}$$

ziehen, und hiernach der Function θ die Gestalt

$$\theta = u\xi + v\eta + w\zeta - \int (\xi du + \eta dv + \zeta dw)$$

$$= u\xi + v\eta\zeta + w - \int \left\{ \left(P\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\frac{\partial P}{\partial q} \right) dp + \left(-P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi\frac{\partial P}{\partial p} \right) dq \right\}$$

geben.

Das System der Gleichungen (3*, 4*, 5*), welches jede Potentialfunction V mit verschwindender Hesse'scher Determinante definirt, läßt sich hiernach unter Benutzung der Gleichungen (4**) auch in das nachstehende verwandeln:

$$\text{(A.)} \quad V = rP + \int \left\{ \left(P\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \varphi\frac{\partial P}{\partial q} \right) dp + \left(-P\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi\frac{\partial P}{\partial p} \right) dq \right\}$$

$$\text{(B.)} \quad \begin{aligned} x &= u + rX \\ y &= v + rY \\ z &= w + rZ \end{aligned}$$

welches vermöge der Gleichungen (B) die Variablen p, q, r als Functionen der Coordinaten eines Punktes (x, y, z) des Raumes bestimmt, und nach geschehner Bestimmung für V eine Potentialfunction mit verschwindender Hesse'scher Determinante ergiebt.

Zur Darstellung dieser Gattung von Potentialfunctionen ist daher die Kenntniß irgend zweier orthogonalen isothermen Curvenschaaren der Kugel und die Kenntniß irgend zweier Integrale P, φ der Differentialgleichung (17) ausreichend. Das Strahlensystem (B) ist von der Wahl der Function P unabhängig, während die Differentialquotienten von V in Bezug auf die Coordinaten x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes irgend einer Minimalfläche angeben.

Von welcher besonderen Wahl einer Minimalfläche ξ, η, ζ man auch ausgehe, um eine Potentialfunction von verschwindender Hesse'scher Determinante zu bestimmen, so wird man doch stets zur Bestimmung der Parameter p, q als Functionen der Coordinaten x, y, z auf das nämliche Strahlensystem (B) geführt werden, das keine Beziehung zu dieser besonderen Wahl mehr enthält, sondern nur eine solche zur Wahl der Function θ.

Was dieses Strahlensystem selbst anbetrifft, so lassen sich vermöge der von Herrn Kummer gegebenen Formeln mit Hilfe der Gleichung

$$dXdu + dYdv + dZdw = 0$$

die allgemeinen geometrischen Eigenschaften desselben sofort übersehen. Diese Formeln ergeben für die Werthe r', r'' der Abscissen r der Brennpunkte dieses Systems unmittelbar die Gleichungen

$$r' + r'' = 0 \qquad r'r'' = \varphi^2,$$

welche zeigen, daß die Fläche u, v, w die Mittelfläche des Systems darstellt, und daß dasselbe ein Strahlensystem mit imaginären Brennpunkten ist. Nur für solche Werthe p, q, für welche die Function φ der Null gleich wird, findet ein Schneiden zweier Nachbarstrahlen in der Fläche (u, v, w) selbst statt, und alsdann stellt die Curve $r = 0$, $\varphi = 0$ eine in dieser Fläche liegende vereinzelte Brennlinie dar.

Das Strahlensystem (B) ist schon längst als ein mit der Theorie der Minimalflächen auf das Innigste verknüpftes von Herrn Ribaucour (Étude des élassoides ou surfaces à courbure moyenne nulle) erkannt und in die Theorie derselben eingeführt worden.

Um in der Folge nicht durch Nebenbetrachtungen aufgehalten zu werden, wollen wir noch die durch die Formeln (9) bestimmten Ausdrücke C_{ik} durch die Einführung der Function φ anstatt der Function θ in eine andere Form setzen.

Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial\theta}{\partial p} = u\frac{\partial\xi}{\partial p} + v\frac{\partial\eta}{\partial p} + w\frac{\partial\zeta}{\partial p}$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial q} = u\frac{\partial\xi}{\partial q} + v\frac{\partial\eta}{\partial q} + w\frac{\partial\zeta}{\partial q}$$

ergeben sich durch Differentiation in Beziehung auf die Größen p und q die folgenden:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \Sigma u\frac{\partial^2\xi}{\partial p^2}$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial\xi}{\partial p} + \Sigma u\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial\xi}{\partial q} + \Sigma u\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q}$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} = \Sigma\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial\xi}{\partial q} + \Sigma u\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2},$$

welche mit Hilfe der Gleichungen (8) und der Gleichungen (18) in die nachstehenden übergeben:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q} = -\varphi c_{12} - c_{11}^{\,2}\Sigma Xu$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial p\partial q} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q} = \varphi c_{11} - c_{12}\Sigma Xu = -\varphi c_{22} - c_{12}\Sigma Xu$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial q^2} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\theta}{\partial q} = \varphi c_{12} - c_{22}\Sigma Xu.$$

Aus ihnen ergeben sich die Ausdrücke C_{ik} als durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\varphi c_{12} - c_{11} r \\ C_{12} &= \varphi c_{11} - c_{12} r = -\varphi c_{22} - c_{12} r \\ C_{22} &= \varphi c_{12} - c_{22} r \end{aligned} \tag{19.}$$

bestimmt. Man bemerkt leicht die Beziehung $c_{11} + c_{22} = 0$, welche der Voraussetzung isothermer Parameter p, q für die betrachtete Minimalfläche entspricht.

Sind insbesondere p, q Parameter der asymptotischen Linien dieser Minimalfläche, so werden bekanntlich $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = 1$ und die Ausdrücke C_{ik} ergeben sich als:

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\varphi \\ C_{12} &= -r \\ C_{22} &= \varphi. \end{aligned} \tag{19.*}$$

II.

Bezeichnen ξ, η, ζ die drei nach den rechtwinkligen Coordinatenaxen x, y, z geschätzten Componenten der Geschwindigkeit eines Theilchens einer stationär bewegten und incompressiblen Flüssigkeit, auf welche äußere Kräfte nicht wirken, und werden diese Componenten als die Differentialquotienten eines Geschwindigkeitspotentials V vorausgesetzt, so besteht zwischen ihnen und dem Drucke Π in einen beliebigen Punkt (x, y, z) dieser Flüssigkeit bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}\Pi = \text{Const} - \tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

in welcher ϱ die constante Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet. In einer Fläche, für welche der Druck Π eine Constante ist, hat daher auch die Größe $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, welche wir durch 2τ bezeichnen wollen, einen constanten Werth, und es drückt die Gleichung

$$2\tau = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 \tag{20.}$$

die Gleichung einer bestimmten Fläche constanten Druckes in der Flüssigkeit aus, falls der Größe a ein bestimmter constanter Werth beigelegt wird. Soll für diesen bestimmten Werth a die durch die Gleichung (20) dargestellte Fläche gleichzeitig eine Stromfläche in der Flüssigkeit darstellen, so ist es nothwendig, daß jedes zur Zeit t im Punkte (x, y, z) dieser Fläche befindliche Theilchen, nach

Verlauf eines Zeitelementes dt wiederum in einen Punkt derselben Fläche geführt werde, oder mit anderen Worten, daß die Coordinaten $x + \xi dt$, $y + \eta dt$, $z + \zeta dt$, in welche nach Ablauf des Zeitelementes dt die Coordinaten x, y, z übergegangen sein werden, der Gleichung (20) Genüge leisten.

Diese Bedingung erfordert, daß für alle Werthe der Coordinaten x, y, z, für welche die Gleichung (20) besteht, auch die Gleichung

$$\xi \frac{\partial \tau}{\partial x} + \eta \frac{\partial \tau}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \tag{21.}$$

bestehe. Bezeichnet man die totale Aenderung, welche eine, an das Flüssigkeitstheilchen gebundene Function ψ der Coordinaten x, y, z desselben im Zeitelemente dt erleidet, durch $d\psi$, setzt also

$$\frac{d\psi}{dt} = \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

so ist die vorstehende Gleichung gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{d\tau}{dt} = 0. \tag{22.}$$

Wir wollen voraussetzen, daß man als Geschwindigkeitspotential V eine Potentialfunction mit verschwindender Hesse'scher Determinante gewählt habe. Alsdann lassen sich die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ als die durch Functionen zweier Parameter p, q auszudrückenden Coordinaten jedes Punktes einer Minimalfläche darstellen, für welche diese Parameter die Bedeutung von Parametern der asymptotischen Linien besitzen mögen. Man findet alsdann die totalen Aenderungen dieser Componenten im Zeitelemente dt durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial q}\frac{dq}{dt} \tag{23.}$$

und zwei ähnliche für η, ζ, in denen die Werthe von $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ durch die Formeln

$$\frac{dp}{dt} = \xi \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial p}{\partial y} + \zeta \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{dq}{dt} = \xi \frac{\partial q}{\partial x} + \eta \frac{\partial q}{\partial y} + \zeta \frac{\partial q}{\partial z}$$

gegeben sind. Unter Hinzuziehung der Gleichungen (7) und mit

Hilfe der Formeln (19*) des ersten Abschnittes gehen die letzteren Gleichungen in

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\varphi^2+r^2}\left(\varphi\frac{\partial\tau}{\partial p}+r\frac{\partial\tau}{\partial q}\right)$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\varphi^2+r^2}\left(r\frac{\partial\tau}{\partial p}-\varphi\frac{\partial\tau}{\partial q}\right)$$

über. Wenn man die linken Seiten der Gleichungen (23) der Reihe nach mit ξ, η, ζ multiplicirt und die Producte addirt, so ergiebt sich unter Benutzung der vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\varphi^2+r^2}\left[\varphi\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial q^2}-\frac{\partial\tau^2}{\partial p^2}\right)+2r\frac{\partial\tau}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial q}\right].$$

Soll daher die dem eingeführten Geschwindigkeitspotentiale entsprechende Flüssigkeitsbewegung die Fläche $2\tau-a^2=0$ als eine Stromfläche enthalten, so müssen die Gleichungen

(20.) $$2\tau-a^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2-a^2 = 0$$

(22.) $$\varphi\left(\frac{\partial\tau^2}{\partial q^2}-\frac{\partial\tau^2}{\partial p^2}\right)+2r\frac{\partial\tau}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial q} = 0$$

für die betreffenden Werthe von p, q, r gleichzeitig bestehen. Die letzte beider Gleichungen verlangt hierfür die Bedingung:

$$\frac{\partial\tau}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial q} = 0$$

welche lehrt, daß mit $2\tau-a^2$ gleichzeitig entweder nur einer, oder beide Differentialquotienten der Function τ verschwinden müssen.

Ist die erste dieser beiden Bedingungen erfüllt, und ist $\frac{\partial\tau}{\partial p}$ der nicht verschwindende Differentialquotient, so muß wegen $d\tau = 0$ die Gleichung

$$\frac{\partial\tau}{\partial p}dp = 0$$

bestehen, also für $2\tau-a^2=0$, die Größe p selbst einen constanten Werth p_0 besitzen. Unter diesen Verhältnissen muß die Gleichung

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = a^2$$

für $p = p_0$ erfüllt sein, oder mit anderen Worten, die dem Geschwindigkeitspotential V entsprechende Minimalfläche muß eine sphärische Asymptotenlinie vom Kugelradius a besitzen.

Wird alsdann noch die der Gleichung (17) genügende, sonst willkürliche Function φ der Bedingung unterworfen, für $p = p_0$ zu verschwinden, die sich auf unendlich viele Arten erfüllen läßt, so bestehen die Gleichungen (20, 22) in der That gleichzeitig.

Der Bedingung $p = p_0$ entsprechen im Raume (x, y, z) die Punkte einer Fläche, welche den Gleichungen (4*, 5*) zufolge eine geradlinige sein wird. Da aber für $p = p_0$ die Function φ verschwindet, so werden sich zufolge der früheren Bemerkung hinsichtlich der Brennpunkte des betreffenden Strahlensystems die Geraden dieser Fläche auf der vereinzelten Abwickelbaren dieses Strahlensystems befinden.

Jeder Minimalfläche, welche eine sphärische Asymptotenlinie besitzt, lassen sich daher Potentialfunctionen zuordnen, welchen eine Flüssigkeitsbewegung entspricht, für die eine abwickelbare Oberfläche gleichzeitig Stromfläche und Fläche constanten Druckes der Flüssigkeit wird. Die Flüssigkeitstheilchen dieser Oberfläche bewegen sich längs geodätischer Linien derselben mit der Geschwindigkeit a.

Bei Erfüllung der zweiten der oben erwähnten Bedingungen, wenn nämlich für $2\tau - a^2 = 0$ beide Differentialquotienten von τ verschwinden, werden die Gleichungen (20, 22) für jede Function φ ohne Weiteres gleichzeitig erfüllt.

In diesem Falle sagen die Bedingungen

$$2\tau - a^2 = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial q} = 0$$

aus, daß die zu Grunde gelegte Minimalfläche durch eine Kugel vom Radius a längs einer in ihr liegenden Curve berührt werden müsse, und umgekehrt sind unter Zugrundelegung einer solchen Minimalfläche die vorstehenden Gleichungen stets gleichzeitig erfüllt.

Jeder Minimalfläche, die längs einer in ihr befindlichen Curve durch eine Kugel berührt werden kann, lassen sich daher unendlich viele Potentialfunctionen zuordnen, denen Flüssigkeitsbewegungen entsprechen, für welche eine geradlinige Fläche gleichzeitig Stromfläche und Fläche constanten Druckes der Flüssigkeit wird.

Da in Folge des gleichzeitigen Verschwindens der Differentialquotienten $\frac{\partial \tau}{\partial p}$, $\frac{\partial \tau}{\partial q}$ auch die totalen Differentiale dp und dq der betreffenden Veränderlichen p, q verschwinden, so behalten diejenigen Flüssigkeitstheilchen, welche auf dieser geradlinigen Fläche sich befinden, dieselben Parameter p, q, während ihrer weiteren

Bewegung bei und durchlaufen die geraden Linien dieser Fäche mit der constanten Geschwindigkeit a.

In Beziehung auf die, den Potentialfunctionen von verschwindender Hesse'scher Determinante entsprechenden Flüssigkeitsbewegungen ist es noch wesentlich hervorzuheben, daß für diejenigen Werthe der Parameter p, q, welche zu unendlich fernen Punkten der vorausgesetzten Minimalfläche führen, die Geschwindigkeitscomponenten in allen Punkten der betreffenden Strahlen des Strahlensystems (4*, 5*) unendlich große Werthe annehmen. Der von Flüssigkeit erfüllte Raum darf daher diese Strahlen nicht enthalten. Die Flüssigkeit muß in Folge dessen durch feste aus Stromlinien gebildete Wände auf einen sich ins Unendliche[1]) erstreckenden Raum beschränkt gedacht werden, innerhalb dessen gesammter, durch diese Wände und die freien Grenzen dargestellten, Begrenzung die erwähnten Strahlen nicht liegen.

Beispiele, welche die vorgetragenen Entwickelungen zu erläutern geeignet sind, erfordern die Darstellung solcher Minimalflächen, die entweder eine sphärische Asymptotenlinie besitzen, oder von einer Kugel längs einer Curve berührt werden. Beide Gruppen von Minimalflächen lassen sich in aller Allgemeinheit durch bekannte von Herrn Schwarz gegebene Formeln darstellen. Allein die Benutzung dieser Formeln ist wegen der in ihnen auftretenden Quadraturen auch für einfachere Beispiele mit mannigfachen Schwierigkeiten verknüpft, so daß man genöthigt wird, andere Wege zu betreten.

In endlicher Form ist mir nur die Angabe einer Minimalfläche gelungen, deren sphärische Asymptotenlinie eine sphärische Schraubenlinie ist. Das sich an dieselbe knüpfende Beispiel einer interessanten Flüssigkeitsbewegung erscheint für eine Mittheilung an dieser Stelle noch zu verwickelt. Dagegen bietet das Catenoid ein einfaches Beispiel für die Bewegungen der zweiten Art, für welche die Stromcurven in der Fläche constanten Drucks geradlinig sind.

Durch die Gleichungen:

$$\text{(a.)}\quad \xi = \frac{a}{C_0^2} C\cos q,\quad \eta = \frac{a}{C_0^2} C\sin q,\quad \zeta = \frac{a}{C_0^2}(p_0 - p + C_0 S_0)$$

in denen p_0 eine willkürliche positive Größe bezeichnet, während C, S und C_0, S_0 die Functionen

1) Eine stationäre Bewegung in einem endlichen Raume, der ein Geschwindigkeitspotential zukommt, besteht nach einem bekannten Satz von Herrn von Helmholtz nicht.

$$C = \tfrac{1}{2}(e^{p}+e^{-p}), \quad C_0 = \tfrac{1}{2}(e^{p_0}+e^{-p_0})$$
$$S = \tfrac{1}{2}(e^{p}-e^{-p}), \quad S_0 = \tfrac{1}{2}(e^{p_0}-e^{-p_0})$$

bedeuten, ist offenbar ein Catenoid dargestellt, für welches

$$2\tau = \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = \frac{a^2}{C_0^2}[C^2+(p_0-p+C_0S_0)^2] \qquad \text{(b.)}$$

wird. Die Coordinaten X, Y, Z der sphärischen Abbildung desselben ergeben sich durch die Gleichungen

$$X = \frac{\cos q}{C}, \quad Y = \frac{\sin q}{C}, \quad Z = \frac{S}{C}.$$

Für die Functionen u, v, w wählen wir der Reihe nach die Werthe bY, $-bX$, 0, welche offenbar der für diese Functionen aufgestellten Bedingungsgleichung

$$du dX + dv dY + dw dZ = 0$$

genügen.

Diese Wahl entspricht allgemein der Annahme $\varphi = bZ$ oder $\theta = b\zeta$, wenn durch ξ, η, ζ die Coordinaten der Bonnet'schen Adjungirten der Fläche ξ, η, ζ bezeichnet werden.

Das Strahlensystem, welches die Werthe der Parameter p, q den Punkten (x, y, z) des Raumes zuordnet, wird nunmehr durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= bY + rX \\ y &= -bX + rY \\ z &= rZ \end{aligned}$$

gegeben. Die Ausgangsfläche dieses Strahlensystems ist eine in der Ebene $z = 0$ liegende Kreisfläche, deren Radius gleich b ist und deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfällt. Wenn man die Veränderlichkeit des Parameters p auf positive Werthe beschränkt, während der Parameter q jeden reellen Werth annehmen kann, so entspricht jedem Punkte dieser Kreisfläche nur ein von ihm ausgehender Strahl. Die Größe Z bleibt auf positive Werthe beschränkt. Durch Elimination der Größen r und q ergibt sich aus (c) die Gleichung:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2(1-Z^2)} - \frac{z^2}{b^2Z^2} = 1,$$

welche zeigt, daß diejenigen Flächen, in denen der Parameter p constante Werthe annimmt, eine Schaar confocaler Rotationshyper-

boloide bilden, welche für $p = 0$ in eine den Kreis der Ausgangsfläche ausschließende Ebene, für $p = \infty$ in die Z-Axe ausarten. Diese Gleichung besitzt für bestimmt gegebene Werthe der Coordinaten x, y, z nur eine positive Wurzel Z. Es ist daher sowohl die Größe Z als auch die Größe p durch die Angabe der Werthe der Coordinaten x, y, z eindeutig bestimmt. Hiernach ergiebt sich die Größe r ebenfalls eindeutig bestimmt aus der Gleichung

$$r = \frac{z}{Z},$$

so lange $p > 0$ ist. Die Größe r verschwindet zugleich mit der Coordinate z in allen Punkten der Ausgangsfläche. In Folge dessen sind auch die Größen X, Y und $\cos q$, $\sin q$, durch die Coordinaten x, y, z eindeutig bestimmt. Durch die Gleichungen (a) des Catenoids, welches der Bildung der Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ zu Grunde liegt, sind die Bedingungen

$$2\tau = a^2, \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial q} = 0$$

für $p = p_0$ offenbar erfüllt. Es wird daher für eine Flüssigkeitsbewegung, der in jedem Punkte des Raumes die durch die Größen ξ, η, ζ gegebenen Geschwindigkeitscomponenten zukommen, die Fläche $p = p_0$, oder das durch die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2(1 - Z_0^2)} + \frac{z^2}{b^2 Z_0^2} = 1$$

bestimmte Rotationshyperboloid, sowohl eine Stromfläche, als auch eine Fläche gleichen Druckes sein.

Die dritte der Gleichungen (a) zeigt, daß für alle Punkte des Raumes, in denen $p < p_0 + S_0 C_0$ ist, die Geschwindigkeitscomponente ζ positiv ausfällt, die in ihnen strömenden Flüssigkeitstheilchen also von kleineren zu größeren Werthen der Coordinate z übergehen. Wir bezeichnen der Kürze wegen durch p_1 den Werth von $p_0 + S_0 C_0$ und durch Z_1 den Werth von Z für $p = p_1$.

Man construire nunmehr in der Ebene $z = 0$ um den Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Radius zwischen den Werthen $b\sqrt{1 - Z_0^2}$ und $b\sqrt{1 - Z_1^2}$ enthalten ist, und für jeden Punkt dieser Kreislinie die durch denselben hindurchgehende Stromcurve. Eine solche Stromcurve wendet sich zunächst nach der Seite der wachsenden Werthe der Coordinate z, da der Punkt, von dem sie ausgeht, in dem Raume der positiven Werthe der Größe ζ enthalten

ist, und schreitet dauernd nach Orten abnehmender Werthe des Parameters p fort. Denn das Vorzeichen der Ableitung $\frac{dp}{dt}$ erweist sich für Werthe von p, die größer als p_0 sind und für positive Werthe von r, als stets negativ. Mit wachsender Zeit nähert sich für das betrachtete Flüssigkeitstheilchen der Werth des Parameters p dem Werthe p_0 unbegrenzt, und seine Bahn fällt immer näher mit einem Individuum derjenigen Schaar der Erzeugenden des Hyperboloids zusammen, längs welcher die Flüssigkeitstheilchen der unter constanten Druck stehenden Grenzfläche sich bewegen. Der Inbegriff der durch alle Punkte des construirten Kreises gezogenen Stromlinien führt zu einer nach zwei Seiten sich ins Unendliche erstreckenden Fläche, die sich im Unendlichen dem Hyperboloide $p = p_0$ unbegrenzt annähert. Wählt man diese Fläche zu einer festen Wand, und denkt man sich die Flüssigkeit auf den zwischen ihr und dem Rotationshyperboloid $p = p_0$ liegenden Theil des Raumes beschränkt, so erhält man das Beispiel eines sich ins Unendliche erstreckenden stationären Wasserstrahls von der äußeren Gestalt eines Rotationshyperboloids, der im Fließen einen sich ebenfalls ins Unendliche erstreckenden festen Körper bespült; in der freien Begrenzungsfläche dieses Strahles ist überall der Druck constant; die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in ihr ist geradlinig und erfolgt mit constanter Geschwindigkeit. Im Unendlichen ist die bespülende Wasserschicht unendlich dünn, und die Form des festen Körpers hyperboloidisch.

Construirt man andrerseits zwischen irgend zwei Punkten, welche auf demjenigen Kreise liegen, in dem das Hyperboloid $p = p_0$ von der Ebene $z = 0$ geschnitten wird, eine sich selbst nicht schneidende Curve, die nirgends in das Innere des in derselben Ebene mit dem Radius $b\sqrt{1-Z_1^2}$ gezeichneten concentrischen Kreises eintritt, und faßt den Inbegriff aller, die Punkte dieser Curve passirenden Stromlinien als eine feste Wand bildend auf, so erhält man das Beispiel einer stationären Flüssigkeitsbewegung in einem sich nach zwei Seiten ins Unendliche erstreckenden Bette, dessen Ufer durch zwei windschiefe Gerade gebildet werden. Die freie unter constantem Drucke stehende Oberfläche der strömenden Flüssigkeit hat die Gestalt eines Theils eines Rotationshyperboloids, und die Bewegung in ihr geschieht geradlinig. Das Bett selbst verflacht und erweitert sich im Unendlichen unbegrenzt.

Entsprechende Constructionen kann man auch für den Raum, der der äußeren Seite des Hyperboloids $p = p_0$ anliegt, ausführen, und Beispiele anderer Bewegungsformen darstellen. Man muß aber

aus diesem Raume stets den Begrenzungskreis vom Radius b der Ausgangsfläche des Strahlensystems ausgeschlossen halten, in dessen Punkten die Beschleunigungen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ unendlich große Werthe erlangen würden, in gleicher Weise wie bisher mit den Räumen, in denen ζ negativ wird, auch die z-Axe ausgeschlossen wurde, in welcher die Geschwindigkeitscomponenten selbst unendlich groß werden.

Längs der gesammten hyperboloidischen Oberfläche $p = p_0$ verschwinden in Folge der in ihr statthabenden geradlinigen gleichförmigen Bewegung der Flüssigkeitstheilchen die Werthe der Beschleunigungen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, und daher auch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Es behält daher der Druck Π in unendlicher Nähe dieser Fläche denselben constanten Werth bei, der auf dem Hyperboloid selbst stattfindet. Es ist hiernach, den früheren Constructionen folgend, möglich, eine unendlich dünne Flüssigkeitsschale, deren Gestalt annähernd die eines hyperboloidischen Mantels ist, herauszuheben, welche einen freien Flüssigkeitsstrahl darstellt, auf dessen äußerer und innerer Seite der Druck Π denselben Werth hat, wie im ganzen Inneren desselben.

Die Bestimmung der endlichen Gleichungen der Stromlinien für das vorstehend behandelte Beispiel einer Flüssigkeitsbewegung ist, wie man leicht bemerkt, auf Quadraturen zurückführbar. Das Geschwindigkeitspotential der in Rede stehenden Bewegung erweist sich als eine vieldeutige Function der Coordinaten x, y, z.

Am Schlusse sei es gestattet, noch zu bemerken, daß den vorgetragenen ähnliche Betrachtungen sich auch an Potentialfunctionen von verschwindender Hesse'scher Determinante knüpfen lassen, welche die Zeit t explicite enthalten. Die durch das Gleichungssystem

$$V = x\xi + y\eta + z\zeta + t\vartheta - \theta$$

$$0 = x\frac{\partial \xi}{\partial p} + y\frac{\partial \eta}{\partial p} + z\frac{\partial \zeta}{\partial p} + t\frac{\partial \vartheta}{\partial p} - \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

$$0 = x\frac{\partial \xi}{\partial q} + y\frac{\partial \eta}{\partial q} + z\frac{\partial \zeta}{\partial q} + t\frac{\partial \vartheta}{\partial q} - \frac{\partial \theta}{\partial q}$$

definirten Potentialfunctionen, in denen ξ, η, ζ die als Functionen

zweier Variablen p, q gegebenen Coordinaten eines Punktes einer Minimalfläche, ϑ und θ zwei Functionen derselben Variablen mit verschwindendem zweiten Differentialparameter für diese Minimalfläche darstellen, erlauben Beispiele von nicht stationären Bewegungen einer incompressiblen Flüssigkeit mit freien Grenzen von constantem Drucke darzustellen, falls auf die Flüssigkeit äußere Kräfte nicht wirken.

Ueber eine Abänderung des ersten Hermite'schen Beweises für die Transcendenz der Zahl e.

Von

O. Venske.

(Vorgelegt von H. A. Schwarz.)

Die berühmte Hermite'sche Abhandlung „Sur la fonction exponentielle“ (Paris 1874) enthält zwei Beweise für den Satz, daß die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems keine algebraische Zahl ist. Bei dem ersten dieser beiden Beweise, welcher sich vor dem zweiten durch größere Einfachheit der angewendeten Hülfsmittel auszeichnet, handelt es sich hauptsächlich darum, den Nachweis zu führen, daß eine gewisse Determinante Δ_0, deren Elemente bestimmte Integrale sind, einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Für den allgemeinen Fall hat Herr Hermite diesen Nachweis geführt; es giebt jedoch Ausnahmefälle, auf welche sich sein Nachweis nicht erstreckt. Dies ist wohl der Grund, weshalb Herr Hermite zu dem ersten Beweise, um seine eigenen Worte zu gebrauchen, „une seconde démonstration plus rigoureuse“ hinzugefügt hat. Während Herr Hermite bei dem ersten Beweise von der besonderen Annahme ausgeht, daß gewissen in der erwähnten Abhandlung mit μ_1, μ_2, ..., μ_n bezeichneten ganzzahligen Exponenten stets derselbe Werth μ beigelegt wird, giebt er bei seinem zweiten Beweise diesen Exponenten zwar auch specielle, aber doch solche Werthe, welche nicht sämmtlich einander gleich sind. Wie ich gefunden habe, ist es möglich, dadurch daß den Exponenten

$$\mu,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_n$$

$n+1$ von einander verschiedene passend gewählte Werthereihen beigelegt werden, den ersten der beiden Hermite'schen Beweise

abzuändern, ohne die Einfachheit desselben zu beeinträchtigen, und, ohne daß es nöthig wird, einen Ausnahmefall zu berücksichtigen, allgemein den Nachweis zu führen, daß die in Betracht kommende Determinante einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Es seien

$$(\mu_{g,h}) \qquad (z_g) \qquad (g,h = 0, 1, \ldots, n)$$

zwei Systeme ganzer positiver Zahlen, welche nur der Beschränkung unterliegen, daß

$$\begin{aligned} &\mu_{0,h} \leqq \mu_{g,h} \gtrless \mu_{0,h}+1, \\ &\mu_{0,h}-\mu_{0,i} = h-i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &z_h < z_i; \qquad\qquad (h<i) \end{aligned}$$

ferner sei

$$\begin{aligned} M_h &= \sum_g \mu_{g,h}, \\ F_h(z) &= \prod_g (z-z_g)^{\mu_{g,h}}, \\ F_h^{(\nu)}(z) &= \frac{d^\nu F_h(z)}{dz^\nu}, \\ P_{g,h} &= \frac{1}{\mu_{0,h}!} \sum_\nu F_h^{(\nu)}(z_g), \\ &(\nu = \mu_{g,h}, \mu_{g,h}+1, \ldots, M_h); \end{aligned}$$

dann ist $P_{g,h}$ eine ganze Zahl, und es besteht nach einem bekannten Satze der Integralrechnung die Formel

$$(1) \qquad e^{z_g} P_{0,h} - e^{z_0} P_{g,h} = \frac{e^{z_0+z_g}}{\mu_{0,h}!} \int_{z_0}^{z_g} e^{-z} F_h(z)\, dz.$$

Unterwirft man $\mu_{0,0}$ der weiteren Bedingung, so groß zu sein, daß der absolute Betrag der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Größe hinreichend klein wird, so müßte, wenn e der ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$(2) \qquad \sum_g N_g e^{z_g} = 0$$

genügte, für jeden Werth des Index h auch

$$(3) \qquad \sum_g N_g P_{g,h} = 0$$

sein.

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen (3) erfordert, daß die Determinante

$$|P_{\varrho,\lambda}| = 0 \tag{4}$$

ist. Eine einfache Rechnung ergiebt, daß die Größe $e^{-\Sigma z_\varrho}|P_{\varrho,\lambda}|$ folgender Determinante gleich ist

$$|e^{-z_0}P_{0,\lambda}-e^{-z_1}P_{1,\lambda},\ e^{-z_1}P_{1,\lambda}-e^{-z_2}P_{2,\lambda},\ \ldots,\ e^{-z_{n-1}}P_{n-1,\lambda}-e^{-z_n}P_{n,\lambda},\ e^{-z_n}P_{n,\lambda}|.$$

Benutzt man zur Abkürzung die Bezeichnung

$$J_{\varrho,\lambda} = \int_{z_\varrho}^{z_{\varrho+1}} e^{-z}F_\lambda(z)\,dz, \qquad (z_{n+1} = \infty)$$

so ist mit Rücksicht auf (1) die Gleichung

$$|J_{\varrho,\lambda}| = 0$$

eine Folge der Gleichung (4).

Im Widerspruch hiermit lassen sich, wie sogleich gezeigt werden wird, den gestellten Bedingungen genügende Exponentensysteme $(\mu_{\varrho,\lambda})$ finden, für welche die Determinante der Integrale $J_{\varrho,\lambda}$ nicht verschwindet.

Es werde, unter m eine positive ganze Zahl verstanden, welche höchstens gleich n ist, für die Determinante

$$|J_{k,l}| \qquad (k, l = m, m+1, \ldots, n)$$

und für die Subdeterminanten ihrer ersten Horizontalreihe $(l = m)$ bezw. die Bezeichnung Δ_m und $\Delta_{k,m}$ eingeführt, nach welcher die Identitäten

$$\Delta_m = \sum_k J_{k,m}\Delta_{k,m}$$

$$\Delta_{m,m} = \Delta_{m+1}$$

bestehen.

Setzt man die Determinante Δ_{m+1} von Null verschieden voraus und wählt, was mindestens auf eine Art möglich ist, die Exponenten $\mu_{\varrho,m}$ in der Weise, daß alle von Null verschiedenen Glieder der Reihe

$$\Delta_{m,m}(-1)^{\mu_{m,m}},\ \Delta_{m+1,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\mu_{m+1,m}},\ \ldots,\ \Delta_{n,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\cdots+\mu_{n,m}}$$

dasselbe Zeichen haben, so erhält auch Δ_m einen von Null verschiedenen Werth. Denn, da die Größen

$$J_{m,m}(-1)^{\mu_{m,m}},\ J_{m+1,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\mu_{m+1,m}},\ \ldots,\ J_{n,m}(-1)^{\mu_{m,m}+\cdots+\mu_{n,m}}$$

zeichengleich sind, so gilt bei der angegebenen Wahl dasselbe von den Größen

$$J_{n,n}\Delta_{n,n},\ J_{n+1,n}\Delta_{n+1,n},\ \ldots,\ J_{s,n}\Delta_{s,n}.$$

Die erste derselben ist von Null verschieden, also hat auch ihre Summe

$$\sum_k J_{k,n}\Delta_{k,n} = \Delta_n$$

einen von Null verschiedenen Werth.

Nun verschwindet

$$\Delta_n = J_{s,n}$$

bei keiner Wahl der Exponenten $\mu_{0,n}, \ldots, \mu_{s,n}$. Durch wiederholte Anwendung des angedeuteten Verfahrens gelangt man also zu Exponentensystemen, für welche die Determinanten

$$\Delta_{n-1},\ \Delta_{n-2},\ \ldots,\ \Delta_0$$

einzeln von Null verschieden sind.

Hierdurch ist die oben aufgestellte Behauptung gerechtfertigt und nachgewiesen, daß die Annahme (2) auf einen Widerspruch führt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1890.

(Fortsetzung.)

a. Mémoires de l'Académie Imp. de St. Petersbourg. VII. série. Tome XXXVII. N. 4. 5. 1889/90.

b. Bulletin de l'Acad. Imp. de St. P. Nouvelle série. I. (XXXIII). N. 3.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. Jahrgang 1888. Theil II. St. Petersburg 1889.

Записки Кіевскаго Общества Естествоиспытателей. X, 2. Кіевъ 1889. (Mémoires de la Société des Naturalistes de Kiew. Tome X. livr. 2. Kiew 1889.)

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 3. Moscou 1889.

Meteorologische Beobachtungen der landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. (Jahrg. 1889, erste Hälfte). Moskau 1889.

Записки математическаго отбѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. X. Одесса 1889. (Mémoires de la section mathématique de la Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie. Odessa 1889. T. X.)

Записки новороссійскаго общества естествоиспытателей XIV, 2. Одесса 1889. (Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie. (Odessa). T. XIV. Part. 2. Odessa 1889.)

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums in den Jahren 1887—1888. Tiflis 1889.

Différentes formes de grêlons observés au sud-ouest de la Russie. Notice par prof. A. Klossowsky.

Meteorologische Beobachtungen der Sternwarte in Dorpat. Ende 1888. Jan.—Mai 1889.

Académie Royale de Belgique. Bulletin. Année 60. 3. série. Tome 19. N. 2. 3. Bruxelles.

C. W. Borchardt et son oeuvre par M. M. d'Ocagne (Extraits de la Revue des questions scientifiques.) Bruxelles 1890.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVII. 1. Livr. Liège 1890.

Sur quelques plantes dans le Test calcaire des mollusques par M. Ed. Bornet. et Ch. Flahault. (Extrait du Bulletin de la Société botanique de France. Tom^{e} XXXVI.) Paris 1889.

Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XVII. N. 6 et dernier Tome XVIII. N. 2. 3 et 4. Paris 1890.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. vol greeks — 5. deel. 2de Aflevering. S 'Gravenhage 1890.

Programma certaminis poetici ab Academia regia disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeufftiano in annum 1891 indicti. Amsterdam 1890.

Kongl. vitterhets historie och antiquitets Akademiens Månadsblad. 9. 10 Argangen. 1880, 1881. Stockholm 1881, 82.

Néphoscope marin de C. C. Fineman. Upsala 1890.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 4. Coimbra 1889.

Atti della R. Accademia dei Lincei. 1889. Rendiconti. Vol. V. fasc. 13. 1889. Rendiconti. Vol. VI. fasc. 1—4. Roma 1890.

Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. fasc. 1. Perugia 1890.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. fasc. 1. 2. Tome IV. Anno 1890.

Annuario del circ. matem. di Palermo. 1890.

Annuario della Società R. di Napoli con le notizie istoriche. Napoli 1890.

La regione vulcanica fluorifera della Campania seconda edizione. (Estratto dal vol. IV. parte 1. delle memorie del Reg. Comitato Geologico d'Italia) per A. Scacchi. Firenze 1890.

Appendice alla prima memoria sulla Lava Vesuviana del 1631 per A. Scacchi. (Estratta dal Tomo VII, série 3a, N. 7 della Società Italiana delle Scienze (detta XL) per A. Scacchi.) Napoli 1889.

Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Processi verbali. Vol. VII. p. 21—48.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 3, 4, 5, 6, 7. Elenco degli Academici. 1889—1890.

Rendiconti delle sessioni d. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Anno 1880—81, 1881—82, 1882—83, 1883—84, 1884—85, 1885—86, 1886—87, 1887—88, 1888—89.

Bollettino della Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Opere straniere. Vol. IV. N. 4. 1889.

Bollettino delle pubblicazioni italiane delle Bibliot. nationale centrale di Firenze. 1890. N. 100—103.

United States Geological Survey by J. W. Powell. 7th annual report 1885—1886. Washington 1888.

Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 10, 11. 1887, 88. Washington.

Bulletin of the United States National Museum. N. 33—37. Washington 1889.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXI supplement 1889. Vol. XXII. N. 1. March 31. 1890. New York.

Report on the observations of the total eclipse of the sun of jan. 1. 1889 publ. by the Lick observatory.

Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. XXVI. N. 130. Philadelphia.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Part II. Vol XXIV. Part I, II. Boston 1888, 1889.

Resultados del Observatorio nacional Argentino en Córdoba. Vol. XI. Buenos Aires 1889.
Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomo XXVIII. Entrega V, VI. 1889. Tomo XXIX. Entrega 1. Buenos Aires 1890.
Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba. (Republica Argentina). Tomo X. Entrega 3. Buenos Aires. 1889.
Boletins da Commissão geographica e geologica da provincia de S. Paulo. N. 1. 2. 3. St. Paulo 1889.
Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde in Tokio. Heft 43. Band V. Seite 83—144. Yokohama 1890.

Nachträge.

I proietti agglutinanti dell' incendio vesuviano del 1631. Nota d. A. Scacchi. (Estratto dal Rendiconto della R. Accademia (delle Scienze fisiche e matematiche. fasc. 10. 1889).
Bulletin of the Museum of comparative Zoology at Harvard College. Vol. XVI. N. 7. Vol. XIX. N. 1.
Memoirs of the Mus. of comp. Zoology at H. College. Vol. XVII. N. 1. Cambridge U. S. A. 1890.
Proceedings and transactions of the Nova Scotian Institute of Natural Science. Vol. VII. 1888—89. Part III. Halifax 1889.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Part II. 1889. Philadelphia 1889.
North American Lepidoptera.
a. Revised check list of the North American Noctuidae. Part I. Bremen 1890.
b. The Hawk Moths of North America by Radcl. Grote. Bremen 1886.
Johns Hopkins University circulars. Vol. IX. N. 79. Baltimore.
Bulletin of the U. S. Coast and Geodetic Survey. N. 14, 15, 16, 17. 1889.
Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. vol. XV = Whole Ser. Vol. XXIII. Part II. Boston 1888.

Mai.

Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissensch. 1890. XX, XXI, XXII XXIII, XXIV, XXV.
Abhandlungen der Kön. Bair. Akad. der Wissenschaften.
a. Historische Klasse. Band 19. Abth. 1.
b. Mathematisch-physikalische Klasse. Band 17. Abth. 1. München 1889.
Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg.
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1889.
b. Verhandlungen. Neue Folge. Band XXIII. Würzburg 1890.
Zur feineren Anatomie des centralen Nervensystems. Erster Beitrag: Das Kleinhirn von A. Kölliker. Separatabdr. aus: Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. XLIX. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 9.

Julius Weingarten, über particuläre Integrale der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen. — *O. Verake*, über eine Abänderung des ersten Hermite'schen Beweises für die Transcendenz der Zahl e. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND
24 OCT 90
LIBRARY

27. August. **№ 10.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. August.

Riecke legt a. von sich vor: Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels.

b. von sich: Ueber specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes.

c. von Herrn Privatdocenten Dr. Nernst: Ueber die Theilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Voigt a. eine kurze Notiz zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten.

b. für den 36. Band der Abhandlungen: Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen.

Schwarz: a. Bestimmung derjenigen Minimalflächen, welche eine Schaar reeller Curven zweiten Grades enthalten.

b. Ueber den Kreisbogen als Lösung einer von Delaunay gestellten Aufgabe der Variationsrechnung.

Klein: a. von Dr. Franz Meyer, Prof. in Clausthal: Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. (Zweite Mittheilung.)

b. vom Privatdocenten Dr. Burckhardt: Zur Theorie der Jacobischen Gleichungen 40. Grades.

c. von sich: Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes.

Von

Eduard Riecke.

Im Anschluß an die in einer früheren Mittheilung [1]) enthaltenen allgemeinen Sätze sollen im Folgenden einige specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen einer etwas eingehenderen Untersuchung unterworfen werden. Es handelt sich zunächst darum, an bestimmten Beispielen zu untersuchen, wie die wirkliche Entwicklung der Zustandsänderungen und Gleichgewichtserscheinungen eines Körpers oder Körpersystems in das durch jene allgemeinen Sätze gegebene Schema sich einordnet. Dabei wird sich dann zeigen, daß jenes Schema noch einer gewissen Ergänzung bedarf, wenn eine vollständige Beschreibung jener Erscheinungen gegeben werden soll.

I. Zustandsänderungen einer einzigen Substanz.

Wenn die Zahl der chemischen Componenten sich auf 1 reducirt, so ist die größte mögliche Zahl koëxistirender Phasen gleich 3. Durch diejenigen Werthe von Druck und Temperatur, für welche 3 verschiedene Phasen im Gleichgewichte neben einander bestehen können, bestimmen wir ebenso wie in dem früher betrachteten allgemeinen Falle einen Punkt der pT-Ebene, welcher jetzt als ein dreifacher Punkt bezeichnet wird. Ist die Gesammtzahl der Phasen, welche die gegebene Substanz anzunehmen vermag, gleich n, so ist die Anzahl der möglichen Tripelpunkte gleich $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$. Würden all diese Punkte in Wirklichkeit existiren, so würden sie verbunden sein durch $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Grenzcurven, längs welcher je zwei verschiedene Phasen im Gleichgewichte sich befinden. In den Feldern, in welche die Ebene p, T durch die Grenzcurven getheilt wird, würde endlich nur je eine Phase bestehen können.

Ist $n = 4$, so würde hiernach die Anzahl der möglichen Tripelpunkte gleich 4, die Anzahl der möglichen Grenzen gleich 6 sein.

1) Gött. Nachr. 1890, S. 223.

Als Beispiel für diesen Fall können wir den Phosphor benützen. Von den möglichen Tripelpunkten sind 2 bekannt, in dem einen bestehen im Gleichgewicht neben einander fester und flüssiger gelber und gasförmiger Phosphor; in dem anderen flüssiger gelber Phosphor, rother Phosphor und gasförmiger Phosphor.

Der Schmelzpunkt des gewöhnlichen Phosphors liegt bei dem Druck einer Atmosphäre bei 44°. Das specifische Gewicht ist bei 0° gleich 1,83. Die specifischen Volumina des flüssigen und festen gelben Phosphors bei der Schmelztemperatur ergeben sich zu 0,575 und 0,556 (g. cm). Die Schmelzwärme des gelben Phosphors bezogen auf 1 g und ausgedrückt in kleinen Kalorieen ist gleich 5,03. Benützen wir als Einheit des Drucks den Druck von 1 g auf 1 cm², so wird das Wärmeäquivalent gleich 42700, und somit die Aenderung der Schmelztemperatur mit dem Drucke

$$\frac{dt}{dp} = \frac{317 \times 0{,}019}{42700 \times 5{,}03}.$$

Nehmen wir als Einheit des Druckes den Druck von 1 Atmosphäre, so wird:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{317 \times 0{,}019 \times 1033}{42700 \times 5{,}03} = 0{,}029,$$

d. h. für eine Zunahme des Druckes um 1 Atm. steigt die Schmelztemperatur um 0,03° Cels. Wenn wir den Druck nach Atmosphären rechnen, so ist hiernach die Grenzcurve zwischen dem flüssigen und festen gelben Phosphor eine gerade Linie, welche gegen die Axe des Druckes unter einem Winkel von 1,7° geneigt ist.

Den Beobachtungen von Schrötter und von Troost und Hautefeuille entsprechend kann die Grenze zwischen flüssigem gelbem und zwischen dampfförmigem Phosphor dargestellt werden durch die Gleichung

$$\log p = -2{,}7502 + 2{,}064 \log T - \frac{1530}{T}.$$

Setzen wir hier für T die absolute Schmelztemperatur des Phosphors, so ergeben sich für den ersten dreifachen Punkt desselben die Coordinaten $p = 0{,}0038$ Atm. $T = 317°$.

Bezeichnen wir die Phasen des dampfförmigen, des flüssigen und des festen gelben Phosphors als die Phasen 1, 2 und 3, so sind die specifischen Volumina derselben in dem dreifachen Punkt in ccm

$$v_1 = 55100, \quad v_2 = 0{,}575, \quad v_3 = 0{,}556.$$

Bezeichnen wir durch $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}$, $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}$, $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}$ die Richtungstangenten der in dem dreifachen Punkte zusammenlaufenden Grenzcurven, so ist

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}(v_1-v_2)+\left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}(v_2-v_3)+\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}(v_3-v_1)=0$$

oder

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}=\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}+\frac{v_2-v_3}{v_1}\left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}.$$

Nun ist:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}=0{,}000826, \qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)_{23}=34{,}5,$$

somit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{31}=0{,}000838.$$

In dem zweiten dreifachen Punkt des Phosphors sind mit einander im Gleichgewicht gasförmiger Phosphor, fester rother und flüssiger gelber Phosphor. Die Coordinaten desselben sind:

$$p=0{,}56 \text{ Atm.}, \qquad T=499^0.$$

Die Grenzcurve zwischen dem gasförmigen und flüssigen gelben Phosphor besitzt in diesem Punkte die Richtungstangente:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{12}=0{,}0103.$$

Die specifischen Volumina des gasförmigen, flüssigen gelben und festen rothen Phosphors haben in dem Tripelpunkte die Werthe

$$v_1=582, \qquad v_2=0{,}628, \qquad v_4=0{,}511 \text{ ccm.}$$

Die beiden letzteren Werthe sind unsicher in Folge unserer mangelhaften Kenntniß der Ausdehnungskoëfficienten. Die Uebergangswärme zwischen flüssigem gelbem und rothem Phosphor kann gleich 880 cal gesetzt werden. Hiernach wird die Neigung der Grenzcurve zwischen flüssigem gelbem und rothem Phosphor gegeben durch die Gleichung:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{24}=-\frac{42700\times 880}{499\times 0{,}117\times 1033}=-623.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich dann für die Richtungstangente der die Phasen 1 und 4 trennenden Grenzcurven der Werth

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{14}=-0{,}115.$$

Benützt man außer den im vorhergehenden enthaltenen Angaben noch die von Troost und Hautefeuille beobachteten Werthe der Dampfspannungen über rothem Phosphor, so ergiebt sich für die Zustandsänderungen dieses Stoffes das in Figur 1 gezeichnete Bild. *A* und *B* sind die beiden dreifachen Punkte; die horizontalen geraden Linien sind die Grenzen zwischen festem gelbem und flüssigem gelbem Phosphor, sowie zwischen flüssigem gelbem und rothem Phosphor; *AB* ist die Curve der Dampfspannung des flüssigen gelben Phosphors; *BD* die labile Verlängerung derselben jenseits der Umwandlungstemperatur von gelbem und rothem Phosphor. *EF* ist die Curve der beobachteten Dampfspannungen des rothen Phosphors, *BG* die Tangente der Grenzcurve zwischen rothem Phosphor und Phosphordampf in dem Tripelpunkte. Die Dampfspannungscurve des rothen Phosphors würde hiernach durch eine Linie zu ergänzen sein, deren Verlauf durch das Curvenstück *BE* angedeutet ist. Das von der gasförmigen Phase des Phosphors eingenommene Gebiet I wird durch diese Curve in zwei Theile zerlegt, welche mit einander nur durch einen schmalen Streifen zusammenhängen. In dem an *AB* grenzenden Theile des Gebietes findet Sublimation des Phosphors von kälteren nach heißeren Stellen des von demselben eingenommenen Raumes statt.

II. Zwei chemische Componenten mit 5 verschiedenen Phasen.

Die Maximalzahl der Phasen, welche im Gleichgewicht neben einander existiren können, ist gleich 4; die mögliche Anzahl der vierfachen Punkte gleich 5, der sie verbindenden Grenzen gleich 10.

Das einfachste Beispiel für diesen Fall bieten zwei Substanzen, welche chemisch nicht auf einander wirken, und welche sich im flüssigen Zustande weder mischen noch lösen. Wir haben dann zwei feste, zwei flüssige und eine gasförmige Phase.

Die Zahl der vierfachen Punkte, welche wirklich existiren können, ist gleich 3; in dem ersten koëxistiren die festen und die flüssigen Phasen der beiden Componenten, in dem zweiten die dampfförmige Phase mit den beiden festen Phasen und der flüssigen Phase der ersten Componente, in dem dritten die dampfförmige Phase mit den beiden flüssigen Phasen und der festen Phase der zweiten Componente. Bezeichnen wir die verschiedenen Phasen durch die Buchstaben g, l_1, l_2, s_1, s_2, so können wir die drei vierfachen Punkte *A*, *B*, *C* charakterisiren durch die Symbole $(l_1\, l_2\, s_1\, s_2)$, $(g\, l_1\, s_1\, s_2)$, $(g\, l_1\, l_2\, s_2)$. In dem Quadrupelpunkt *A* (Fig. 2) durch-

schneiden sich die Schmelzcurven der beiden Substanzen; längs der vier von A ausgehenden Curven koëxistiren die Phasen $(l_1 s_1 s_2)$, $(l_2 s_1 s_2)$, $(l_1 l_2 s_2)$ und $(l_1 l_2 s_1)$, also immer zwei Phasen der einen mit einer Phase der anderen Componente. Gehen wir von den Grenzlinien nach der einen oder anderen Seite ab, so kann jene letztere Phase natürlich nicht verschwinden, da ja sonst die entsprechende Componente aus dem System ausscheiden würde. Dadurch werden die Phasen, welche in den 4 in A zusammenstoßenden Winkelräumen im Gleichgewicht sich befinden, vollkommen bestimmt, sobald nur auf stabile Zustände Rücksicht genommen wird. Man hat in dem einen die Phasen $(s_1 s_2)$, in dem gegenüberliegenden $(l_1 l_2)$, in den zwischenliegenden Winkeln $(l_1 s_2)$ und $(l_2 s_1)$.

Wir gehen über zu dem vierfachen Punkte B, in welchem die gasförmige Phase, g, koëxistirt mit den beiden festen Phasen s_1, s_2 und mit der flüssigen Phase der ersten Componente l_1. Betrachten wir die vier von B auslaufenden Grenzen, so findet auf der schon zuvor betrachteten Grenze BA Gleichgewicht statt zwischen den Phasen $(l_1 s_1 s_2)$; längs einer zweiten Grenze BF_1 koëxistiren die Phasen $(g l_1 s_1)$; diese zweite Grenze wird bestimmt durch die Bedingung, daß auf derselben die Potentiale μ_1' und μ_1'', welche der flüssigen und festen Phase der Componente 1 entsprechen, einander gleich sind; die Grenze ist also nichts anderes als die Schmelzcurve dieser Componente und fällt mit der Verlängerung von AB zusammen. Auf einer dritten von B auslaufenden Curve BS haben wir Gleichgewicht zwischen den Phasen $(g s_1 s_2)$. Setzen wir die Potentiale der beiden Componenten in ihrer gasförmigen Mischung gleich ihren Potentialen im festen Zustand, so werden durch die Gleichungen $\mu_1 = \mu_1''$ und $\mu_2 = \mu_2''$ die Partialdrucke der beiden gasförmigen Componenten als Funktionen der Temperatur bestimmt; der Gesammtdruck p ergiebt sich als Summe der Partialdrucke durch eine Gleichung von der Form

$$p = A_1'' T^{\frac{c_{p1}-c_1''}{c_{p1}-c_{v1}}} e^{-B_1''/T} + A_2'' T^{\frac{c_{p2}-c_2''}{c_{p2}-c_{v2}}} e^{-B_2''/T}$$

und diese ist dann auch die Gleichung der Grenze $(g s_1 s_2)$. Durch c_{p1}, c_{v1} und c_{p2}, c_{v2} sind die specifischen Wärmen der beiden Componenten im Gaszustande, durch c_1'' und c_2'' ihre specifischen Wärmen im festen Zustande bezeichnet. Ganz ebenso ergiebt sich die Gleichung der vierten von B ausgehenden Grenze $BC = (g l_1 s_2)$. Verstehen wir unter c_1' die specifische Wärme der ersten Componente im flüssigen Zustande, so wird dieselbe:

$$p = A_1' T^{\frac{c_1 - c_1'}{c_{p1} - c_{v1}}} e^{-B_1'/T} + A_2'' T^{\frac{c_{p2} - c_2''}{c_{p2} - c_{v2}}} e^{-B_2''/T}.$$

Gehen wir endlich noch über zu der Betrachtung des Punktes $C = (g\, l_1\, l_2\, s_2)$; die Grenzen $(l_1\, l_2\, s_2) = CA$ und $(g\, l_2\, s_2) = CF_2$ sind repräsentirt durch die Schmelzcurve der Componente 2; die Gleichung der Grenze $(g\, l_1\, s_2) = CB$ ist bereits angegeben; die Gleichung der Grenze $(g\, l_1\, l_2)$ ist

$$p = A_1' T^{\frac{c_{p1} - c_1'}{c_{p1} - c_{v1}}} e^{-B_1'/T} + A_2' T^{\frac{c_{p2} - c_2'}{c_{p2} - c_{v2}}} e^{-B_2'/T},$$

wo unter c_2' die specifische Wärme der zweiten Componente im flüssigen Zustande zu verstehen ist.

Während bei den in A zusammenstoßenden Winkelräumen die in denselben koëxistirenden Phasen vollkommen bestimmt waren, ist dies nicht der Fall bei den an B und C stoßenden jenseits der Curve $SBCL$ liegenden Räumen; in dem Raume SBF_1 können zusammenbestehen entweder die Phasen $(g\, s_1)$ oder $(g\, s_2)$; in F_1BCF_2 entweder $(g\, l_1)$ oder $(g\, s_2)$; in F_2CL entweder $(g\, l_1)$ oder $(g\, l_2)$. Welcher dieser verschiedenen Fälle in Wirklichkeit eintritt, das hängt ab von den besonderen Verhältnissen des Systems; dem allgemeinen Schema werden dadurch noch gewisse nähere Bestimmungen hinzugefügt, mit deren Entwicklung wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse an der Grenze SB. In einem beliebigen Punkt derselben haben wir Gleichgewicht zwischen den festen Componenten und ihren Dämpfen. Wir bezeichnen den ganzen von dem System eingenommenen Raum mit V, den von Dämpfen erfüllten Theil desselben mit v, die Volumina der festen Theile der Componenten mit v_1'' und v_2''. Sind δ_1 und δ_2 die specifischen Gewichte der gesättigten Dämpfe, σ_1 und σ_2 die der festen Körper, M_1 und M_2 die gesammten Massen, welche von den beiden Componenten vorhanden sind, so ist

$$v = \frac{V - M_1/\sigma_1 - M_2/\sigma_2}{1 - \delta_1/\sigma_1 - \delta_2/\sigma_2}$$

$$v_1'' = \frac{M_1/\sigma_1 (1 - \delta_2/\sigma_2) - \delta_1/\sigma_1 (V - M_2/\sigma_2)}{1 - \delta_1/\sigma_1 - \delta_2/\sigma_2}$$

$$v_2'' = \frac{M_2/\sigma_2 (1 - \delta_1/\sigma_1) - \delta_2/\sigma_2 (V - M_1/\sigma_1)}{1 - \delta_1/\sigma_1 - \delta_2/\sigma_2}.$$

Bezeichnen wir durch m_1 und m_2 die Massen der dampfförmigen Theile beider Componenten, durch p_1 und p_2 ihre Partialdrucke, so findet jederzeit die Beziehung statt

$$v = m_1 \frac{R_1 T}{p_1} = m_2 \frac{R_2 T}{p_2}.$$

So lange wir uns in einem Punkt der Grenze SB befinden, sind für p_1 und p_2 die Sättigungsdrucke der beiden Componenten zu setzen, welche im Folgenden durch π_1 und π_2 bezeichnet werden mögen.

Lassen wir das Gesammtvolumen V wachsen, so wird das Volumen v der dampfförmigen Phase zunehmen, dagegen werden die Volumina der festen Phasen sich verringern, und zwar wird zuerst v_1'' gleich Null, wenn

$$\frac{M_1}{\delta_1}\left(1-\frac{\delta_2}{\sigma_2}\right)+\frac{M_2}{\sigma_2} < \frac{M_2}{\delta_2}\left(1-\frac{\delta_1}{\sigma_1}\right)+\frac{M_1}{\sigma_1}$$

oder

$$\frac{M_1}{\delta_1} < \frac{M_2}{\delta_2}$$

dagegen zuerst v_2'' gleich Null, wenn

$$\frac{M_1}{\delta_1}\left(1-\frac{\delta_2}{\sigma_2}\right)+\frac{M_2}{\sigma_2} > \frac{M_2}{\delta_2}\left(1-\frac{\delta_1}{\sigma_1}\right)+\frac{M_1}{\sigma_1}$$

oder

$$\frac{M_1}{\delta_1} > \frac{M_2}{\delta_2}.$$

Wir untersuchen zunächst den ersteren Fall; in dem Augenblick, in welchem v_1'' verschwindet, ist die erste Componente nur noch in der gasförmigen Phase enthalten. Ihr Partialdruck, welcher erst noch gleich dem Sättigungsdrucke π_1 war, nimmt ab, sobald das Gesammtvolumen V noch weiter vergrößert wird. Dagegen bleibt der Partialdruck der zweiten Componente gleich ihrem Sättigungsdrucke, so lange dieselbe noch in ihrer festen Phase vorhanden ist. Die Volumina der gasförmigen und der festen Phase bestimmen sich durch die Gleichungen

$$v = \frac{V - M_2/\sigma_2}{1-\delta_2/\sigma_2}, \quad v_2'' = \frac{M_2/\sigma_2 - \delta_2/\sigma_2 V}{1-\delta_2/\sigma_2}.$$

Der Partialdruck der ersten Componente ergiebt sich aus der Gleichung

$$v = \frac{M_1 R_1 T}{p_1} = \frac{m_2 R_2 T}{\pi_2}.$$

Lassen wir V fortwährend wachsen, so wird schließlich $V = \frac{M_2}{\delta_2}$ und damit v_2'' gleich Null; die beiden festen Phasen sind jetzt vollkommen verschwunden; in der gasförmigen Phase hat die erste Componente den Partialdruck $p_1 = \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\pi_2$, der Gesammtdruck ist somit

$$p = \pi_2\left(1+\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right)$$

er unterscheidet sich von dem Sättigungsdruck der zweiten Componente durch einen Faktor, welcher abhängig ist von der Natur der beiden Componenten und von dem Verhältniß ihrer Massen. Sobald man das Volumen V noch weiter wachsen läßt, kann nur die gasförmige Phase existiren, deren Druck von nun an durch das Boyle'sche Gesetz bestimmt wird. Die Curve

$$p = \left(1+\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right) A_2'' T^{\frac{c_{p2}-c_2''}{c_{p2}-c_{v2}}} e^{-\frac{B_2''}{T}}$$

stellt hiernach eine weitere Grenzcurve dar, längs welcher die gasförmige Phase im Gleichgewicht sich befindet mit der festen Phase s_2 allein. Mit Bezug auf die Lage dieser Grenzcurve möge folgendes bemerkt werden. Ist $M_1 = 0$, so fällt dieselbe zusammen mit der Curve des Sättigungsdruckes der Componente 2; andererseits ist nach unserer Voraussetzung $\frac{M_1 R_1}{\pi_1}$ nothwendig kleiner als $\frac{M_2 R_2}{\pi_2}$, $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$ und

$$p = \pi_2\left(1+\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right) < \pi_1 + \pi_2.$$

Wird $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ so ist $p = \pi_1 + \pi_2$.

Man sieht hieraus, daß die neue Grenzcurve (gs_2) unter allen Umständen beschränkt ist auf den Raum zwischen der Curve des Sättigungsdruckes π_2 und der Grenze SB.

Ganz in derselben Weise erledigt sich natürlich der zweite Fall, in welchem $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$. Jenseits der Grenze ist Gleichgewicht zwischen der gasförmigen Phase und der festen Phase s_1.

Bei einem bestimmten Drucke verschwindet aber die feste Phase und es existirt wieder eine Curve, längs welcher Gleichgewicht vorhanden ist zwischen g und s_1. Die Gleichung dieser Curve ist gegeben durch

$$p = \pi_1\left(1 + \frac{M_2 R_2}{M_1 R_1}\right)$$

Sie ist unter allen Umständen eingeschlossen zwischen der Grenze SB und der Curve des Sättigungsdruckes π_1.

Ganz analog gestalten sich die Verhältnisse in den Räumen F_1BCF_2 und F_2CL.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergiebt sich, daß zu der graphischen Darstellung der Zustandsänderungen unseres Systems die zuerst betrachteten in den Quadrupelpunkten sich schneidenden Linien, auf welchen je drei Phasen im Gleichgewicht sich befinden, nicht genügen. Es treten vielmehr zu diesen Linien noch andere hinzu, auf welchen Gleichgewicht vorhanden ist zwischen zwei Phasen, jenseits welcher nur noch eine einzige Phase existirt. Zwischen den beiden Arten von Linien ist aber ein charakteristischer Unterschied; die ersten sind allein abhängig von den allgemeinen physikalischen Constanten der beiden Componenten, die letzteren außerdem von dem Verhältniß ihrer Massen, also von den speciellen Bedingungen des Versuches. Wir bezeichnen diese letzteren Grenzen als Grenzen zweiter Ordnung, die ersteren als Grenzen erster Ordnung oder Hauptgrenzen.

Mit Benutzung dieser verschiedenen Grenzlinien ist nun das Verhalten unserer Substanz Veränderungen der Temperatur und des Druckes gegenüber in folgender Weise darzustellen. Wir konstruiren die Curven der Schmelztemperatur für beide Componenten und die Curve des Dampfdruckes, $p = \pi_1 + \pi_2$, die Grenzen erster Ordnung. Wir zeichnen außerdem die Curven

$$p_2 = \pi_2\left(1 + \frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right) \text{ und } p_1 = \pi_1\left(1 + \frac{M_2 R_2}{M_1 R_1}\right).$$

Nun sind drei Fälle denkbar.

1. Die Curve p_2 liegt in dem Raume, welcher von der Axe T einerseits, der Curve $p = \pi_1 + \pi_2$ andererseits begrenzt wird. In diesem Falle ist $\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$; und die Componente 2 geht über die Grenze $SBCL$ hinüber; p_2 repräsentirt eine Grenze zweiter Ordnung, auf welcher Gleichgewicht besteht zwischen den Phasen

s_2, g unterhalb der Haupt-Grenze CF_2, zwischen den Phasen l_2, g oberhalb derselben. Die Grenze erster Ordnung BF_1 verliert in diesem Falle ihre reelle Bedeutung, da mit Ausnahme des Punktes B die Phasen g, l_1, s_1 nirgends zusammen existiren. Längs CF_2 haben wir Gleichgewicht zwischen l_2, s_2, g; da aber jenseits der Curve p_2 nur noch die Phase g existirt, so hat eine Verlängerung von CF_2 über die Curve p_2 hinaus keinen Zweck. Die Curve p_1 liegt von der Axe T überall weiter ab als die Curve $\pi_1 + \pi_2$ und kommt bei der Beschreibung der Zustandsänderungen nicht in Betracht.

2. Die Curve p_2 liegt von der Axe der Temperatur aus gerechnet jenseits der Curve $\pi_1 + \pi_2$, p_1 diesseits. Ueber die Grenze $SBCL$ geht in diesem Falle die Componente 1; p_1 ist eine Grenze zweiter Ordnung, auf welcher die Phasen g, s_1 beziehungsweise g, l_1 koëxistiren; auf dem bis zu derselben reichenden Stücke der Hauptgrenze BF_1 koëxistiren die Phasen g, l_1, s_1. Die Curve p_2 und die Grenze CF_2 sind ohne Bedeutung.

3. Die Curven p_1 und p_2 treffen in einem Punkte G der Grenze $\pi_1 + \pi_2$ zusammen, d. h. es existirt eine bestimmte Temperatur für welche $\frac{M_1R_1}{M_2R_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$. In diesem Fall wird der Raum, welcher allein von der Phase g erfüllt wird, begrenzt durch die beiden von G ausgehenden und dießseits der Curve $\pi_1 + \pi_2$ liegenden Zweige der Curven p_1 und p_2; in dem durch $\pi_1 + \pi_2$ und p_1 begrenzten Streifen geht die Componente 1, in dem durch $\pi_1 + \pi_2$ und p_2 begrenzten die Componente 2 über die Grenze. Je nach der Lage von G und der Lage der in Betracht kommenden Curvenzweige p_1 und p_2 ist eine Reihe verschiedener Fälle möglich, mit deren Aufzählung wir uns nicht aufhalten wollen.

III. Zwei Componenten, welche mit einander ein Kryohydrat bilden.

In diesem Falle existiren 4 Phasen, eine gasförmige, g, eine flüssige, l, zwei feste, s_1 und s_2, und daher nur ein Quadrupelpunkt A, Fig. 3, dem Gleichgewichte (gls_1s_2) entsprechend. Auf den 4 von A ausgehenden Grenzen erster Ordnung findet Gleichgewicht statt zwischen den Phasen (ls_1s_2), (gs_1s_2), (gls_1), (gls_2).

Wir betrachten zunächst die Grenze $AF = (ls_1s_2)$. Bezeichnen wir durch μ_1'' und μ_2'' die Potentiale der beiden Componenten in ihrer flüssigen Mischung durch μ_1''' und μ_2''' ihre Potentiale im festen Zustande, so haben wir zur Bestimmung der Grenze die Gleichungen

$$\mu_1''\left(p,\ T, \frac{m_1''}{v''},\ \frac{m_2''}{v''}\right) = \mu_1'''(p,\ T)$$

$$\mu_2''\left(p,\ T, \frac{m_2''}{v''},\ \frac{m_1''}{v''}\right) = \mu_2'''(p,\ T)$$

$$p = p\left(T,\ \frac{m_1''}{v''},\ \frac{m_2''}{v''}\right)$$

$\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{m_2''}{v''}$ sind die Dichtigkeiten der beiden Componenten in der flüssigen Phase. Ist die Temperatur gegeben, so können wir aus diesen Gleichungen p, $\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{m_2''}{v''}$ als Funktionen der Temperatur berechnen. Wir erhalten also zunächst die Gleichung der Grenze, außerdem aber in jedem derselben angehörenden Punkt p, T vollständig bestimmte Werthe der Dichtigkeiten $\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{m_2''}{v''}$; in jedem Punkt der Grenze hat somit die flüssige Phase eine ganz bestimmte Zusammensetzung. Führen wir Wärme zu, so werden die beiden festen Körper schmelzen, aber in einem solchen Verhältniß, daß die Zusammensetzung der Phase l dieselbe bleibt.

Gehen wir über zu der Betrachtung der beiden längs der Grenze AF zusammenhängenden Flächenräume. Auf der unterhalb AF liegenden, tieferen Temperaturen entsprechenden Fläche existiren nebeneinander die beiden festen Phasen. In dem oberhalb AF liegenden Raume koëxistiren je nach den Verhältnissen des Versuches entweder die Phasen l und s_1 oder die Phasen l und s_2.

Wir setzen das im Allgemeinen von Temperatur und Druck abhängende Mischungsverhältniß der beiden Componenten in der flüssigen Phase $\frac{m_1''}{m_2''} = \alpha$; ist nun das Verhältniß der ganzen von beiden Componenten vorhandenen Mengen $\frac{M_1}{M_2} > \alpha$, so tritt die Componente 1 über die Grenze. In dem oberhalb der Grenze AF liegenden Raume sind dann die Bedingungen des Gleichgewichtes

$$\mu_1''\left(p,\ T, \frac{m_1''}{v''},\ \frac{M_2}{v''}\right) = \mu_1'''(p,\ T)$$

$$p = p\left(T, \frac{m_1''}{v''},\ \frac{M_2}{v''}\right).$$

Ist p und T gegeben, so bestimmen diese Gleichungen die Dichtigkeiten $\frac{m_1''}{v''}$ und $\frac{M_2}{v''}$, also auch das Volumen v'' der flüssigen

Phase. Halten wir den Druck konstant, so können wir den Zustand unseres Systems ändern durch Wärmezufuhr; ist der Zustand zuerst gegeben durch einen Punkt der Grenze AF, so bleibt die Temperatur bei Wärmezufuhr konstant, bis die Phase s_2 vollständig verschwunden ist. Von nun an steigt die Temperatur, und die feste Componente s_1 schmilzt in einem solchen Verhältniß ab, daß die flüssige Phase jederzeit die durch Temperatur und Druck bestimmte Zusammensetzung hat. Schließlich wird in Folge hievon auch die Phase s_1 verschwinden. Die Temperatur, bei welcher dieß geschieht, ergiebt sich aus der Zusammensetzung der flüssigen Phase nach dem Verschwinden von s_1, bei welcher jetzt auf M_1 Gewichtstheile der ersten Componente M_2 Gewichtstheile der zweiten kommen; der Concentration M_2/M_1 entspricht eine Erniedrigung des normalen Gefrierpunktes der Componente 1; ist diese bekannt, so ist damit auch die Temperatur bestimmt, bei welcher die Phase s_1 verschwindet; oberhalb dieser Temperatur existirt nur noch die Phase l. Wenn wir denselben Proceß bei anderen Drucken wiederholen, so gelangen wir zu anderen Verschwindungspunkten der Phase s_1. Es ergiebt sich auf diese Weise die Existenz einer Grenze zweiter Ordnung, oberhalb welcher nur noch die flüssige Phase existirt. Es ist diese Grenze nichts anderes als die Curve der Schmelztemperaturen der Componente 1 erniedrigt durch die Lösung von M_2 Theilen der Componente 2 in M_1 Theilen von 1. Die Curve ist andererseits dadurch bestimmt, daß für sie das Mischungsverhältniß α der beiden Componenten den konstanten Werth M_1/M_2 besitzt.

Besonders bemerkenswerth ist der Fall, daß das Mischungsverhältniß α der flüssigen Phase für einen Punkt der Grenze AF gleich ist M_1/M_2. Es bildet dann unser System in diesem Punkt ein reines Kryohydrat und schmilzt bei Wärmezufuhr ohne Rest wie ein homogener fester Körper. Ist nun für einen kleineren Werth des Druckes M_1/M_2 größer als das demselben entsprechende Mischungsverhältniß α, geht also hier bei Wärmezufuhr die Phase s_1 über die Grenze AF, so wird im Allgemeinen bei einem höheren Drucke M_1/M_2 kleiner als α sein; es geht also dann umgekehrt die Phase s_2 über die Grenze AF. Die zuvor betrachtete Grenze zweiter Ordnung berührt die Hauptgrenze AF in dem Punkte, für welchen $\alpha = \frac{M_1}{M_2}$; in dem zwischen den beiden Grenzen liegenden Raume koëxistiren auf der einen Seite von dem Berührungspunkte die Phasen l und s_1, auf der andern die Phasen l und s_2.

Bezeichnen wir die Richtungstangente der Curve AF durch $\left(\frac{dp}{dT}\right)'$ so ergiebt sich:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)=\frac{\eta''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\frac{\eta_2''}{m_2''}.$$

Setzen wir die Entropie der Phase l gleich $\eta_1''+\eta_2''$, so können wir diese Gleichung auf die Form bringen

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)=\frac{\eta_1''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}+\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Die rechte Seite der Gleichung ist dann nichts anderes als die Wärme, welche konsumirt wird, so oft ein Gramm der Componente 1 aus dem festen Zustande in den Zustand der Lösung l übergeht, dieselbe noch dividirt durch die absolute Temperatur.

Wir gehen nun über zu der Grenze $AS = (gs_1s_2)$. Mit Bezug auf diese gelten dieselben Bemerkungen, wie in dem vorhergehenden Falle zweier Substanzen, bei welchen nur die Dämpfe mischbar sind. Die Richtungstangente der Grenzkurve wird bestimmt durch die Gleichung

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)''\left(\frac{v'}{m_1'}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)=\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}+\frac{m_2'}{m_1'}\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Die Bedeutung der rechten Seite ist analog der bei der Curve AF angegebenen, das Verhältniß $\frac{m_2'}{m_1'}=\frac{\pi_2 R_1}{\pi_1 R_2}$. Es ergiebt sich ferner die selbstverständliche Beziehung

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)''=\frac{d\pi_1}{dT}+\frac{d\pi_2}{dT}.$$

Die dritte zu betrachtende Grenzcurve sei diejenige, auf welcher Gleichgewicht besteht zwischen den Phasen g, l und s_2. Die Bedingungen für das Gleichgewicht sind, wenn durch π_1 und π_2 wieder die Drucke der gesättigten Dämpfe bezeichnet werden

$$\mu_1'(\pi_1, T)=\mu_1''\left(p, T, \frac{m_1''}{v''}, \frac{m_2''}{v''}\right)$$

$$\mu'(\pi_2, T)=\mu_2''\left(p, T, \frac{m_2''}{v''}, \frac{m_1''}{v''}\right)=\mu_2'''(p, T)$$

$$p=\pi_1+\pi_2=p\left(T, \frac{m_1''}{v''}, \frac{m_2''}{v''}\right).$$

Für die Richtungstangente der Curve ergiebt sich der Werth:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)''' \left\{\frac{v'}{m_2'} - \frac{v_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1'}{m_2'}\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''} - \frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\} =$$

$$\frac{\eta'}{m_2'} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1'}{m_2'} \cdot \frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta''}{m_2''} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Setzen wir $\eta' = \eta_1' + \eta_2'$, $\eta'' = \eta_1'' + \eta_2''$ so ergiebt sich:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)''' \left\{\frac{v'}{m_2'} - \frac{v_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1'}{m_2'} \cdot \frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''} - \frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\}$$

$$= \frac{\eta_2'}{m_2'} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''} + \frac{m_1'}{m_2'}\left(\frac{\eta_1'}{m_1'} - \frac{\eta_1''}{m_1''}\right) - \frac{m_1'}{m_2'}\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Multipliciren wir mit der absoluten Temperatur, so ist $\left(\frac{\eta_2'}{m_2'} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right)T$ die Wärmemenge, welche zur Verdampfung von 1 Gramm der Phase s_2 erforderlich ist; damit der Dampf die den vorhandenen Verhältnissen der Temperatur und des Druckes entsprechende Mischung behalte, ist gleichzeitig nothwendig, daß aus der Phase l von der ersten Componente die Menge $\frac{m_1'}{m_2'}$ verdampfe, wozu die Wärmemenge $\frac{m_1'}{m_2'}\left(\frac{\eta_1}{m_1'} - \frac{\eta_1''}{m_1''}\right)T$ erforderlich ist. Wenn aber aus der Flüssigkeit die Menge $\frac{m_1'}{m_2'}$ von der ersten Componente ausscheidet, so muß gleichzeitig von der zweiten die Menge $\frac{m_1'}{m_2'} \cdot \frac{m_2''}{m_1''}$ in fester Form ausscheiden, damit die Concentration der flüssigen Phase dieselbe bleibe. Die hierbei frei werdende Wärme ist

$$\frac{m_1'}{m_2'} \cdot \frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right)T.$$

Es ergiebt sich hieraus, daß die auf der rechten Seite unserer Gleichung stehende Summe nichts anderes ist, als die Wärmemenge, welche konsumirt wird, so oft 1 Gramm der zweiten Componente aus dem festen Zustande in die gasförmige Phase übergeht, dieselbe noch dividirt durch die absolute Temperatur.

Die für $\left(\frac{dp}{dT}\right)'''$ aufgestellte Gleichung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'''\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\}=$$
$$\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1''}{m_1''}+\frac{m_2'}{m_1'}\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right)-\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{\eta_2''}{m_2''}-\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right).$$

Der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Ausdruck ist dann gleich der Wärme, welche konsumirt wird, sobald 1 Gramm der ersten Componente aus der Phase l übergeht in die Phase g, dieselbe noch dividirt durch die absolute Temperatur.

Ganz ebenso gestalten sich natürlich die Beziehungen für die vierte Grenzcurve, AB, auf welcher die Phasen g, l, s_1 koëxistiren. Für die Richtungstangente derselben ergiebt sich die Gleichung:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)^{IV}\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}\right)\right\}=$$
$$\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}+\frac{m_2'}{m_1'}\left(\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2''}{m_2''}\right)-\frac{m_2'}{m_1'}\cdot\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{\eta_1''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right).$$

Die mit T multiplicirte rechte Seite giebt die Wärme, welche für jedes Gramm der ersten Componente konsumirt wird, welches von der Phase s_1 übergeht in die Phase g.

Die zweite Form dieser Gleichung wird:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)^{IV}\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{m_1'}{m_2'}\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}\right)\right\}=$$
$$\frac{\eta_2'}{m_2'}-\frac{\eta_2''}{m_2''}+\frac{m_1'}{m_2'}\left(\frac{\eta_1'}{m_1'}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right)-\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{\eta_1''}{m_1''}-\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right).$$

Zwischen den Richtungstangenten der 4 von A auslaufenden Grenzcurven finden die Beziehungen statt

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)'''\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\left(\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}\right)\right\}=$$
$$\left(\frac{dp}{dt}\right)''\left\{\frac{v'}{m_1'}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2'}{m_1'}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right\}-\left(\frac{dp}{dt}\right)'\left\{\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_2''}{m_1''}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right\}$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV}\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{m_1'}{m_2'}\frac{v_1'''}{m_1'''}-\frac{m_1''}{m_2''}\left(\frac{v''}{m_1''}-\frac{v_1'''}{m_1'''}\right)\right\}=$$
$$\left(\frac{dp}{dt}\right)''\left\{\frac{v'}{m_2'}-\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1'}{m_2'}\frac{v_1'''}{m_1'''}\right\}-\left(\frac{dp}{dt}\right)'\left\{\frac{v''}{m_2''}-\frac{v_2'''}{m_2'''}-\frac{m_1''}{m_2''}\cdot\frac{v_1'''}{m_1'''}\right\}.$$

Näherungsweise

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)''' = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_1'}{v'}\left\{\frac{v''}{m_1''} - \frac{v_1'''}{m_1'''} - \frac{m_2''}{m_1''}\frac{v_2'''}{m_2'''}\right\}\left(\frac{dp}{dt}\right)'$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV} = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_2'}{v'}\left\{\frac{v''}{m_2''} - \frac{v_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1''}{m_2''}\frac{v_1'''}{m_1'''}\right\}\left(\frac{dp}{dt}\right)'$$

und:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \left(\frac{dp}{dt}\right)''' = \frac{m_1'}{m_2'}\frac{m_2''}{m_1''}\left\{\left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV}\right\}.$$

Mit Benützung der früher für $\left(\frac{dp}{dt}\right)'$ gegebenen Gleichung ergeben sich noch die Formeln:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)''' = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_1'}{v'}\left\{\frac{\eta''}{m_1''} - \frac{\eta_1'''}{m_1'''} - \frac{m_2''}{m_1''}\frac{\eta_2'''}{m_2'''}\right\}$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^{IV} = \left(\frac{dp}{dt}\right)'' - \frac{m_2'}{v'}\left\{\frac{\eta''}{m_2''} - \frac{\eta_2'''}{m_2'''} - \frac{m_1''}{m_2''}\cdot\frac{\eta_1'''}{m_1'''}\right\}.$$

In dem Quadrupelpunkte A fallen hiernach die Grenzcurven (gls_1) und (gls_2) gegen die Axe des Druckes steiler ab als die Grenze (gs_1s_2).

Die vorhergehenden Formeln zeigen die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß die eine nur die Richtungstangente $\left(\frac{dp}{dT}\right)'''$, die andere nur $\left(\frac{dp}{dT}\right)^{IV}$ enthält. Die allgemeinen Formeln, welche ich in einer vorhergehenden Mittheilung [1]) aufgestellt habe, lassen erkennen, daß ein solches Verhalten immer eintrifft, wenn eine Phase des Systems nur die eine oder die andere Componente enthält. Es hängt damit aber weiter zusammen, daß bei einem empirisch gegebenen System immer nur die eine der beiden Curven von reeller Bedeutung ist. Es ergiebt sich dieß aus der folgenden Ueberlegung. Wir bezeichnen diejenige Componente, deren feste Phase seitlich von dem Punkte A die Grenze AF überschreitet, mit 1. Es ist dann wenigstens für den ersten Theil der von A auslaufenden Curve AF $\frac{M_1}{M_2} > \alpha$; in dem oberhalb desselben liegenden Gebiete koëxistiren die Phasen l und s_1. Gegen die Axe der Temperaturen hin muß dieses Gebiet begrenzt sein von der Grenzcurve $AB = (gls_1)$. Nun kann die Phase l die Grenze nicht überschreiten; denn in diesem Fall müßte nach unten hin in dem

1) Gött. Nachrichten. 1890. S. 223.

Dampfgebiet eine Grenze auftreten, längs welcher entweder die Phasen g, l, s_1 oder die Phase g, l, s_2 koëxistirten; beides ist nicht möglich wegen der Neigungsverhältnisse der Curven (gs_1s_2), (gls_1) und (gls_2). Wenn wir also von einem Punkt der Grenze AB ausgehend den Zustand des Systems durch allmälige Vergrößerung des Volumens verändern, so muß zuerst die Phase l verschwinden, während die Phase s_1 die Grenze überschreitet. Daraus ergiebt sich, daß unter allen Umständen die Bedingung erfüllt ist

$$\alpha > \frac{m_1'}{m_2'}.$$

Würde nemlich umgekehrt α kleiner als m_1'/m_2' sein, so würde man das Verhältniß der gesammten Mengen der beiden Componenten so wählen können, daß $\alpha < \frac{M_1}{M_2} < \frac{m_1'}{m_2'}$; dann würde zuerst die feste Phase s_1 verschwinden und die Phase l die Grenze überschreiten. Die Verhältnisse der drei gleichzeitig aus den Phasen l und s_1 verdampfenden Mengen der zweiten und ersten Componente sind gegeben durch $\frac{m_2'}{m_1'} : \alpha\frac{m_2'}{m_1'} : 1-\alpha\frac{m_2'}{m_1'}$. Ist $\alpha > \frac{m_1'}{m_2'}$, so ist die letzte Differenz negativ, d. h. es tritt keine Verdampfung, sondern umgekehrt eine Condensation der Phase s_1 ein, wenn wir durch Volumvergrößerung eine Verdampfung der flüssigen Phase herbeiführen.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun, daß auf der Grenze AB nur die Phasen l und g zum Verschwinden gebracht werden können; es folgt daraus weiter, daß in dem Quadrupelpunkt A nur die Phasen s_2 und l gleichzeitig verschwinden können; dann kann aber auch auf der unteren Grenze AS nur s_2 und nicht s_1 zum Verschwinden gebracht werden. Wir sind somit zu dem Resultate gelangt.

Wenn in dem von den Curven $AF = (ls_1s_2)$ und $AB = (gls_1)$ zunächst dem vierfachen Punkte begrenzten Winkelraum Gleichgewicht besteht zwischen den Phasen l und s_1, so tritt die letztere Phase in den von Dampf erfüllten Raum über und wir haben in diesem zunächst der Grenze Gleichgewicht zwischen den Phasen g und s_1. Es folgt hieraus weiter die Existenz einer Grenze zweiter Ordnung, jenseits welcher nur noch die gasförmige Phase existirt. Die Gleichung dieser Grenze ist ebenso wie bei dem früheren Problem

$p_1 = \pi_1\left(1+\frac{M_2R_2}{M_1R_1}\right)$. Da nach unserer Voraussetzung $\frac{M_1}{M_2} > \alpha$ und $\alpha > \frac{\pi_1R_2}{\pi_2R_1}$ so ist auch $\frac{M_1R_1}{M_2R_2} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$; die durch die vorhergehende Gleichung bestimmte Curve liegt somit ganz in der zwischen den Grenzen SA, AB und der Temperaturaxe eingeschlossenen Fläche.

Die Grenze AB wird die Curve durchschneiden, durch welche das Gebiet der Phasen s_1, l geschieden wird von demjenigen, in welchem nur noch die flüssige Phase existirt. Der Schnittpunkt sei B, die von demselben ausgehende Grenze zweiter Ordnung BE. Wenn wir von einem beliebigen Punkt dieser Grenze ausgehen, und die Temperatur erhöhen, so wird in jedem Punkt das Volumen der Phase l bestimmt sein durch eine Funktion des Drucks der Temperatur und der in der Phase vorhandenen Mengen der Componenten M_1 und M_2. Bei allmälig steigender Temperatur werden wir aber nothwendig einen Punkt erreichen, in welchem die flüssige Phase verdampft. In diesem Punkt sind die Bedingungen erfüllt:

$$\mu_1'(\pi_1, T) = \mu_1''\left(p, T, \frac{M_1}{v''}, \frac{M_2}{v''}\right)$$

$$\mu_2'(\pi_2, T) = \mu_2''\left(p, T, \frac{M_2}{v''}, \frac{M_1}{v''}\right)$$

$$p = \pi_1+\pi_2 = p\left(T, \frac{M_1}{v''}, \frac{M_2}{v''}\right).$$

Eliminirt man aus denselben die Größen π_1, π_2, v'', so bleibt eine Gleichung zwischen p und T. Diese bestimmt eine neue Grenze zweiter Ordnung $B'D$, durch welche der Raum, in welchem allein die Phase l existirt, geschieden wird von demjenigen, in welchem l und g koëxistiren. Das Verhalten des aus der flüssigen Phase längs der Curve $B'D$ gebildeten Dampfes ist im Allgemeinen folgendes. Bei steigender Temperatur entwickeln sich Dämpfe der beiden Componenten; da aber nach dem Vorhergehenden wenigstens zunächst der Grenze AB $\frac{M_1}{M_2} > \frac{\pi_1R_2}{\pi_2R_1}$ so wird schließlich noch ein Theil der Componente 1 in flüssigem Zustande übrig bleiben. Oberhalb der Curve $B'D$ wird sich eine Grenze hinziehen, welche das Gebiet der koëxistirenden Phasen (lg) scheidet von dem Gebiete der Phasen (l,g). Gegen den allein von der gasförmigen Phase eingenommenen Raum wird das betreffende Gebiet abgegrenzt durch die schon

früher betrachtete Curve $p_1 = \pi_1\left(1+\frac{M_2R_2}{M_1R_1}\right)$. Bezeichnen wir durch C den Punkt, in welchem die neue Grenze (gl_1) (gl) die Linie AB durchschneidet, so zieht sich durch diesen bis zu der Curve p eine Grenzlinie CH hin, oberhalb welcher g und l_1, unterhalb welcher g und s_1 koëxistiren und welche nichts anderes ist als ein Stück der gewöhnlichen Schmelzcurve der Componente 1. Es ist denkbar, daß die Curve p die Grenze (gl_1l) in einem Punkte J trifft. In diesem müßte dann die flüssige Phase l ohne Rest in Dampfform sich verwandeln. Für höheren Druck müßte dann umgekehrt die Componente 2 bei der Verdampfung im Rest bleiben; es würde also von J an das Gebiet des von Dampf allein erfüllten Raumes begrenzt sein durch die Curve $p_2 = \pi_2\left(1+\frac{M_1R_1}{M_2R_2}\right)$; $\frac{M_1R_1}{M_2R_2} < \pi_1/\pi_2$ in dem Schnittpunkt der beiden Curven müßte die Bedingung erfüllt sein $\frac{M_1R_1}{M_2R_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$.

Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels.

Von

Eduard Riecke.

Wenn eine Molekel einer chemischen Verbindung aus mehreren Theilmolekeln besteht, so ist der Fall denkbar, daß die Dissociation stufenweise sich vollzieht; beispielsweise kann eine Verbindung, deren Zusammensetzung durch das Symbol $(a\ b\ c\ d)$ angegeben wird, sich zunächst in die Molekeln $(a\ b\ c)$ und d spalten und weiterhin kann die Molekel $(a\ b\ c)$ sich in die Molekeln a, b, c dissociiren. Beispiele derartiger Erscheinungen bieten die mehrbasischen Säuren in wässriger Lösung und nach den Dampfdichtebestimmungen von Biltz[1]) wahrscheinlich auch der Schwefel.

Die Dissociationstheorie bietet die Mittel, die Gesetze derartiger Erscheinungen in großer Allgemeinheit zu entwickeln; wir beschränken uns im Folgenden auf den im Vorhergehenden schon als Beispiel angeführten Fall, welcher zu einer Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung vorzugsweise Veranlassung bieten dürfte.

---

1) Biltz, Zeitschrift für physikalische Chemie. Bd. II. 1888.

I. Gesetz der stufenweise Dissociation.

Wir bezeichnen die unzersetzte Substanz durch $\mathfrak{S}$, ihr Molekulargewicht durch σ; die Theilmolekeln durch $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{E}_4$, ihre Molekulargewichte durch α_1, α_2, α_3 und α_4. Die chemische Zusammensetzung von $\mathfrak{S}$ wird dann gegeben durch die Formel

$$\sigma\mathfrak{S} = \alpha_1\mathfrak{E}_1 + \alpha_2\mathfrak{E}_2 + \alpha_3\mathfrak{E}_3 + \alpha_4\mathfrak{E}_4$$

Ebenso setzen wir:

$$\tau\mathfrak{T} = \alpha_1\mathfrak{E}_1 + \alpha_2\mathfrak{E}_2 + \alpha_3\mathfrak{E}_3.$$

Die Dissociation erfolge so, daß zuerst die gasförmigen Molekeln von $\mathfrak{S}$ zerfallen in die Gasmolekeln $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{E}_4$ und hierauf die Molekeln $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$. Die Potentiale von $\mathfrak{S}$ im gasförmigen, flüssigen und festen Zustand seien μ, μ', μ''; die Potentiale der Gase $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$ seien μ_a, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Die Mengen der einzelnen Bestandtheile m, m', m'', m_a, m_1, m_2, m_3, m_4. Dann sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mu''dm'' + \mu'dm' + \mu dm + \mu_a dm_a + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \mu_3 dm_3 + \mu_4 dm_4 = 0$$

$$dm_1 + \frac{\alpha_1}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) + \frac{\alpha_1}{\tau}dm_a = 0$$

$$dm_2 + \frac{\alpha_2}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) + \frac{\alpha_2}{\tau}dm_a = 0$$

$$dm_3 + \frac{\alpha_3}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) + \frac{\alpha_3}{\tau}dm_a = 0$$

$$dm_4 + \frac{\alpha_4}{\sigma}(dm'' + dm' + dm) = 0.$$

Die Potentiale der verschiedenen Componenten müssen somit den Bedingungen genügen:

$$\mu = \mu' = \mu'' \qquad 1).$$

$$\begin{aligned} \tau\mu_a + \alpha_4\mu_4 &= \sigma\mu \\ \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 &= \tau\mu_a. \end{aligned} \qquad 2).$$

Die erste Gleichung ist der Ausdruck des allgemeinen Satzes, daß das Potential einer chemischen Componente in allen Phasen eines Systems denselben Werth haben muß, wenn Gleichgewicht vorhanden ist. Der partielle Sättigungsdruck von $\mathfrak{S}$ hängt hiernach von der Temperatur nahezu in derselben Weise ab, wie wenn die gasförmigen Molekeln von $\mathfrak{S}$ der Dissociation nicht unterworfen sein würden.

Für den Gaszustand sind Potential und Entropie durch die Formeln gegeben

$$\mu = E + T\{R\log d - \mathfrak{A}c\log T + \mathfrak{A}c_p - H\}$$
$$\eta/m = H + \mathfrak{A}c_v \log T - R\log d$$

wo E und H gewisse durch den Normalzustand bestimmte Constanten, d die Dichte, c_v, c_p die specifischen Wärmen und T die absolute Temperatur bezeichnen. $\mathfrak{A}$ ist das mechanische Aequivalent der Wärme, R die Constante des Boyle-GayLussacschen Gesetzes. Mit Benützung dieser Werthe geben die Gleichungen 2

$$\tau E_a + \alpha_4 E_4 - \sigma E + \mathfrak{A}T\{\tau c_{pa} + \alpha_4 c_{p4} - \sigma c_p\}$$
$$= T\{\tau\eta_a/m_a + \alpha_4\eta_4/m_4 - \sigma\eta/m\} = Q$$

und

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 - \tau E_a + \mathfrak{A}T\{\alpha_1 c_{p1} + \alpha_2 c_{p2} + \alpha_3 c_{p3} - \tau c_{pa}\}$$
$$= T\{\alpha_1\eta_1/m_1 + \alpha_2\eta_2/m_2 + \alpha_3\eta_3/m_3 - \tau\eta_a/m_a\} = Q_a.$$

Q und Q_a sind nichts anderes als die Umwandlungswärmen, welche den Uebergängen $\sigma\mathfrak{S} \to \tau\mathfrak{T} + \alpha_4\mathfrak{E}_4$ und

$$\tau\mathfrak{T} \to \alpha_1\mathfrak{E}_1 + \alpha_2\mathfrak{E}_2 + \alpha_3\mathfrak{E}_3$$

entsprechen, bezogen auf eine Grammmolekel der Substanzen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$.

Mit Benützung dieser Werthe von Q und Q_a und mit Rücksicht auf die Beziehung $R_1\alpha_1 = R_2\alpha_2 = R_3\alpha_3 = R_4\alpha_4 = R_a\tau = R\sigma$ lassen sich die Gleichungen 2 auf die Form bringen:

3).
$$\frac{d_a d_4}{d} = \Theta$$
$$\frac{d_1 d_2 d_3}{d_a} = \Theta_a$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Theta = e^{\tau H_a + \alpha_4 H_4 - \sigma H} e^{-Q/T} T^{\mathfrak{A}(\tau c_{va} + \alpha_4 c_{v4} - \sigma c_v)}$$
$$\Theta' = e^{\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3 - \tau H_a} e^{-Q_a/T} T^{\mathfrak{A}(\alpha_1 c_{v1} + \alpha_2 c_{v2} + \alpha_3 c_{v3} - \tau c_{va})}.$$

Zur Bestimmung der 6 in den Gleichungen 3 auftretenden Dichten hat man zunächst noch die Bedingung, daß die Summe der Partialdrucke der einzelnen gasförmigen Bestandtheile gleich ist dem Gesammtdruck. Verstehen wir, ebenso wie oben, unter R_1, R_2, R_3, R_4, R_a und R die Constanten des Boyle-GayLussac'schen Gesetzes für die einzelnen Componenten, so folgt hieraus die Gleichung:

$$R_1 d_1 + R_2 d_2 + R_3 d_3 + R_4 d_4 + R_a d_a + R d = p/T. \qquad 4).$$

Dazu kommen endlich noch die Gleichungen

$$\frac{d_1}{\alpha_1} = \frac{d_2}{\alpha_2} = \frac{d_3}{\alpha_3} \quad \text{und}$$
$$\frac{d_4}{\alpha_4} = \frac{d_1}{\alpha_1} + \frac{d'}{\tau} \qquad 5).$$

durch welche den Verhältnissen der chemischen Zusammensetzung Rechnung getragen wird. Die 6 Gleichungen 3, 4 und 5 bestimmen vollständig die Dichten der einzelnen gasförmigen Bestandtheile. Will man außerdem die Dampfdichte Δ des in Dissociation begriffenen Gases einführen, so hat man die Gleichung hinzuzufügen

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_a + d = \Delta \frac{p}{PT}. \qquad 6).$$

Hier bezeichnet Δ die Dampfdichte bezogen auf Luft, P die Constante des Gasgesetzes für Luft.

II. Dampfdichte des Schwefels.

Die vorhergehenden allgemeinen Gleichungen mögen nun in Anwendung gebracht werden auf die Dissociation des Schwefels. Die Untersuchungen von Beckmann[1]) und Schall[2]) haben gezeigt, daß Schwefelmolekeln von der Formel S_8 existiren. Die Untersuchungen von Biltz machen es wahrscheinlich, daß bei der Verdampfung des Schwefels unter dem Drucke einer Atmosphäre zunächst Molekeln S_8 sich entwickeln, daß diese sich spalten in S_6 und S_2 und daß im weiteren Verlaufe der Dissociation auch die Molekeln S_6 sich auflösen in je drei Molekeln S_2. Dieser Annahme entsprechend haben wir in den allgemeinen Gleichungen zu setzen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4, \quad \tau = 3\alpha_1, \quad \sigma = 4\alpha_1$$
$$d_1 = d_2 = d_3.$$

Wir erhalten dann zur Berechnung der unbekannten Dichten d, d_a, d_1 und d_4 die Gleichungen

$$d_a d_4 = \Theta d$$
$$d_1^3 = \Theta_a d_a$$
$$3d_1 + d_4 + \tfrac{1}{3} d_a + \tfrac{1}{4} d = p/R_1 T \qquad 7).$$
$$d_4 = d_1 + \tfrac{1}{3} d_a.$$

1) Beckmann, Zeitschrift für phys. Chem. Bd. V. 1890.
2) Schall, Berichte der D. chem. Gesellschaft. Jahrg. 23.

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen d und d_4, so ergiebt sich:

$$d_a(d_a+3d_1) = 4\Theta\left(\frac{3p}{R_1T}-2d_a-12d_1\right)$$

8). $$d = \frac{4p}{R_1T}-16d_1-\tfrac{8}{3}d_a$$

und durch Elimination von d_1

9). $$d_a^2+3d_a\sqrt[3]{\Theta_a d_a}+8\Theta d_a+18\Theta\sqrt[3]{\Theta_a d_a} = 12\Theta\frac{p}{R_1T}.$$

Nun ist für $T = 0$ auch Θ und Θ_a gleich Null. Somit ergiebt sich aus den Gleichungen 9, 8 und 7 für $T = 0$

$$d_a = d_1 = d_4 = 0 \quad \text{und}$$

$$d = \frac{4p}{R_1T}.$$

Die Dampfdichte des gasförmigen Schwefels bezogen auf Luft hat demnach für $T = 0$ den Werth:

$$D_0 = \frac{4P}{R_1}.$$

Für $T = \infty$ ist $\Theta = \Theta_a = \infty$. Somit ergiebt sich aus den Gleichungen 8 und 9

$$d_a = 0, \quad d_1 = \tfrac{1}{4}\frac{p}{R_1T} \text{ und } d = 0,$$

ferner vermöge der letzten der Gleichungen 7

$$d_4 = \tfrac{1}{4}\frac{p}{R_1T}.$$

Die gesammte Dichte des gasförmigen Schwefels wird für $T = \infty$

$$3d_1+d_4 = \frac{p}{R_1T} \text{ und die Dampfdichte}$$

$$D_\infty = \frac{P}{R_1}.$$

Wir denken uns aus den Gleichungen 9 und 7 die Dichten d_a und d_1 berechnet; wir lassen den Gesammtdruck p, unter welchem sich der gasförmige Schwefel befindet, unverändert und lassen die Temperatur wachsen von $T = 0$ bis $T = \infty$. Die für eine beliebige Temperatur sich ergebenden Werthe von d_a und d_1 dividiren wir

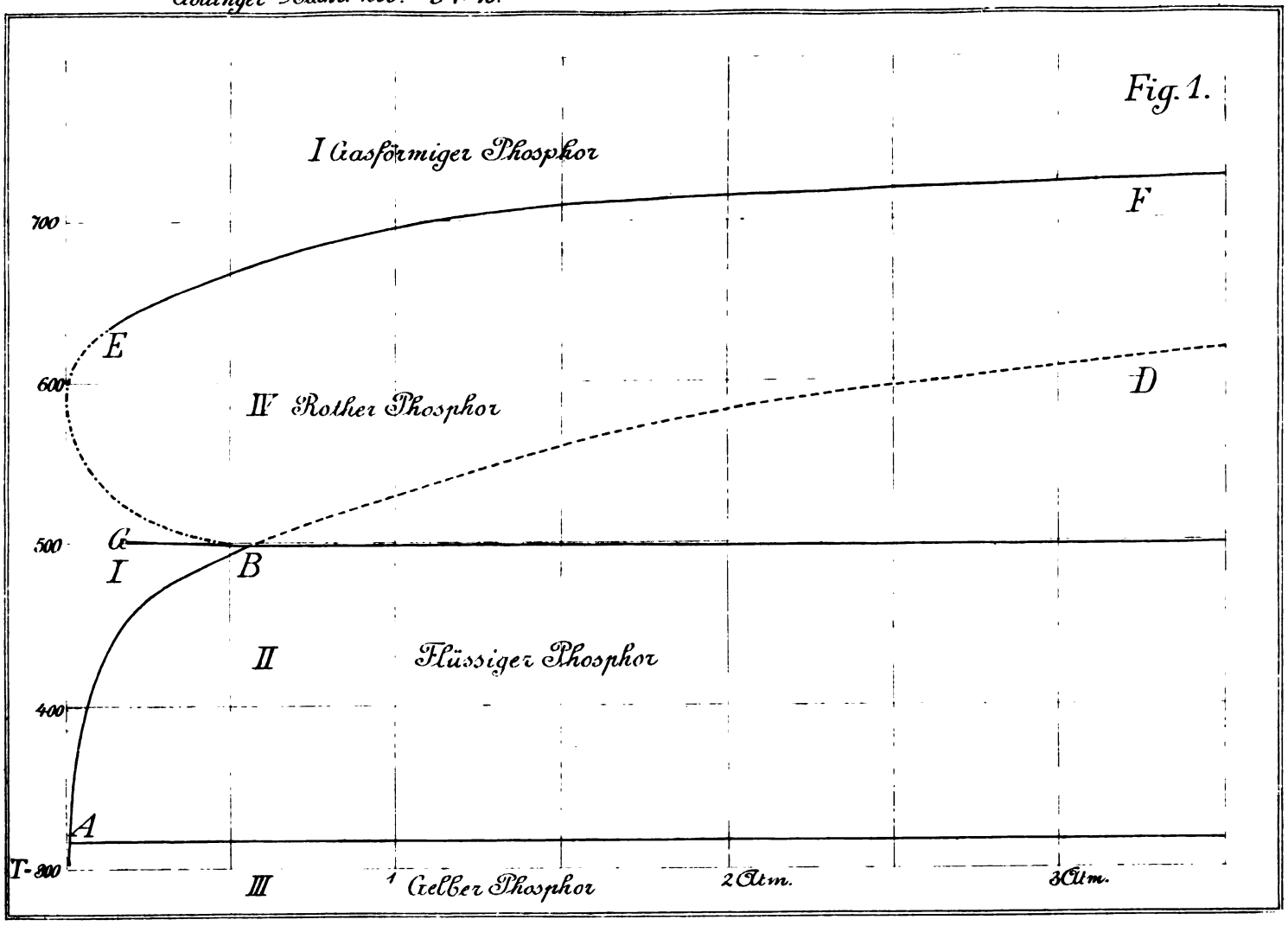


Fig. 1.
I Gasförmiger Phosphor
F
700
E
600
IV Rother Phosphor
D
500
G
I
B
II
Flüssiger Phosphor
400
A
T-300
III
1
Gelber Phosphor
2 Atm.
3 Atm.

OF ENGLAND
BRARY

Zu: Eduard Riecke. Specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen.
Göttinger Nachr. 1890. N:o 10.

Fig. 2

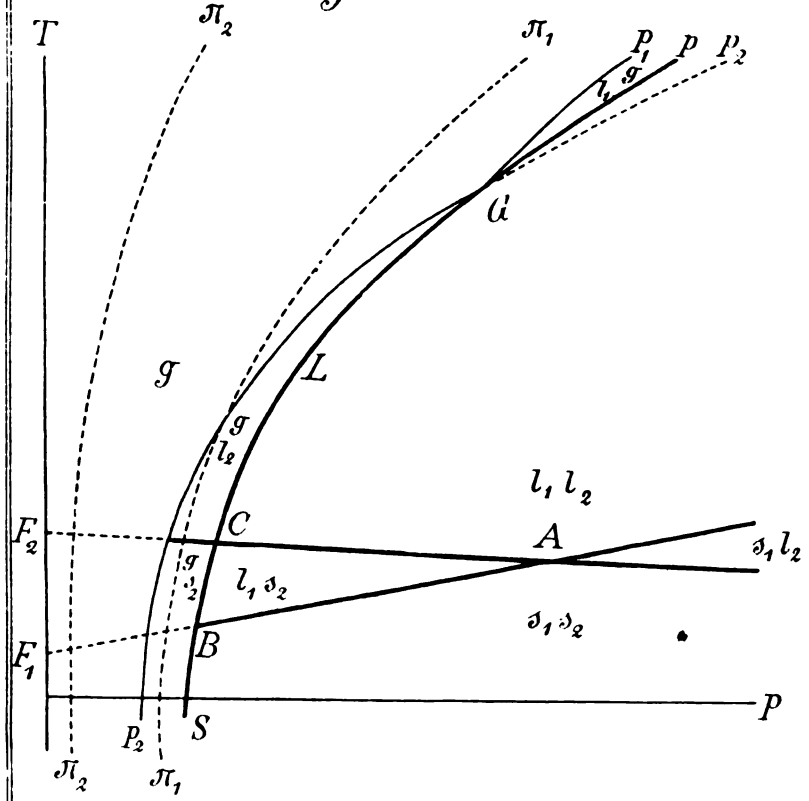
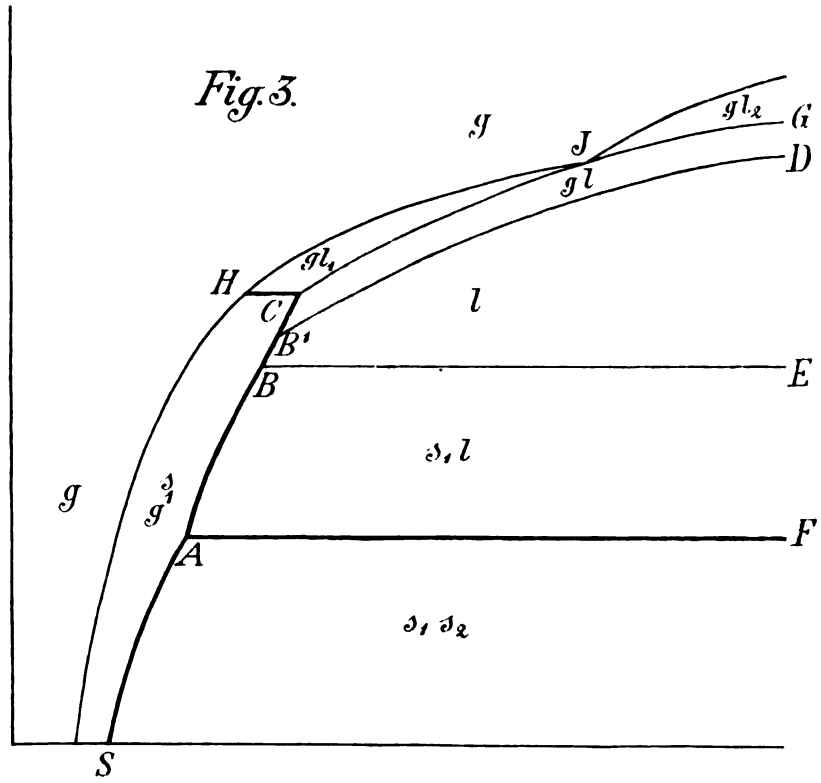
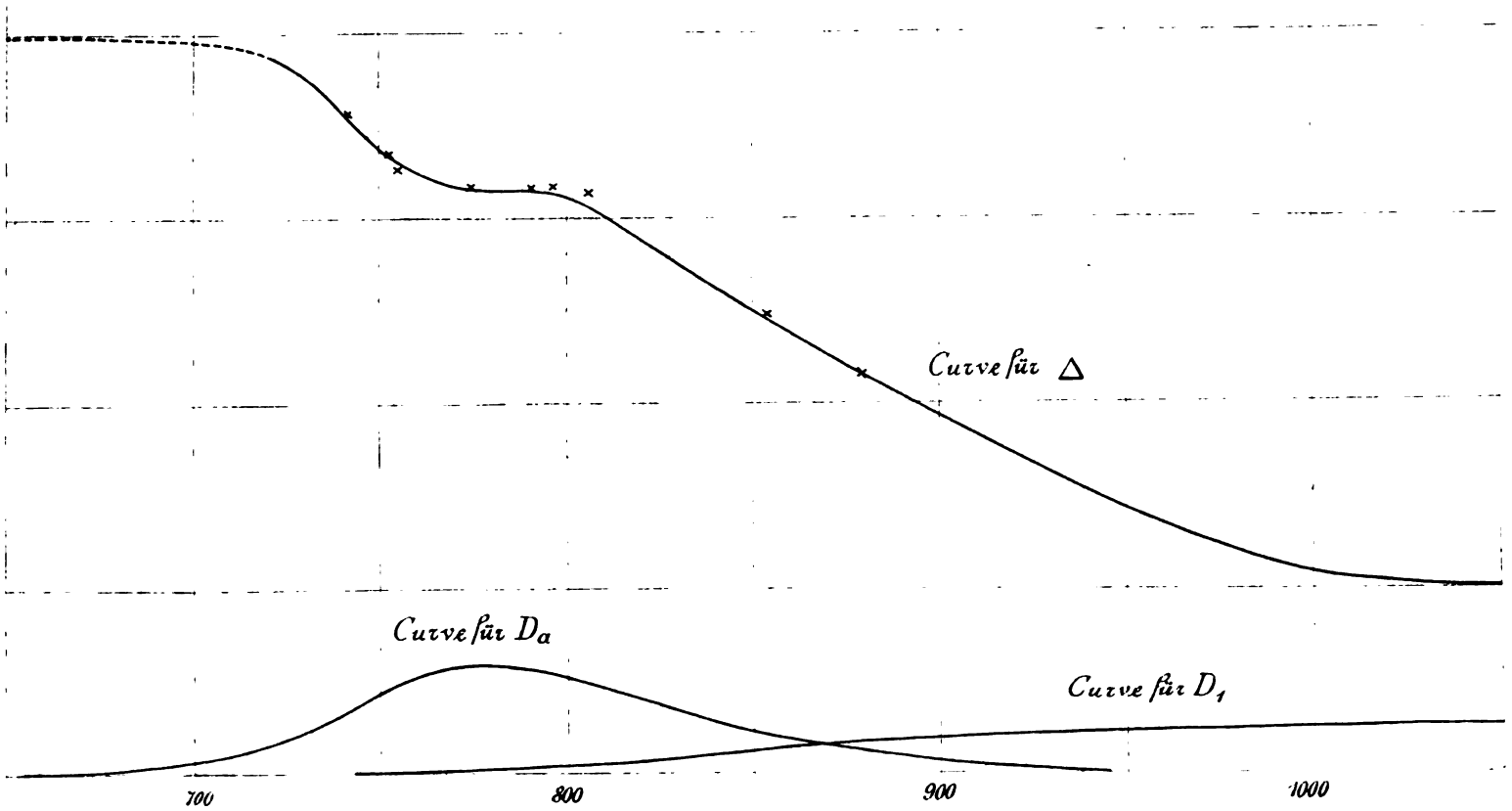


Fig. 3.



Zu: Eduard Riecke. Dissociation und Dampfdichte des Schwefels.

Göttinger Nachr. 1890. No. 10.



durch die den gegebenen Werthen von T und p entsprechende Dichte der Luft und bezeichnen diese Quotienten durch D_2 und D_1. Bei konstantem p wird dann D_2 eine Function der Temperatur sein, welche für $T = 0$ ebenfalls Null ist, welche mit wachsender Temperatur bis zu einem gewissen Maximum ansteigt und für $T = \infty$ wieder zu Null wird. Gleichzeitig ist D_1 für $T = 0$ gleich Null und nähert sich bei wachsender Temperatur dem Grenzwerthe $D_1 = \frac{1}{4}\frac{P}{R_1}$.

Setzen wir weiter $d_4\frac{PT}{p} = D_4$, $d\frac{PT}{p} = D$ so ergiebt sich

$$3D_1 + D_4 + D_2 + D = \Delta$$

wo Δ die Dampfdichte des gasförmigen Schwefels.

Die Größen D_4 und D werden durch die Gleichungen

$$D_4 = D_1 + \tfrac{1}{3}D_2$$

$$D = \frac{4P}{R_1} - 16D_1 - \tfrac{8}{3}D_2$$

bestimmt; mit Benützung derselben ergiebt sich

$$\Delta = \frac{4P}{R_1} - 12D_1 - \tfrac{4}{3}D_2.$$

Sind D_1 und D_2 bei einem konstanten Drucke als Funktionen der Temperatur gegeben, so ergiebt sich mit Hülfe dieser Gleichung die Dampfdichte des in der von uns angenommenen Weise sich dissociirenden Schwefels.

Da eine allgemeine Auflösung der Gleichung 9 nicht möglich ist, so wurden die für die Dissociation des Schwefels entwickelten Formeln dadurch geprüft, daß Curven für die Größen D_2 und D_1 in einer den allgemeinen Bedingungen entsprechenden Weise gegezogen und mit Hülfe derselben die Curve für die Dampfdichte Δ konstruirt wurde.

Daß es auf diesem Wege in der That möglich ist, eine mit den Beobachtungen übereinstimmende Curve zu erhalten, ergiebt sich aus der Betrachtung der Figur, in welcher die von Biltz bestimmten Werthe der Dampfdichte mit Kreuzen bezeichnet sind. Die numerische Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe der Dampfdichte ergiebt sich aus der folgenden Tabelle.

T	$D_a \frac{R_1}{P}$	$D_1 \frac{R_1}{P}$	$\Delta \frac{R_1}{P}$ ber.	$\Delta \frac{R_1}{P}$ beob.
741	0,31	0	3,59	3,58
753	0,47	0	3,37	3,36
755	0,50	0	3,33	3,29
775	0,58	0,005	3,17	3,17
791	0,55	0,010	3,15	3,17
797	0,52	0,015	3,13	3,19
807	0,48	0,025	3,06	3,15
854	0,20	0,110	2,41	2,49
879	0,11	0,14	2,17	2,14

Die der Zusammensetzung S_8 entsprechende Dampfdichte $\frac{4P}{R_1}$ wird von dem Schwefel bei dem Drucke einer Atmosphäre nicht erreicht, da schon vorher die Condensation zu flüssigem Schwefel eintritt.

Eine genauere Prüfung der entwickelten Formeln sowie eine Entscheidung der Frage, ob nicht außer den Molekeln von der Zusammensetzung S_8, S_6 und S_2 auch noch Molekeln S_4 oder S_5 existiren, ist ohne eine schwierige und zeitraubende Rechnung nicht ausführbar. Es müßten zu diesem Zweck aus den Werthen von D_a und D_1 noch die Werthe von D_4 und D berechnet werden; die entsprechenden Werthe von d_a, d_1, d_4 und d würden dann mit Hülfe der Gleichungen 7 zur Kenntniß von Θ und Θ_a führen. Endlich würde zu untersuchen sein, ob diese Größen in der durch die Theorie geforderten Weise als Functionen der Temperatur sich darstellen lassen.

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Zweite Mittheilung)[1]).

Vorgelegt von F. Klein.

Unsere Kenntnisse von den Singularitäten auf Raumcurven

1) Vgl. Göttinger Nachrichten 1888, pag. 73.

reichen wohl so weit, daß wir, wenigstens in den einfacheren Fällen, die Art ihres Entstehens übersehen können. Insbesondere erlaubt die geometrische Anschauung die vorschiedenen Möglichkeiten des Zusammenrückens je zweier „einfacher“ Singularitäten (d. i. solcher, die bei jeder Curve vorkommen) zu erschöpfen.

Indessen bleibt die innere Seite derartiger Vorgänge davon unberührt: erweist sich schon die geometrische Abzählung bei der Bestimmung der Anzahl von elementaren Singularitäten, welche in eine höhere eintreten, als unzureichend, so wird die verschiedenartige Geschwindigkeit, mit der die einzelnen singulären Punkte, Geraden, Ebenen coincidiren, gar nicht berücksichtigt.

Im Folgenden wird ein erster Versuch in dieser Richtung gemacht, indem die einschlägigen Verhältnisse auf einer allgemeinen Ordnungscurve vom Geschlecht Null mit algebraischen Hülfsmitteln studirt werden.

In einer früheren Mittheilung[1]) hatte ich die Discriminanten und Resultanten der bei einer allgemeinen ebenen Ordnungscurve R_n^2 vom Geschlecht Null in Betracht kommenden Singularitätenformen in ihre Elementarfactoren zerlegt. Indem ich die analoge Aufgabe für die Raumcurven R_n^3 in Angriff nehme, beschränke ich mich auf die nächstliegende Erweiterung jener Singularitäten, nämlich auf die („Hyperosculations“-)Ebenen „α^4“, die („Schmiegungsberühr-“)Ebenen „$\alpha^3\beta^1$“ und die („Treff-“)Tangenten „$(\alpha^2\beta)$“.

Die binären Formen, welche, gleich Null gesetzt, die Argumente α der genannten drei Singularitäten liefern, mögen durch eckige Klammern[2]) bezeichnet werden. Alsdann lautet die in Rede stehende Aufgabe: „Sind die Punktcoordinaten einer punktallgemeinen, rationalen Raumcurve R_n^3 durch ein System von vier binären Formen $n$ter Ordnung gegeben:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda) : f_4(\lambda),$$

so sollen die Discriminanten und Resultanten der Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^3\beta^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$ in Elementar-

1) Vgl. Göttinger Nachrichten 1888, pag. 73.

2) Desgleichen sollen weiterhin eckige Klammern im Falle einer Coincidenz zweier Singularitäten die betr. Invariante selbst angeben, deren Verschwinden das Criterium für das Eintreten der fraglichen Coincidenz ist. Innerhalb einer derartigen Klammer sollen noch die singulären Ebenen, Geraden und Punkte sich dadurch von einander abheben, daß die auf eine Gerade bezüglichen Argumente durch eine runde, und die auf einen Punkt bezüglichen durch zwei runde Klammern eingeschlossen werden.

factoren zerlegt werden, welche in den vierreihigen Coefficientendeterminanten δ der $f_i(\lambda)$ ganz rational und irreducibel sind".

Um die gemeinten Factoren rein herzustellen, bedienen wir uns vor Allem zweierlei Hülfsmittel: Einmal werden die erforderlichen Eliminationen nicht sowohl an die $f_i(\lambda)$, sondern an das System ihrer conjugirten[1]) Formen „$\varphi_k(\lambda)$" geknüpft; sodann aber denken wir uns vielfach die Curven R_n^3 als Projectionen[2]) einer im vierdimensionalen Raume gelegenen R_n^4, und zwar wird der Punkt P, von dem aus die letztere projicirt wird, gerade der Bedingung unterworfen, daß für die Projectionscurve R_n^3 ein bestimmter unter jenen Elementarfactoren (und nur er allein) verschwindet.

Die bei dieser Projectionsmethode zur Anwendung gelangenden Hülfssätze sollen gleich hier im Zusammenhange besprochen werden.

Es liege eine punktallgemeine R_n^4 vor:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = g_1(\lambda) : g_2(\lambda) : g_3(\lambda) : g_4(\lambda) : g_5(\lambda).$$

Welches ist dann der geometrische Punktort („Raum"), der von solchen „Ebenen" $(\alpha^\mu \beta^\nu)$ beschrieben wird, daß die Argumente α, β noch einer algebraischen Bedingung $\varphi(\overset{\mu}{\alpha}, \overset{\nu}{\beta}) = 0$ genügen.

Die Coordinaten $p_{ikl} = |x_i x_k x_l|$ einer Ebene $(\alpha^\mu \beta^\nu)$ sind ganze Functionen von α, β; in α vom Grade $2(n-2)$, in β vom Grade $n-2$:

$$p_{ikl} = p_{ikl}(\overset{2(n-2),}{\alpha}, \overset{(n-2)}{\beta}).$$

Zur Ermittelung der Ordnung des fraglichen Raumes der (p) schneide man in bekannter Weise mit einer Geraden q_{mn}. Die beiden Gleichungen

$$\Sigma p_{ikl} q_{mn} = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

besitzen $(n-2)(\mu+2\nu)$ Lösungssysteme α, β: dies ist dann zugleich im Allgemeinen d. h. wenn jede der die Gerade q treffenden Ebenen p nur einmal[3]) zu zählen ist, die Ordnung unseres Raumes.

Als Beispiel diene der Ort der Ebenen $(\alpha^\mu \beta^\nu \gamma)$. Soll eine Ebene $(\alpha^\mu \beta^\nu)$ die Curve R_n^4 noch einmal, in γ treffen, so müssen, wenn man unter $\psi_{(k)} \lambda^n (k = 1, 2, .. n-4)$ die zu den $g_i(\lambda)$ conjugirten

1) Vgl. des Verfassers Schrift: „Apolarität und rationale Curven" Cap. I.

2) Diese Methode des Projicirens bezwecks Ausführung von Eliminationen ist wohl vereinzelt auch sonst schon angewendet; cf. z. B. Klein, Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Math. Ann. XXXVI, § 19.

3) Zählt dagegen jede der betr. Ebenen ϱ-fach, so ist selbstredend die angegebene Anzahl durch ϱ zu dividiren.

Formen versteht, $(n-4)$ Gleichungen von der Form:

$$\psi_{\alpha^2\beta\gamma\lambda_5\lambda_6\ldots\lambda_n} = 0$$

noch einfach unendlich viele Werthsysteme $(\lambda_5, \lambda_6, \ldots \lambda_n)$ bei constanten α, β, γ zulassen. Denkt man sich für den Augenblick der Größe α einen numerischen Werth beigelegt, so wird die vorliegende Eliminationsaufgabe äquivalent mit der einfacheren, die Gleichung für die Argumente β, γ der Doppelpunkte einer R^2_{n-1} aufzusuchen. Dieselbe ist (nach Elimination von γ) bekanntlich vom Grade $(n-3)(n-4)$ in β, mithin von doppelt so hohem Grade in α. Die Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ lautet also:

$$\varphi\left(\overset{2(n-3)(n-4)}{\alpha}, \overset{(n-3)(n-4)}{\beta}\right) = 0,$$

und $(n-2)(\mu+2\nu) = 4(n-2)(n-3)(n-4)$ Ebenen $(\alpha^2\beta\gamma)$ begegnen nach Obigem einer beliebigen Geraden. Da aber jede dieser Ebenen doppelt vorkommt, als Ebene $(\alpha^2\beta)$ und als Ebene $(\alpha^2\gamma)$, so ist die Ordnung des Raumes „$(\alpha^2\beta\gamma)$“ nur gleich $2(n-2)(n-3)(n-4)$.

Für das Folgende ist noch die Ordnung des Ortes sämmtlicher Sehnen der R^4_n zu eruiren. Die Coordinaten $p_{ik} = |x_i x_k|$ einer Sehne $((\alpha, \beta))$ sind in α, β symmetrisch und vom Grade $n-1$. Schneidet man wiederum mit einer Graden $q_{lm} = |y z|$, so führt das auf die Aufgabe, alle Werthsysteme α, β zu bestimmen, für welche die sämmtlichen Determinanten der Matrix

$$|g_i(\alpha), g_i(\beta), y_i, z_i| = 0$$

verschwinden. Die nach bekannter Methode resultirende Anzahl[1]) $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist die Ordnung des Raumes $((\alpha, \beta))$.

Nunmehr kehren wir zur Curve R^3_n zurück, und nehmen an, daß für sie einer jener „Elementarfactoren“ verschwinde, also das Criterium für ein bestimmtes Zusammenrücken zweier einfacher Singularitäten erfüllt sei. Dann ist es gestattet, und zwar noch auf mannigfaltige Art, die R^3_n als Projection einer allgemeinen R^4_n anzusehen, so, daß der Projectionspunkt P auf einem bestimmten „Raume“ liegt, und eben dadurch das Zustandekommen der fraglichen höheren Singularität für die Projectionscurve, (oder auch den Projectionskegel) allein ermöglicht.

Hier gilt der fundamentale Satz:

„Der Grad irgend eines Elementarfactors der R^3_n in den δ ist genau gleich der Ordnung des Raumes,

1) Diese Anzahl als Grad der „Doppelpunktsinvariante“ einer R^3_n findet sich auf andere Art abgeleitet bei H. Brill, Math. Ann. III, pag. 456.

dem der Projectionspunkt P der entsprechenden R_n^4 angehört".

Der Beweis fließt unmittelbar aus den Grundeigenschaften der zu den g conjugirten Formen ψ. Fügt man nämlich dem Systeme der $n-4$ Formen ψ eine beliebige weitere hinzu, so stellt das so erweiterte System in projectivischem Sinne diejenige R_n^3 dar, welche aus der R_n^4 durch Projection von einem bestimmten Punkte P auf eine beliebige Ebene hervorgeht: die Coefficienten der neu hinzugetretenen Form ψ sind geradezu die (polyedralen) Coordinaten von P. Die linke Seite der Gleichung des, einem bestimmten Elementarfactor der R_n^3 entsprechenden Raumes der Punkte P stimmt dann mit dem Elementarfactor selber überein.

Vermöge der beiden soeben explicirten Hülfssätze lassen sich die Criterien für singuläre Geraden und Punkte der R_n^3 bilden, insofern die jedesmal noch erforderlichen Eliminationen auf bekannte Art ausführbar sind. Das Letztere gilt auch ohne Weiteres für die singulären Ebenen, sowie für die Aufstellung der drei Singularitätenformen selbst.

Um auch hierfür ein Beispiel anzugeben, so ist zum Eintreten einer Ebene $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ das gleichzeitige Bestehen von $n-3$ Gleichungen:

$$\varphi_{\alpha^3\beta^3\gamma^3\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_n} = 0$$

nothwendig und hinreichend: die Elimination sämmtlicher Argumente führt zu einer Bildung vom Grade $6(n-4)(n-5)(n-6)$ in den δ.

Es sei gestattet, mit Uebergehung der einzelnen Zwischenrechnungen, die Endergebnisse in Gestalt zweier Tabellen mitzutheilen.

I. Tabelle der Invarianten.

Bezeichnung [1].		Grad in den δ.
1.	$[\alpha^5]$	$5(n-4)$
2.	$[\alpha^4\beta^2]$	$8(n-4)(n-5)$
3.	$[\alpha^3\beta^3]$	$\frac{9}{2}(n-4)(n-5)$
4.	$[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$	$6(n-4)(n-5)(n-6)$
5.	$[(\alpha^3)]$	$3(n-2)$
6.	$[(\alpha^2\beta\gamma)]$	$2(n-2)(n-3)(n-4)$
7.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$	$7(n-2)(n-4)$
8.	$[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$	$6(n-2)(n-4)$
9.	$[\alpha^3\beta^3, (\alpha^2\gamma)]$	$10(n-2)(n-4)(n-5)$
10.	$[((\alpha\beta))]$	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

1) Wegen der Bezeichnungen verweise ich noch einmal auf die Anm. pag. 367.

II. Tabelle der Singularitätenformen.

Bezeichnung.	Grad in λ.	Grad in den δ.
$[\alpha^4]$	$4(n-3)$	f
$[\alpha^3\beta^3]$	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
$[(\alpha^3\beta)]$	$2(n-2)(n-3)$	$(n-2)$.

So bedeutet in der I. Tabelle $[\alpha^3\beta^3, (\alpha^3\beta)]$ die linke Seite des Criteriums für das Eintreten einer derartigen „Schmiegungsberührebene“ $\alpha^3\beta^3$, daß die Tangente (α^3) die Curve R_n^3 noch einmal in β trifft u. s. w.

Daran mögen gleich die beiden weiteren Tabellen für die Grade, wie für die Zerlegungen der Discriminanten und Resultanten der drei Singularitätenformen angeschlossen werden.

III. Die Discriminanten und Resultanten der Singularitätenformen.

A. Die Grade in den δ.

$$\begin{cases} D[\alpha^4] & 2(4n-13) \\ D[\alpha^3\beta^3] & 4(n-4)(6n^2-42n+71) \\ D[(\alpha^3\beta)] & 2(n-2)(2n^2-10n+11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^3]\} & 14(n-3)(n-4) \\ R\{[\alpha^4], [(\alpha^3\beta)]\} & 6(n-2)(n-3) \\ R\{[\alpha^3\beta^3], [(\alpha^3\beta)]\} & 10(n-2)(n-3)(n-4) \end{cases}$$

B. Die Zerlegungen in Elementarfactoren.

$$\begin{cases} D[\alpha^4] = [\alpha^5].[(\alpha^3)]^1) \\ D[\alpha^3\beta^3] = [(\alpha^3)]^{(2n-6)(2n-9)}.[\alpha^5].[\alpha^4\beta^2].[\alpha^3\beta^3]^6[\alpha^3\beta^3\gamma^3]^2[\alpha^3\beta^2, (\alpha^3\beta)] \\ D[(\alpha^3\beta)] = [(\alpha^3)].[(\alpha^3\beta\gamma)]^2[((\alpha\beta))]^2[\alpha^3\beta^2, (\alpha^3\beta)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^3]\} = [\alpha^4\beta^2].[(\alpha^3)]^{2(n-4)}.[\alpha^5]^2 \\ R\{[\alpha^4], [(\alpha^3\beta)]\} = [\alpha^4, (\alpha^3\beta)].[(\alpha^3)]^2 \\ R\{[\alpha^3\beta^3], [(\alpha^3\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{2(n-4)}.[\alpha^3\beta^2, (\alpha^3\beta)]^2.[\alpha^3\beta^3, (\alpha^3\gamma)]. \end{cases}$$

Da die Existenz der einzelnen Elementarfactoren rein geometrisch

---

1) Diese Zerlegung gilt ganz allgemein, wie bereits von H. Brill bewiesen ist. Vgl. Math. Ann. XX, pag. 338. Aber auch die fünf weiteren Zerlegungen gestatten eine Ausdehnung auf Curven R_n^d im Raume von d Dimensionen. Diese Ausdehnung erklärt erst die Besonderheiten und Verschiedenheiten der Fälle $d = 2$ und $d = 3$.

a priori eingesehen werden kann, so handelt es sich nur um die Ermittelung ihrer Vielfachheit.

Nimmt man die bezüglichen Exponenten als Unbekannte, so wird die Gradvergleichung beider Seiten je auf eine Anzahl diophantischer Gleichungen führen. Daß die Auflösung der letzteren in der That immer nur auf eine einzige Art bewerkstelligt werden kann, soll nunmehr im Einzelnen nachgewiesen werden.

Die Zerfällung der Discriminante $D[\alpha^4]$ in der angegebenen Weise folgt unmittelbar aus den bezüglichen Formeln der Tabellen I und II.

Bezüglich der Discriminante $D[\alpha^3\beta^2]$ bemerke man vorab, daß durch eine Tangente (α^3) genau $2n-8$ Ebenen gehen, welche die Curve R_n^3 noch einmal berühren. Der Exponent des Factors $[(\alpha^3)]$ muß also, bis auf einen noch unbekannten positiv rationalzahligen Factor a, die Anzahl der Paare darstellen, welche sich aus jenen $2n-8$ Ebenen bilden lassen, somit die Form $a(n-4)(2n-9)$ besitzen.

Bedeuten des Weiteren b, c, d, e, f positive, ganze Zahlen, so kann der Character der fraglichen Zerlegung nur der folgende sein:

$$D[\alpha^3\beta^2] = [(\alpha^3)]^{a(n-4)(2n-9)}.[\alpha^5]^b[\alpha^4\beta^2]^c[\alpha^3\beta^3]^d[\alpha^3\beta^2\gamma^2]^e[\alpha^3\beta^3,(\alpha^3\beta)]^f.$$

Mit Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden Formeln in I und II herrscht demnach (nach beiderseitiger Hebung des Factors $n-4$) die Identität:

$$4(6n^2-42n+71) = 3a(n-2)(2n-9)+5b+8c(n-5)+\tfrac{9}{2}d(n-5) + 6e(n-5)(n-6)+7f(n-2).$$

Die Vergleichung der Coefficienten von n^2 liefert

$$a+e = 4,$$

sodaß auch a ganzzahlig ausfallen muß: ferner wird für $n = 2$:

$$44 = 5b-24c-\frac{27}{2}d+72e,$$

endlich für $n = 5$:

$$44 = 5b+9a+21f,$$

woraus durch Subtraction entsteht:

$$0 = 3a+8c+7f+\tfrac{9}{2}d-24e.$$

Für a und e sind vorerst die drei Möglichkeiten denkbar:

$$a = 1,\ e = 3;\quad a = e = 2;\quad a = 3,\ e = 1.$$

Von diesen kommt die dritte wegen der letztbemerkten Relation

in Wegfall, insofern die Summe $3a+8c+7f+\frac{8}{2}d$ sicher den Werth 24 übersteigt.

Wäre andererseits $a = 1$, so hätte man:

$$35 = 5b+21f,$$

was keine brauchbaren Lösungen für b und f zulassen würde. Somit bleibt nur die Annahme $a = e = 2$. Dadurch kommt nunmehr:

$$26 = 5b+21f, \quad 42 = 8c+7f+\tfrac{8}{2}d.$$

Die erste Beziehung hat $b = f = 1$ zur Folge, und dies wiederum, in die zweite eingesetzt:

$$35 = 8c+\tfrac{8}{2}d,$$

was sich nur mit den Werthen $c = 1$, $d = 6$ verträgt. Damit ist die zweite der Zerlegungen III B bewiesen. Bezeichnen hinsichtlich der dritten Discriminante $D[(\alpha^2\beta)]$ wiederum a, b, c, d positive ganze Zahlen, so kommt zunächst durch Gradvergleichung (nach Hebung von $n-2$):

$$2(2n^2-10n+11) = 3a+2b(n-3)(n-4)+\frac{c}{2}(n-1)+7d(n-4).$$

Unmittelbar geht daraus $2b = 4$ i. e. $b = 2$ hervor. Hierauf gestützt, erhält man für $n = 4$:

$$2 = a+\frac{c}{2},$$

also

$$a = 1, \quad c = 2.$$

Endlich liefert die Einsetzung der gefundenen Werthe in die für $n = 0$ resultirende Beziehung:

$$22 = 50-28d$$

d. i. $d = 1$, womit die dritte Formel von III B hergeleitet ist.

Aehnlich erledigen sich die drei Resultanten.

Die Form der ersten Zerlegung lautet:

$$R\{[\alpha^4], [\alpha^3\beta^2]\} = [\alpha^4\beta^2]^a.[(\alpha^3)]^{2b(n-4)}.[\alpha^5]^c,$$

wo a, b, c positive Zahlen, die erste und dritte ganz, die mittlere eventuell rational zu bestimmen sind. Die Eigenart des Exponenten von $[(\alpha^3)]$ rührt daher, daß für jede der oben bereits erwähnten $2(n-4)$ durch die Tangente (α^3) an die Curve gehenden Berührebenen $\alpha^3\beta^3$ eine Coincidenz des Argumentes α der Tangente mit dem Argument α der zugehörigen Hyperosculationsebene α^4 stattfindet.

Es wird jetzt identisch:

$$14n - 42 = n(8a + 6b) - (40a + 12b - 5c)$$

und demnach

$$7 = 4a + 3b, \quad 42 = 40a + 12b - 5c.$$

Die erstere Relation könnte nur durch $b = 1$, $a = 1$, oder aber durch $b = 2$, $a = \frac{1}{4}$ erfüllt werden; der letztere Fall ist nicht realisirbar, da er ein negatives c im Gefolge hätte, der erstere führt zum Werthe $c = 2$.

Die Zerspaltung der zweiten Resultante in IIIb gestaltet sich so einfach, daß sie übergangen werden kann. Für die letzte endlich gilt, ähnlich wie bei der ersten, der Ansatz:

$$R\{[\alpha^3\beta^3], [(\alpha^3\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{3a(n-4)} \cdot [\alpha^3\beta^3, (\alpha^3\beta)]^b \cdot [\alpha^3\beta^3, \alpha^3\gamma)]^c$$

wo wieder b und c ganze, a möglicherweise eine rationale positive Zahl ist. Die Gleichheit der beiderseitigen Grade drückt sich hier in der Identität aus:

$$10(n-3) = 6a + 7b + 10c(n-5).$$

Es ist demgemäß sicher $c = 1$ und für a und b kommt:

$$20 = 6a + 7b$$

d. i. entweder $b = 1$, $a = \frac{13}{6}$, oder aber $b = 2$, $a = 1$.

Das Erstere ist unstatthaft, wie leicht zu sehen. Denn für $n = 5$ wird $n - 4$ gleich der Einheit, sodaß nothwendig $2a$ ganz sein muß.

Die Tabelle I der zehn Invarianten läßt sich noch durchsichtiger machen, wenn man statt der Grade in den δ geeignet normirte Gewichte einführt. Schreibt man die Darstellungsformen $f_i(\lambda)$ der R_n^3 explicite, wie folgt:

$$f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{in}$$

und legt der Coefficientendeterminante $\delta_{iklm} = |a_i a_k a_l a_m|$ das Gewicht $i + k + l + m - 6$ bei, so lehrt eine leicht beweisbare Verallgemeinerung eines sehr bekannten Invariantensatzes, daß für jede Invariant-Combinante der f der Grad in den δ vermöge Multiplication mit $2(n-3)$ in das zugehörige Gewicht übergeht. Die demgemäß umgeformte Tabelle I ist:

Bezeichnung.		Gewicht in den δ.
1.	$[\alpha^6]$	$10(n-3)(n-4)$
2.	$[\alpha^4\beta^2]$	$16(n-3)(n-4)(n-5)$
3.	$[\alpha^3\beta^3]$	$9(n-3)(n-4)(n-5)$
4.	$[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
5.	$[(\alpha^2)]$	$6(n-2)(n-3)$
6.	$[(\alpha^2\beta\gamma)]$	$4(n-2)(n-3)^2(n-4)$
7.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$	$14(n-2)(n-3)(n-4)$
8.	$[\alpha^4, (\alpha^2\beta)]$	$12(n-2)(n-3)(n-4)$
9.	$[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\gamma)]$	$20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
10.	$[((\alpha\beta))]$	$(n-1)(n-2)(n-3)$

Es zeigen sich hier einige beachtenswerthe Eigenthümlichkeiten. Die Anzahl der Linearfactoren rechter Hand ist stets um Eins größer, als die Anzahl der links vorkommenden, von einander verschiedenen Argumente. Der Aufbau der Linearfactoren ist ein nach der Mitte zu symmetrischer. Durch ihr Verschwinden zeigen sie die Ordnung derjenigen R_n^2 an, für welche das jeweilige Vorkommniß noch nicht eintreten kann. Aber auch das Nichtauftreten des Factors $n-1$ resp. $n-2$ resp. beider erlaubt eine einfache Deutung. Nämlich sämmtliche Singularitäten, mit Ausnahme der letzten, können auch im Falle einer Geraden, wenn auch nur in uneigentlichem Sinne, zum Vorschein kommen, und das Gleiche gilt von den vier ersten, d. i. den singulären Ebenen im Falle eines Kegelschnitts.

Für die entsprechende Tabelle bei den R_n^3 können ähnliche Bemerkungen gemacht werden, nur daß es dort des Multiplicators $\frac{3}{2}(n-2)$ bedarf, um von den Graden zu den Gewichten überzugehen.

Die Analogien endlich, wie auch die Verschiedenheiten zwischen den sechs Zerlegungen hier und dort liegen so auf der Hand, daß ihre Verfolgung dem Leser überlassen werden kann.

Clausthal, Juli 1890.

Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades, welche bei der Transformation 3. Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die von Herrn F. Klein in seinen Vorlesungen eingeführten k^3 linear unabhängigen Jacobi'schen Functionen $k$ter (ungerader) Ordnung von zwei Veränderlichen, $X_{\alpha\beta}$, welche zu einer bestimmten geraden Charakteristik gehören, liefern $\frac{1}{2}(k^3-1)$ ungerade Functionen

$$Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} - X_{-\alpha-\beta}$$

und $\frac{1}{2}(k^3+1)$ gerade Functionen:

1) $$Y_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{-\alpha-\beta}).$$

Die ersteren sind von den Herrn Witting[1]) und Maschke[2]) untersucht worden; mit den letzteren habe ich mich beschäftigt im Anschluß an meine frühere Arbeit über eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung, von der s. Z. in diesen Nachrichten ein Auszug erschien[3]). Indem ich mir erlaube, meine Resultate der Societät vorzulegen, muß ich für die Ableitung derselben wieder auf die später in den mathematischen Annalen erscheinende ausführliche Darstellung verweisen.

Seien die fünf für $k = 3$ verhandenen Functionen $Y_{\alpha\beta}$ kurz mit $Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ bezeichnet. Bei linearer Transformation der Perioden, welche die Charakteristik festläßt, erfahren dieselben eine Gruppe G von 25920 linearen Substitutionen, welche aus folgenden vier Operationen erzeugt werden kann:

---

1) Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve 3. Ordnung analoge Configuration im Raume, Gött. Diss. (Dresden 1887).

2) Vgl. (auch für Bezeichnungen und weitere Literaturangaben) die kurze Mitteilung im Jahrg. 1888 dieser Nachr. (p. 78 ff.), sowie die ausführlichere Darstellung in den mathem. Annalen, Bd. 33, p. 317 ff.

3) Jahrg. 1889, p. 553 ff. Die dort angekündigte ausführlichere Darstellung ist inzwischen in Bd. 36 der mathem. Ann. p. 371 ff. erschienen.

	B	C	D	S_2^{-1}
Y_0'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0+2Y_1)$	Y_0	$-Y_0$	Y_0
Y_1'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0-Y_1)$	Y_1	$-Y_2$	εY_1
Y_2'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+Y_3+Y_4)$	Y_4	$-Y_1$	Y_2
Y_3'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+\varepsilon Y_3+\varepsilon^2 Y_4)$	Y_2	$-Y_3$	εY_3
Y_4'	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\varepsilon Y_4)$	Y_3	$-Y_4$	εY_4.

Dabei ist $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gesetzt.

II. Zunächst mögen einige Angaben über Untergruppen dieser Gruppe zusammengestellt werden:

1) C, D, S_2^{-1} erzeugen eine Gruppe G_0 von 648 Substitutionen, welche Y_0 unär, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 unter sich quaternär umsetzen; die letzteren werden dabei auf alle möglichen Arten unter sich vertauscht und auf alle möglichen Arten so mit dritten Einheitswurzeln multiplicirt, daß das Produkt $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ ungeändert bleibt. Diese Untergruppe ist demnach zusammengesetzt; die Reihenfolge der Factoren ihrer Zusammensetzung ist:

2, 3, 2, 2, 3, 3, 3.

Aus dem Raume $Y_0 = 0$ gehen bei den Substitutionen von G 40 „Haupträume I. Art" hervor; ebenso aus dem Punkte $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$ 40 „Hauptpunkte I. Art".

2) B, C, S_2^{-1} erzeugen eine Untergruppe H von ebenfalls 648 Substitutionen, welche Y_0, Y_1 binär nach einer Tetraedergruppe, Y_2, Y_3, Y_4 ternär nach einer Hesse'schen Gruppe umsetzen, die ein syzygetisches Büschel von Curven dritter Ordnung in sich überführt. Beide Gruppen sind dadurch mit einander verbunden, daß der Parameter dieses Büschels bei geeigneter Normirung sich ebenso substituirt wie Y_0, Y_1. Die Reihenfolge der Factoren der Zusammensetzung dieser Untergruppe H ist:

3, 2, 2, 2, 3, 3, 3.

Aus $Y_0 = Y_1 = 0$ gehen 40 „Hauptebenen", aus $Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$ 40 „Hauptgerade" unserer Gruppe hervor.

3) B, D, S_2^{-1} erzeugen eine Untergruppe K von 576 Operatio-

nen, welche $Y_3 - Y_4$ unär, Y_0, Y_1, Y_2, $Y_3 + Y_4$ quaternär umsetzt, und zwar so, daß die Fläche II. Ordnung:

$$2) \qquad Y_0(Y_3+Y_4) - 2Y_1Y_2 = 0$$

fest bleibt, während ihre beiden Geradenscharen sowol jede für sich nach einer Tetraedergruppe substituirt, als auch unter sich vertauscht werden können.

Die Zusammensetzung dieser Untergruppe wird durch das Schema:

$$2\left\{\begin{matrix}3, 2, 2\\ 3, 2, 2\end{matrix}\right\}2$$

dargestellt.

Aus $Y_3 - Y_4 = 0$ gehen bei den Operationen von G 45 „Hauptträume II. Art", aus $Y_0 = Y_1 = Y_2 = Y_3 + Y_4 = 0$ 45 „Hauptpunkte II. Art" hervor. Jeder der ersteren enthält 12 der letzteren, jeder der letzteren liegt in 12 der ersteren.

4) Man kann auf 27 verschiedene Arten fünf Haupträume II. Art (ein „Pentatop II. Art") so auswählen, daß je zwei derselben keine Hauptgerade gemein haben. Ein solches Pentatop II. Art bleibt fest bei einer Untergruppe L von 960 Operationen, welche seine Räume auf jede gerade Art vertauschen (und außerdem die linken Seiten ihrer Gleichungen mit bestimmten 6. Einheitswurzeln multipliciren).

5) Je zwei solche Pentatope II. Art, welche keinen Raum gemein haben, sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben und conjugirt in Bezug auf einen quadratischen Raum $u = 0$ (z. B. $Y_0^2 + 4Y_1Y_2 + 4Y_3Y_4 = 0$), der für noch 5 andere Paare von Pentatopen II. Art dieselbe Eigenschaft hat. Solcher quadratischen Räume gibt es 36; der einzelne derselben bleibt bei einer Untergruppe M von 720 Operationen invariant. Diese ist zwar zur Gruppe der Permutationen von 6 Dingen isomorph, kann aber nicht durch die Vertauschungen von 6 überzähligen Punktcoordinaten dargestellt werden.

III. Die Invarianten der Gruppe G habe ich davon ausgehend berechnet, daß sie zugleich Invarianten von G_0 und von H sein müssen. Invarianten von G_0 sind Y_0, das Produkt $Y_1Y_2Y_3Y_4$, die symmetrischen und alternirenden Functionen von Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2, Y_4^2; Invarianten von H sind einmal die Tetraederformen in Y_0, Y_1, dann die (von Maschke a. a. O. mitgeteilten) Invarianten der Hesse'schen Gruppe in Y_2, Y_3, Y_4, endlich eine Anzahl Formen, welche beide Reihen von Variabeln enthalten und auf Grund der oben erwähnten Cogredienz des Büschelparameters mit $Y_0 : Y_1$ durch

Polarenbildung gewonnen werden können. Bildet man dann aus den Formen von H Combinationen mit unbestimmten Coefficienten und bestimmt letztere aus den durch G_0 geforderten Symmetrieeigenschaften, so erhält man Invarianten von G. So findet man[1]): eine Invariante vierten Grades:

$$J_4 = Y_0^4 + 8Y_0\Sigma Y_1^3 + 48Y_1Y_2Y_3Y_4; \qquad 3)$$

eine Invariante sechsten Grades:

$$J_6 = Y_0^6 - 20Y_0^3\Sigma Y_1^3 + 360Y_0^3Y_1Y_2Y_3Y_4 + 80\Sigma Y_1^3Y_2^3 - 8\Sigma Y_1^6; \qquad 4)$$

eine Invariante zehnten Grades:

$$\begin{aligned} J_{10} = {} & Y_0^6Y_1Y_2Y_3Y_4 - Y_0^4\Sigma Y_1^3Y_2^3 + Y_0^3\Sigma Y_1^3Y_2Y_3Y_4 \\ & + 9Y_0^2Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 + Y_0\Sigma Y_1^4Y_2^3 - 6Y_0\Sigma Y_1^3Y_2^2Y_3^2 \\ & - 2\Sigma Y_1^5Y_2Y_3Y_4 + 2\Sigma Y_1^4Y_2^2Y_3Y_4; \end{aligned} \qquad 5)$$

eine Invariante zwölften Grades:

$$\begin{aligned} J_{12} = {} & 3Y_0^6Y_1Y_2Y_3Y_4 + 5Y_0^5\Sigma Y_1^3Y_2^3 - 33Y_0^3\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4 \\ & + 243Y_0^4Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^3 - 102Y_0^2\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3 \\ & + 30Y_0^3\Sigma Y_1^5Y_2Y_3Y_4 + 78Y_0^2\Sigma Y_1^4Y_2^2Y_3Y_4 \\ & - 108Y_0\Sigma Y_1^3Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 4\Sigma Y_1^6Y_2^3 + 16\Sigma Y_1^5Y_2^3 \\ & - 8\Sigma Y_1^4Y_2^2Y_3^3 + 168Y_1^3Y_2^2Y_3^2Y_4^3; \end{aligned} \qquad 6)$$

eine Invariante achtzehnten Grades:

$$\begin{aligned} J_{18} = {} & 3Y_0^{10}Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 4Y_0^9\Sigma Y_1^3Y_2^2Y_3^2 + 12Y_0^8\Sigma Y_1^4Y_2^2Y_3Y_4 \\ & - 36Y_0^7\Sigma Y_1^4Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - Y_0^8\Sigma Y_1^6Y_2^3 + 10Y_0^7\Sigma Y_1^6Y_2^2Y_3^3 \\ & + 96Y_0^6Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3 - 12Y_0^8\Sigma Y_1^5Y_2^2Y_3Y_4 \\ & - 90Y_0^6\Sigma Y_1^5Y_2^2Y_3^2Y_4 + 27Y_0^6\Sigma Y_1^4Y_2^3Y_3^2Y_4^2 \\ & + 108Y_0^5\Sigma Y_1^5Y_2^3Y_3^2Y_4^2 + 2Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^3 - 8Y_0^5\Sigma Y_1^6Y_2^2Y_3^3 \\ & + 4Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3 - 168Y_0^5\Sigma Y_1^5Y_2^3Y_3^2Y_4^3 \\ & + 6Y_0^5\Sigma Y_1^{10}Y_2^2Y_3Y_4 - 24Y_0^5\Sigma Y_1^7Y_2^2Y_3Y_4^2 \\ & + 12Y_0^4\Sigma Y_1^7Y_2^3Y_3^2Y_4 + 315Y_0^4Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4^4 \\ & + 12Y_0\Sigma Y_1^{11}Y_2^2Y_3^2Y_4 + 18Y_0\Sigma Y_1^8Y_2^3Y_3^3Y_4^2 \\ & - 27Y_0\Sigma Y_1^6Y_2^4Y_3^3Y_4^3 - \Sigma Y_1^{12}Y_2^3 + 2\Sigma Y_1^{12}Y_2^2Y_3^2 \\ & + 2\Sigma Y_1^9Y_2^3 - 2\Sigma Y_1^9Y_2^2Y_3^2 - 8\Sigma Y_1^9Y_2^2Y_3^2Y_4^2 \\ & + 6\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3 + 8\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3Y_4^3. \end{aligned} \qquad 7)$$

Außerdem existirt eine Invariante 45. Grades J_{45}, nämlich die Functionaldeterminante der fünf ebengenannten Formen, zu-

1) Die Summen sind jedesmal zu erstrecken über alle diejenigen verschiedenen Ausdrücke, welche aus den angegebenen durch Permutation von Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 entstehen.

gleich bis auf einen Zahlenfactor das Produkt der linken Seiten der Gleichungen der 45 Haupträume II. Art (s. o. unter II, 3).

Mit diesen sechs Invarianten ist das Formensystem unserer Gruppe vollständig. Insbesondere läßt sich das Produkt J_{40} der linken Seiten der Gleichungen der 40 Haupträume I. Art (s. o. unter II, 1) durch diese Invarianten rational und ganz ausdrücken, und zwar wie folgt:

$$8)\quad 3^{38} J_{40} = [J_4^2(J_4^3 - 2^9 J_{12}) + 2^{18} J_{10}^2]^2 - 2^{19}[J_4 J_6 - 2^8 3 J_{10}][J_4^3 J_{18} - 2^{11} 3 J_{10}^3] + 2^{37} J_{10}^4.$$

IV. Sind die Werte der Invarianten J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}, J_{45} gegeben, so stellt die Aufgabe, aus ihnen die Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 zu berechnen, ein „Formenproblem“ im Sinne der von Herrn Klein in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ [1]) eingeführten Terminologie dar. Die Lösungen dieses Formenproblems lassen sich rational aus den Lösungen des zugehörigen „Gleichungssystems“ berechnen.

Will man Resolventen dieses Problems aufstellen, so wird man sein Augenmerk zunächst auf solche resolvirenden Functionen richten, für welche das Produkt aus ihrem Grade in den Y in die Anzahl ihrer conjugirten Werte möglichst klein ist. Mit Rücksicht hierauf würde in erster Linie die Resolvente der unter II, 5 erwähnten quadratischen Formen u in Betracht kommen, deren Anfangsglieder sind:

$$9)\quad u^{36} - 6J_4 u^{34} - \frac{8}{3} J_6 u^{33} + \frac{47}{3} J_4^2 u^{32} + \left(\frac{128}{9} J_4 J_6 + \frac{320}{3} J_{10}\right) u^{31} + \cdots = 0;$$

dann aber diejenige, welcher Y_0^2 genügt. Die Anfangsglieder der letzteren sind:

$$10)\quad Y_0^{80} - \frac{4}{3} J_4 Y_0^{76} - \frac{16}{3^4} J_6 Y_0^{74} + \frac{146}{3^5} J_4^2 Y_0^{72} + \frac{1}{3^7}(160 J_4 J_6 - 153600 J_{10}) Y_0^{70} + \frac{1}{3^{10}}(-8028 J_4^3 - 1472 J_6^2 + 952320 J_{12}) Y_0^{68} + \cdots;$$

ihr letztes Glied ist das Quadrat der unter III, Gleichung 8 angegebenen Form J_{40}.

V. Von der letzten Gleichung repraesentirt nun die früher

1) Leipzig, Teubner, 1884.

(s. o.) von mir untersuchte Multiplicatorgleichung einen Specialfall. Setzt man nämlich die Argumente $v_1 = v_2 = 0$, so reduciren sich die Y auf Modulformen, die mit y und nach Weglassung ihres gemeinsamen Nenners $\sqrt[8]{D^n}$ mit (y) bezeichnet werden sollen. Die aus diesen (y) gebildeten Invarianten (i) sind dann rationale und wie sich zeigt ganze Functionen der a. a. O. benutzten Simultaninvarianten von zwei cubischen Binärformen, $\sqrt[4]{D}$ eingerechnet; durch Vergleich der Reihenentwicklungen findet man:

$$(i_4) = 27 D^{\frac{1}{4}}; \quad (i_6) = 9\sqrt{3}\, B D^{\frac{1}{4}}; \quad (i_{12}) = \frac{81}{32} E D^{\frac{1}{4}}; \qquad 11)$$

$$(i_{18}) = \frac{3^5\sqrt{3}}{2^{10}} Z D^{\frac{3}{4}}.$$

Zwischen den 5 von nur 4 unabhängigen Veränderlichen abhängigen Größen (y) muß dabei eine Relation bestehen; es stellt sich heraus, daß dieselbe

$$(i_{10}) = 0 \qquad 12)$$

ist. Durch Einführung dieser Werthe reducirt sich Gleichung (10) in der That auf die damals mitgetheilte Multiplicatorgleichung; man hat nur zu beachten, daß das dort benutzte $\varkappa = 3(y_0)^2$ war.

Bei Gelegenheit dieser Untersuchungen ergab sich mir noch ein in anderer Richtung liegendes Resultat, dessen Mittheilung ich vielleicht anschließen darf. Eine Reduction der pag. 376 f. angegebenen erzeugenden Operationen der Gruppe auf eine geringere Anzahl erwies sich als zwar ausführbar, aber für die vorliegende Untersuchung nicht zweckmäßig. Darüber hinaus aber führten die hiebei sich ergebenden Resultate zu der Vermuthung, daß solche Reduction für die allgemeine Gruppe der linearen Periodentransformationen ($p = 2$) möglich sein müsse. In der That lassen sich die bisher benutzten 4 Erzeugenden dieser Gruppe, A, B, C, D[1]) aus nur zwei Operationen zusammensetzen, z. B. aus den beiden folgenden:

A (von der Periode 6):

$$\begin{aligned} \omega_1' &= & -\omega_3 & & , \\ \omega_2' &= & & -\omega_4 & , \\ \omega_3' &= \omega_1 & & -\omega_4 & , \\ \omega_4' &= & \omega_2 - \omega_3 & & ; \end{aligned} \qquad 13)$$

1) Vgl. Mathem. Annalen, Bd. 35, p. 209, wo auch die Literatur angegeben ist. — Die A, B des Textes sind übrigens nur ein Beispiel (vielleicht nicht einmal das einfachste) eines Paares von Erzeugenden.

und:

B (von der Periode 10):

$$\begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_2 + \omega_3 , \\ \omega_2' &= -\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 , \\ \omega_3' &= -\omega_1 + \omega_3 , \\ \omega_4' &= -\omega_2 ; \end{aligned} \qquad 14)$$

man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} A &= B^3 A^5, \\ B &= AB A^2 B^2, \\ C &= (A^4 B^4 A)^3 (B^4 A^3)^2 (A^2 B)^3, \\ D &= A^2. \end{aligned}$$

Als Corollar ergibt sich hieraus, daß für $p > 2$ alle linearen Periodentransformationen aus drei Erzeugenden sich zusammensetzen lassen; ob auch schon aus zweien, habe ich nicht untersucht.

Göttingen, August 1890.

Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Von

Felix Klein.

Eine Frage, die sich bei den Anwendungen sozusagen von selbst aufdrängt, die aber bislang, so viel ich weiß, von speciellen Fällen abgesehen noch nicht beantwortet wurde, ist folgende: Wie oft verschwindet die hypergeometrische Reihe

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a.a+1.b.b+1}{1.2.c.c+1}x^2 + \cdots$$

zwischen $x = 0$ und $x = 1$? Durch geometrische Betrachtungen über conforme Abbildung, welche sich an die Untersuchungen von Herrn Schwarz in Bd. 75 des Journals für Mathematik anschließen (1872), bin ich zu folgendem Resultat gelangt:

Es seien $[a-b]$ etc. die absoluten Beträge der jeweils eingeklammerten Größen, E aber bezeichne die größte ganze positive Zahl, welche von dem Ausdrucke

$$\frac{[a-b]-[1-c]-[c-a-b]+1}{2}$$

überschritten wird.

Ist nun $(1-c)$ negativ oder Null, so ist die gesuchte Zahl der Nullstellen von F gleich E.

Ist aber $(1-c)$ positiv, so ist dieselbe ebenfalls $= E$, falls F für $x = 1$ verschwinden sollte, anderenfalls aber wird man zwischen E und $E+1$ nach dem Grundsatze wählen, daß F zwischen 0 und 1 selbstverständlich eine gerade Anzahl von Nullstellen hat, wenn F für $x = 1$ positiv (endlich oder unendlich) ausfällt, dagegen eine ungerade Anzahl, wenn es für $x = 1$ negativ ist.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1890.

(Fortsetzung.)

Kön. S. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig:
a. Berichte über die Verhandlungen d. Mathem.-physikalische Classe. II. III. IV.
b. Abhandlungen d. mathem.-physik. Classe: d. XV. Bandes N. VII, VIII, IX. 1890.
Register zu d. Jahrg. 1846—1885 der Berichte über die Verhandlungen u. zu den Bänden I—XII der Abhandlungen der math.-phys. Classe. Leipzig 1889.
Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band 44. Heft 1. Leipzig 1890.
Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 21. 1889. München 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. N. 7. 8. Halle a. S.
74. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden pro 1888/89 nebst Festschrift des 75jährigen Bestehens. Emden 1890.
Mittheilungen der Geschichts- und Alterthumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. Band X. Heft 2. Altenburg 1890.
Jahrbücher der K. Akademie gemeinnütziger Wissensch. zu Erfurt. Neue Folge. Heft XVI. 1890.
Abhandlungen d. K. K. geologischen Reichsanstalt. Band XV. Heft 2. Zur Kenntniss der Fauna der »Grauen Kalke der Süd-Alpen«. Wien 1890.
VII. Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereins in Brünn. Brünn 1889.
Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Band XXVII. 1888. Brünn 1889.
Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag für 1889. Prag 1890.
Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. 1890. April. Krakau 1890.
Royal Irish Academy »Cunningham memoirs«. N. 5. The red stars: Observations and catalogue. New edition. Dublin 1890.
Zoological Society of London:
a. Proceedings of the scientific meetings. 1889. Part IV.
b. Transactions. Vol. XII. Part 10. London 1890.
Nature. Vol. 42. N. 1070—1074.
Proceedings of the London mathematical Society. N. 372—376.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLVII. N. 288. London 1890.
Monthly notices of the R. astronomical Society. Vol. L. N. 6. 1890.

Bibliotheca Indica a collection of oriental works published by the Asiatic Society of Bengal. New series. N. 711, 715—727, 729—746, 748. Calcutta 1889—90.

Oeuvres de Fourier publiés par Gaston Darboux. Tome II. Paris 1890.

Bulletin de la Société mathematique de France. Tome XVIII. N. 1. Paris 1890.

Mémoires de la Société R. des Sciences de Liège. Deuxième série. Tome XVI. Bruxelles 1890.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences des lettres et des beaux arts de Belgique. 60e année, 3e série, tome 19. No. 4. Bruxelles 1890.

Observations de Poulkova. Vol. VIII. St. Petersbourg 1889.

Photometrische Bestimmung der Grössenclassen der Bonna-Durchmusterung von Ed. Lindemann. Supplément II aux observations de Poulkova. St. Petersbourg 1889.

Memoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Petersbourg. VII. série. Tome XXXVII. N. 6, 7. St. Petersbourg 1890.

Tabulae quantitatium Besselianarum pro annis 1890—1894 computatae, ed. O. Struve. Petropoli 1889.

Dorpater meteorologische Beobachtungen. Juni—Dezember 1889.

Fondation Teyler:

a. Archives du Musée Teyler. Série II, vol. 3. 4ime Partie.

b. Catalogue de la bibliothèque dressé par C. Ekama. Deuxieme volume. Auteurs Grecs et Latins. Livr. 1. 2. 3. Harlem 1889.

Dagh-Register gehonden int Casteel Batavia. Anno 1661. Batavia 1889.

Sur la température nocturne de l'air à différentes hauteurs par Julius Juhlin. Présenté à la Société R. des Sciences d'Upsal. Upsal 1890.

Om Caryophyllaceernes Blomster af C. Warming. Kjobenhavn 1890.

l'Académie R. de Copenhague:

a. Memoires. Classe des Sciences. Vol. VI. N. 1.

b. Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. 1889, N 3. 1890, N. 1.

Lunde Domkapitels Gaveboger og Nekrologum II. Kjobenhavn 1889.

Atti della Reale Accademia dei Lincei 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. fasc. 5. 6. Roma 1890.

Atti della R. Accademia delle Science di Torino. Vol. XXV. Disp. 8. 9. 10a. 1889—90. Torino.

Osservationi meteorologiche fatte nell'anno 1888 all'osservatorio della università di Torino. Torino 1890.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tomo IV, fasc. III. IV.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze:

a. Sezione di medicina e chirurgia. Archivio della scuola d'anatomia patologica. Vol. III. IV. Firenze 1885—1886.

b. Sezione di filosofia e filologia. Maestri e scolari nell'India brahmanica, Saggio di Girolamo Donati. Firenze 1888.

c. Sezione di Scienze fisiche e naturali. 1. Osservazioni continue delln elettricità atmosferica fatte a Firenze nel 1884. Seconda memoria di L. Pasqualini e A. Róiti. ... fatte a Firenze negli anni 1883—86. Memoria del Dott. Franco Magrini. Firenze 1885/88. 2. Saggio sperimentale sul meccanismo dei movimenti volontari nella testuggine palustre del Dott. Giulio Fano. Firenze 1884.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 10.

Eduard Riecke, specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes. — *Derselbe*, über stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels. — *Franz Meyer*, über Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. — *Heinrich Burkhardt*, zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades, welche bei der Transformation 3. Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten. — *Felix Klein*, über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

8. October. **№ 11.** 1890.

LIBRARY

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. Juli.

Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer.

Von

Friedrich Wieseler.

Die bildlichen Darstellungen weiblicher Satyrn und Pane sind keineswegs so sehr selten, wie noch in neuerer Zeit manche sonst sehr kundige Archäologen gemeint haben. Es dürfte deshalb zweckmäßig sein, die uns bekannt gewordenen Beispiele übersichtlich zusammenzustellen.

Man wird sehen, daß eine nicht unbeträchtliche Anzahl einschlägiger Darstellungen bis in das achtzehnte Jahrhundert und in die jetzige Zeit sich erhalten hat, von denen einige freilich unsicher sind, eine offenbar gefälscht ist.

Die ältesten der betreffenden Darstellungen reichen bis in die Hellenistische Zeit hinein, die meisten gehören erst der Römischen an.

I.

Satyrae.

Weibliche Satyrn finden sich in Bildwerken verschiedener Gattungen der Kunstübung. Am Meisten sind sie uns in Marmorwer-

ken erhalten. Ja nach Em. Galichon Gaz. des Beaux-Arts, Bd. II, 1861, p. 232, soll eine ausgezeichnete fast lebensgrosse Gruppe eines Faune avec une Faunisque sich im Louvre befinden. Aber hier liegt ohne Zweifel ein Irrthum zu Grunde. Gemeint ist gewiß die von W. Fröhner Notice de la sculpt. ant. n. 260 verzeichnete Gruppe, die von mir im J. 1859 bei Louis Fould gesehen wurde und 1860 in den Louvre überging. Hier handelt es sich nicht um une Faunisque, sondern um ein Satyrknäbchen.

Ob eine Einzelstatue einer Satyra sicher steht, ist die Frage.

J. Burckhardt schrieb im Cicerone II, 1860, S. 482 „Eine junge Satyrin in der Villa Albani (Nebengalerie rechts) zeigt in ihrem zwar aufgesetzten aber doch wohl echten Köpfchen die Merkmale ihrer Gattung, auch das Stumpfnäschen, in das Mädchenhafte übersetzt; ihr schwebender Tanzschritt veranlaßte, vielleicht mit Recht, eine Restauration der Hände mit Klingplatten". Ich muß diese Annahme ganz auf sich beruhen lassen, bezweifle aber die „Satyrin", da die charakteristischen Ohren fehlen[1]).

Noch mehr gilt das in Betreff der von demselben Gelehrten a. a. O. als Satyrin betrachteten Statue im Conservatorenpalaste auf dem Capitol, deren Kopf er selbst für zweifelhaft hält.

In der Sammlung zu Broadlands befindet sich eine Herme (Terminal bust.) nach A. Michaelis Anc. marbles. in Great Britain p. 224, n. 26.

Bedeutender ist die Anzahl von Köpfen.

Schon vor längerer Zeit ist das zu einer Büste ergänzte Köpfchen zu Venedig abgebildet in Statue di S. Marco und danach in meinen Denkm. der a. Kst. II, 45, 562. Zuletzt besprochen von Dütschke Ant. Bildw. in Oberital. V, n. 68.

In derselben Sammlung, dem Mus. archeologico, befindet sich ein vortrefflicher Colossalkopf, Pendant zu einem Colossalkopf eines männlichen Satyrs. Jener besprochen von Valentinelli Marmi scolpiti del mus. arch. della Marciana, Prato 1866, p. 249 fg. zu n. 299, Wieseler Nachr. d. K. G. d. Wiss. zu Göttingen, 1874, S. 587, und zuletzt von Dütschke a. a. O. n. 363, beide abgebildet bei Valentinelli a. a. O. t. XLIV.

W. Fröhner verzeichnet in der Not. de la sculpt. ant. du Louvre, n. 286 als aus der Sammlung Campana stammend den Kopf mit orcilles de chèvre et deux touffes de poil (φήρεα) als den einen Satyra.

1) Allem Anscheine nach ist das von Platner in der Beschr. d. Stadt Rom III, 2, S. 498, n. 2 als „Statue einer Bakchantin" aufgeführte Werk gemeint.

Mehr Beispiele lernen wir durch Benndorf's und Schöne's ausgezeichnetes Werk „Die ant. Bilder des Lateranens. Mus." kennen. Unter n. 140 geben dieselben eine Beschreibung und auf Taf. III, Fig. 2 eine Abbildung eines jugendlichen Satyrnköpfchens; unter n. 174 verzeichnen sie einen weiblichen Satyrkopf mit kleinen Ansätzen von Hörnern, unter n. 273 den Kopf einer Satyra mit zwei kleinen Hörnern und gespitzten Ohren; außerdem führen sie als aus Marmor bestehend S. 402, n. 594 an „Satyra (?) weibliches Kinderköpfchen mit satyreskem Ausdruck".

Kekulé führt „Das akad. Kunstmus. zu Bonn", 1872, n. 361 auch den von Benndorf und Schöne Taf. III, Fig. 1 abbildlich mitgetheilten und n. 96 als den einer jugendlichen Bakchantin bezeichneten Kopf wenigstens frageweise als „Kopf eines Satyrmädchens" auf, was uns schon wegen der Stirnbinde bedenklich erscheint.

Die beiden genannten Beschreiber des Lateranens. Mus. bemerken S. 86 zu n. 140: „Unter den kleinen Marmorn im Museo nazionale eine Doppelherme eines Silen mit einer jugendlichen Satyra. — Weiblich scheint auch der Kopf zu sein, den L. Gerlach Wörlitzer Antiken Heft I Titelblatt als Satyr publicirt hat[1]). Ein schöner weiblicher Satyrkopf im Museum Kircherianum."

Von Matz-Duhn Ant. Bildw. in Rom Bd. I, n. 470 wird als in Palazzo Corsini befindlich aufgeführt der Kopf eines lachenden Satyrmädchens", aber mit dem Zusatz: „vielleicht modern".

Ebenda erfahren wir unter n. 469, daß im Besitz des Stud. Jerichau sich befinde „ein ganz satyrhaft gebildeter weiblicher Kopf — der Mund geöffnet und augenscheinlich als Wasserspeier benutzt, wozu wohl paßt, daß der Kopf hinten maskenartig hohl ausgearbeitet ist. Die Ohren sind nicht sichtbar."

Keller und Bursian haben in dem Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde III, 1870, S. 198 fg. einen bei Lausanne gefundenen, auf Taf. XXVII, Fig. 1 abgebildeten „Statuenkopf" aus Pentelischem Marmor besprochen, indem sie äußern, man könne schwanken, ob er männlich oder weiblich sei."

Auch an Darstellungen in Marmorreliefs fehlt es nicht. Zwei derselben kennen wir durch Besprechung und Abbildungen von Benndorf und Schöne a. a. O. n. 373, S. 252 und n. 408, S. 287, von denen auch die frühere Literatur angegeben ist. Beide Male handelt es sich um Bakchische Sarkophage. Auf dem unter n. 373 wird an der rechten Nebenseite „das Obertheil einer mit einem

1) Auch W. Hosaeus Wörlitzer Antiken, S. 18 fg., n. 6 spricht von „Kopf und Rumpf eines Faunen", indem er bemerkt, die Bildung habe etwas Weichliches.

gegürteten ärmellosen Chiton bekleideten Satyra sichtbar", welche ihre Rechte auf die r. Schulter eines Satyrs legt und über seine Achsel dem Tränken eines Panthers von Seiten dieses zuschaut. Auf dem Sarkophag unter n. 408 ist an der rechten Nebenseite in der Mitte ein Baum dargestellt. Links von ihm tanzt ein Satyr lebhaft nach rechts. Rechts von ihm tanzt eine Satyra gleichfalls nach r., den Kopf dem Satyr zugewendet; sie trägt das Haar am Hinterkopf zusammengebunden und ist mit einem ärmellosen gegürteten Chiton und einem Obergewand bekleidet, das sie zierlich in der Rechten erhebt".

Auch auf dem Relieffragment eines Bakchischen Sarkophags im Cortile des Palazzo Riccardi zu Florenz hat sich nach Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien II, n. 153 erhalten „der Oberkörper einer vermuthlich sitzenden Satyressa, an ihren spitzen Ohren kenntlich; das lockige Haar ist zurückgestrichen und hinten in einen Knoten zusammengebunden. Sie trägt einen Chiton und ein Obergewand, das hinter ihr im Bogen flattert."

Wenn von Stephani in den Parerga arch. XXVI auf dem von ihm abbildlich mitgetheilten Bakchischen Sarkophag in der Ermitage zu St. Petersburg zwei musicirende Weiber im langen Chiton und mit bogenförmig flatterndem Obergewand, „denen, wie den Satyren, spitze Ohren verliehen sind", trotzdem als „Maenaden" bezeichnet werden, so sind dieselben vielmehr als Satyrae zu betrachten.

Auch auf anderen Reliefs als an solchen auf Römischen Sarkophagen kommen Satyrae vor.

Hieher gehört das Relief im Mus. Capitolinum IX, 36. Dann nach Dütschke a. a. O. IV, n. 860, S. 374 das bei Labus Museo della Reale accademia di Mantova II, t. XXIX abgebildete Relief zu Mantua, welches auch deshalb von Belang ist, wenn es, wie Dütschke annimmt, auf die Hellenistische Zeit zurückgeht. Auf ihm steht nach dieses Gelehrten Angaben hinter einem jungen Satyr „eine Satyra mit angesetztem aber wohl antikem und zugehörigem Kopfe (erg. Nase von Gips), welcher mit Weinlaub bekränzt ist. Auf dem Kranze, von welchem Bänder auf die Brust flattern, scheint ein Tuch zu liegen, wenn dies nicht erg. ist. Ihr Chiton ist etwas von der l. Schulter herabgesunken."

L. von Sybel erwähnt im Katalog der Skulpturen zu Athen n. 995 eine Satyressa als „Pfeilerfigur", doch ist im Index S. XIV die Angabe mit einem Fragezeichen versehen.

Daß die Darstellung einer ihr Kind auf ihrem Fuße tanzen lassenden Satyra in einem Relief aus rosso antico zu Wilton House

moderne Copie einer Florentinischen Gemme (s. unten S. 389) sei, hat schon Michaelis Anc. marbles. in Great Britain p. 691, zu n. 101 bemerkt.

Ein fragmentirtes Marmorrelief zu Göttingen zeigt eine von G. Hubo „Originalwerke in der archäol. Abt. des arch.-numism. Instituts der Georg-Augusts-Univ. S. 127 fg. n. 760, erkannte „kauernde nackte Satyra."

An einem großen Candelaber im Louvre, gewahrt man nach Fröhner Not. de la sculpt. ant. n. 312, S. 304 (der auch die Abbildungen angiebt), unter quatre masques colossaux d'une beauté achevée, posés sur des bases carrées celui d'une jeune Satyra, couronnée de lierre en fleur, reuni à un masque semblable.

Unter den Bronzewerken ist namentlich durch die Abbildung im Mus. Borb. X, 13 = Denkm. d. a. K. II, 561 bekannt die Doppelbüste eines pinienbekränzten gehörnten Satyrs mit aufgesträubtem Haare und einer epheubekränzten langlockigen Satyra.

Im Berliner Antiquarium befindet sich die Doppelherme eines Satyrs und Satyrmädchens mit Schaft unten am Ende, wahrscheinlich aus einem Gitter stammend.

Hoffmann erwähnt in den Antiquités, Sec. Partie, Paris 1888, p. 23 n. 480 eine zu Torre del Greco gefundene Panisca und Satyra, die als couronnement de terme gedient haben.

Eine im Brit. Mus. befindliche bekleidete Bronzebüste einer Satyra (female Faua) von guter römischer Arbeit mit Augen, Zähnen und φήρεα aus Silber ist in den Specim. of ant. sculpt. Vol. II, pl. LVII abbildlich mitgetheilt.

Auch zwei Terracottaköpfe sind uns bekannt, vgl. F. Dümmler De figuris plasticis quibusdam Tarenti repertis in den Ann. d. inst. T. LV, 1883, p. 203, n. 6.

Anscheinend giebt es auch eine hieher gehörende Goldmünze. Barclay Head führt in der Hist. numorum p. 456, n. 282 eine solche von Lampsakos an, die einen weiblichen Profilkopf mit einem Geißohr zeige. Er hält denselben für den einer Bakchantin oder des Dionysos, welche beiden Deutungen unzulässig sind. Ist ein wirklich weibliches Wesen gemeint, so kann nur eine Satyra gemeint sein.

Einige Beispiele finden sich auf geschnittenen Steinen. Am Meisten bekannt ist der Florentinische in den Denkm. d. a. K. II, 45, 563 abbildlich mitgetheilte, welcher die vollständige Figur in einer Handlung zeigt. Damit ist zusammenzustellen der bei de la Chausse Gemme ant. fig. t. 114, auf welchem die Satyra das in der Vorderansicht dargestellte Kind auf ihrem Fuße tanzen läßt,

während sie ihm eine Traube hinhält. Beide Satyrae sind vollständig nackt und nur durch das Schwänzchen hinten zu erkennen.

Das dritte Beispiel bietet ein aus der Sammlung Blacas stammender Stein im Brit. Mus., welchen Murray A catal. of engrav. gems, London 1888, unter n. † 1061 so aufführt: Maenad (?) bust of, to front, with ears and face of satyr, but with female breasts; soy wreath on head, this drapery fastened on r. shoulder, Sard. Das Kreuzzeichen vor der Nummer bezieht sich auf zweifelhafte Echtheit der Gemme. Doch ist an jene in dem vorliegenden Falle wohl nicht zu denken, da Murray's Bezweifelung der Echtheit vermuthlich nur auf der ihn befremdenden Darstellung beruhte, welche wir schon oben als die einer Satyra nachgewiesen haben.

Selbst in einem Vasengemälde dürfen wir wohl die Darstellung einer Satyra annehmen. Wir meinen das mit gelblichen Figuren, welches die Rückführung des Hephästos durch Dionysos und seinen Thiasos darstellt und zuletzt in Ch. Lenormant's u. J. de Witte's Élite d. mon. céramogr. Vol. I pl. XLVII abbildlich mitgetheilt ist. Hier erblickt man ein epheubekränztes Weib in langem Gewande mit Oenochoë und brennender Fackel in den Händen, welches ganz deutlich Satyrohren hat. Die Vergleichung namentlich des oben S. 388 erwähnten Petersburger Sarkophagreliefs weist auf eine Satyra hin, wogegen nicht spricht, daß in der entsprechenden Darstellung in der Él. céramogr. Vol. I, pl. XLV A eine fackeltragende Maenade erscheint.

Auch auf Wandgemälden aus den verschütteten Städten am Vesuv finden sich Satyrae.

Helbig verzeichnet unter n. 442, b die „Herme einer zarten Satyriskin."

Auf dem mehrfach abgebildeten Wandgemälde (Mus. Borbon. III, 4, Ternite's Wandgem. erkl. von Welcker III, Taf. 2, Wieseler Theatergeb. u. Denkm. d. Bühnenwes. Taf. X, n. 1, Arch. Ztg. XIII, 1855, Taf. LXXXII, n. 1 ist unter den Genossen des Dionysos, welcher die Komödie einsetzt, ein mit Satyrohren versehenes, mit einem Chiton bekleidetes Mädchen zu sehen, welches man mit Recht als Satyra faßt. So auch Welcker noch in den A. Denkmälern, Th. IV, S. 7 und Otto Jahn in der Arch. Ztg. a. a. O. S. 146[1]).

A. Mau beschreibt eine Satiressa in Verbindung mit einer an-

1) Helbig erwähnt a. a. O. n. 408 die betreffende Figur wohl als Mädchen, nicht aber als Satyra, indem er die kennzeichnenden Ohren irrthümlich bei einer anderen, männlichen Figur voraussetzt.

dern weiblichen Figur Bullett. d. Inst. 1876 p. 241 fg., vgl. auch Fiorelli Giorn. d. Scavi Pomp. N. S. III, p. 152, A. Sogliano Le pitture murali Campane in Pompei e la regione sotterrata dal Vesuvio, Napoli MDCCCLXXIX, P. II, n. 236, p. 129 fg.

II.

Paniscae.

Auch weibliche Pane finden sich in erhaltenen Bildwerken und zwar wiederum auf denen verschiedener Gattungen der Kunstübung und häufiger als bisher allgemein bekannt ist.

Gehen wir zunächst von den Marmorwerken über, so haben wir auch hier eine zuvörderst statuarische Gruppe eine Panin mit Pankindern darstellend zu berühren.

Wir lernen dieselbe besonders kennen durch E. Braun's Besprechung in den Annali d. inst. arch. XVIII, 1846, p. 240 fg. und die dazu gehörende Abbildung auf tav. d'agg. N. I u. II, die nach einer Zeichnung gemacht ist, welche Conte Orti di Manara an Braun übersandte. Später ist das Monument spurlos verschwunden. Es unterliegt aber wohl keinem Zweifel, daß es modern war, wie auch Brunn Ann. d. inst. arch. XXXVI, 1864, p. 385 urtheilt, während Welcker zu Müllers Hdb. d. Arch. § 388 A. 2 an der Echtheit nicht zweifelt.

Als Einzelstatue ist an erster Stelle zu nennen die bekannte hübsche Statuette in Villa Albani-Torlonia zu Rom, von welcher Clarac Mus. de sculpt. T. IV, pl. 727, n. 1732 eine Abbildung giebt. Die behörnte ziegenbeinige jugendliche Figur, deren Tracht in einer um den Hals geknüpften Wolfshaut besteht, erscheint als Flötenspielerin dargestellt. Wenn auch dieser Umstand nur auf moderner Ergänzung beruht, so ist doch an der wesentlichen Richtigkeit dieser nicht zu zweifeln wegen der espressione della fisonomia (E. Braun Ann. a. a. O.).

„In der Gallerie zu Florenz ist die Marmorstatue einer Panin, die in dem ledernen Gewande, das um ihre Schultern befestigt ist, einen Paniscus trägt“: A. Hirt im Bilderbuch für Mythol. Archäol. und Kunst H. II, S. 163. Ueber dieses Werk hören wir sonst kein Wort und doch ist an dessen Vorhandensein in der Gal. d. Uffizj vor dem J. 1816 gewiß nicht zu zweifeln.

Dann erwähnen wir den „Kopf einer Paniska“ im Lateranisischen Museum zu Rom, nach Benndorf und Schöne Ant. Bildw. d. Lateran. Mus. n. 101: „Die Ohren sind spitz; oberhalb der Stirn ziehen sich r. und l. von dem nur angedeuteten Scheitel zwei am

Kopf aufliegende, nicht von ihm abstehende Hörner in die Höhe. Das Gesicht mit mürrisch vorgeschobenem Munde ist von feinem liebenswürdigen Ausdruck."

Für den Kopf einer Panisca hält Bernoulli den in Wilton House bei Michaelis Anc. marbles in Great Britain p. 710, n. 180, während Michaelis denselben als Head of a young Pan or a Satyr bezeichnet.

Ob die Ansicht Benndorf's und Schöne's a. a. O. S. 106, n. 188 richtig sei, nach welcher die in Garrucci's Mus. Lateranense t. XXVI, n. 2 abbildlich mitgetheilte Herme für die einer Panin zu halten sein soll, müssen wir sehr bezweifeln. Nach der Abbildung sieht es ganz so aus, als ob die betreffende Figur bärtig sei.

Auch an Reliefdarstellungen von Paninnen fehlt es nicht.

In dem Museo archeologico zu Venedig befindet sich das Fragment eines Hochreliefs mit zwei Centauren und einer schlafenden weiblichen Figur, welche letztere man in neuerer Zeit als Centaurin gefaßt hat, vgl. Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien S. 108 fg., n. 286, während schon Zanetti zu der ersten Abbildung in den Statue di S. Marco II, 32 im J. 1743 dieselbe als Satirina faßte. Es handelt sich auf allen Abbildungen ganz deutlich um eine Panin [1]).

Außerdem kennen wir noch zwei Reliefdarstellungen, die auf der aus Tusculum stammenden runden Scheibe in den Denkm. d. a. Kst. II, 43, 536 und die auf dem berüchtigten Sarkophag im Mus. naz. zu Neapel, ebenda II, 44, 548.

Dort ist ein naschhaftes Panweibchen in Verbindung mit ihrem Manne dargestellt; hier die Unzucht einer Panin.

Endlich sind noch zwei nicht durch Abbildung, wohl aber durch Beschreibung bekannte Paninnen in Reliefdarstellungen zu erwähnen, vgl. Gerhard in der Beschr. der Stadt Rom von Platner, Bunsen, Gerhard u. s. w. Bd. II, Abth. 2, S. 251 und Bd. II, Abth. 2, S. 182, n. 59 (wo aber Kopf und Füße fehlen).

Wir wenden uns jetzt zu den einschlägigen Werken aus Bronze.

Wir erwähnen zunächst die isolirten Rundwerke.

---

1) Vermuthlich meint auch Hirt Bilderbuch S. 163 dieses Werk, wenn er nach den oben S. 391 ausgeschriebenen Worten fortfährt: „andere sind in der Villa Albani und in der Sammlung der Marcusbibliothek zu Venedig". Er hat sich nur nicht genau genug ausgedrückt, indem er nicht angab, daß es sich um eine Reliefdarstellung handele. Von dem Vorhandensein einer statuarischen Darstellung einer Panin in der Marciana zu irgendwelcher Zeit findet sich sonst keine Spur.

Ein Kopf, damals in der Sammlung Fejervari, ist bekannt gemacht und erklärt von E. Braun in den Monum. ined. Ann. d. Inst. arch. 1854, p. 89. Das nächst erscheinende Heft der Denkm. d. a. Kst. wird Taf. XLV, n. 561, a die Abbildung wiederholt bringen. Er zeigt nach Braun corna ed orecchie vaccine und wird von ihm als einer der Panische della specie vaccina zugehörig betrachtet. Von diesen findet sich aber unseres Wissens sonst keine Spur. Wohl aber werden die Satyrn von Nonnes als *βουκέραοι, βούκραιροι, ταυροφυεῖς* bezeichnet und ihnen eine *ταυρῶπις μορφή* zugeschrieben (Dionys. X, 209—247, 559). Sollte es also nicht gerathener sein, den Kopf für den einer Satyra zu halten? An den der Io, welchen man vor Braun annahm, ist gewiß nicht zu denken.

Die Darstellung einer Panisca aus Bronze, vermuthlich einer Herme, ist schon oben S. 389 nach Hoffmann angeführt.

Die vollständige Statuette einer begehrlichen Panin mit einem Apfel in der Hand gab schon Gori Mus. Etrusc. T. I, t. 64, n. 2 u. 3 heraus.

Eine andere hörnerlose ist von Bursian Aventicum Helv. in den Mitth. der antiquar. Gesellsch. zu Zürich Bd. XVI, Abth. 1, 1869, S. 43 fg. besprochen und Taf. XIV abbildlich mitgetheilt. Die mit Epheu bekränzte sitzende Figur von guter Römischer Arbeit bläst ebenso wie die Marmorstatuette der Villa Albani die Doppelflöte.

Welcker erwähnt zu Müller Handb. der Arch. § 388 Anm. 2 eine Panin in Bronze als in Florenz im Cab. der Münzen befindlich. Andererseits hören wir durch E. Braun in den Annali a. a. O. von einer im Mus. Florentino im Saale der geschnittenen Steine aufbewahrten Panin mit der Angabe, daß sie porta un secchio o paniera, aber ohne daß das Material angegeben wird. Weder jene noch diese Figur ist uns anderweitig bekannt. Es hat aber mehr als Wahrscheinlichkeit, daß eine und dieselbe Statuette gemeint und diese von Bronze ist.

Zu den nicht isolirten, sondern ursprünglich an einem Geräthe zur Decoration angebrachten Rundwerken gehört meines Erachtens ein von Montfaucon Ant. expl. T. I, P. 2, t. CLXVIII, n. 6 aus der Sammlung C. Fontaine herausgegebenes Werk, obgleich nicht gesagt wird, daß es von Bronze sei. Es stellt eine wohlgearbeitete Panin mit großen Hörnern und den bei den Panen mehrfach vorkommenden langen herabhängenden Ohren dar, mit welchen beiden Attributen auch der unter n. 5 abgebildete männliche Pan aus derselben Sammlung versehen ist.

Dann erwähnen wir ein ebenfalls schon vorlängst heraus-

gegebenes, aber vergessenes Werk: die bis unterhalb der Brüste wohl erhaltene kleine Büste aus Bronze bei Caylus Recueil d'antiquité T. I, pl. LXXII n. II, von deren Aufenthaltsort nichts verlautet. Der Herausgeber bezeichnet dieses als von guter Römischer Arbeit, fin et delicat, gracieux. Er nennt es: femme d'un Faune. Es handelt sich um ein jugendliches Mädchen mit kleinen Hörnchen über der Stirn und wohlgeordnetem Haare, dessen Nase nicht die gewöhnliche Stumpfnase der Satyrae ist, sondern eine etwas längere, etwas gebogene, so daß die Panin wohl sicher steht.

Ein Rundwerk zum Theil, aber kein isolirtes, sondern ein zu einem Geräthe gehörendes ist die jetzt zu Brüssel im Musée Royal d'antiquités et d'armure befindliche Werk, welches herausgegeben ist von Brunn in den Monum. d. Inst. Vol. VIII, t. XII, n. 8 und besprochen von demselben in den Annali XXXVI, 1864, p. 385 fg.; außerdem ist das Werk beschrieben von dem früheren Besitzer sowohl in dem von ihm selbst verlegten Catalog unter dem Titel Musée de Ravestein, Bruxelles 1870, T. I p. 368, n. 883, als auch in dem von dem Mus. Roy. herausgegebenen Catalog. Mus. de Ravestein, notice par E. Meester de Ravestein, deuxième édition, Bruxelles 1884, p. 261, n. 884. Freilich stimmen die Angaben von Meester de Ravestein und von Brunn nicht ganz überein. Jener bezeichnet noch in der zweiten Ausg. den Gegenstand als une faune tenant sur le bras gauche un enfant auquel elle présente le sein, indem er des Weiteren bemerkt: cette charmante nymphe est placée dans un feuillage d'ornement qui cache une partie de ses cuisses et ses jambes. Elle est représentée ayant toute la forme humaine, moins les oreilles, qui, plus allongées à leur sommet, se terminent comme les oreilles des chèvres. Elle a à l'extremité de l'épine dorsale ni une queue, ni même un bouquet de poils. Brunn bezeichnet den Gegenstand „Panisca con Satiretto." Wir hören durch ihn noch Genaueres in Betreff des Kindes und der Panin: „il bambino ha bensì una piccola coda, ma non le gambe e le zampe, che dovremmo aspettar nel figlio d'una Panisca, ma che sarebbero brutte in un bambino tenuto sul braccio d'una donna di forme umane almeno nella parte superiore. La metamorphosi poi di questa comincia soltanto dalle coscie ed è accennata in oltre mediante le corna e le orecchie caprine. Zudem behauptet Brunn, che il Satiretto non vien allattato, ma soltanto tenuto in braccio, und darin hat er allem Anscheine nach Recht. Wie E. Meester vergessen hat, die ganz klar zu Tage liegenden Hörner der Panin anzugeben, so hat er auch übersehen, daß dieselbe an den Hüften der Vorderseite unverkennbare Haare hat, welche die Abbildung

zeigt, deren Treue auch in dieser Beziehung gewiß nicht angezweifelt werden darf. Dieser Umstand beweist gewiß, daß man an eine ziegenbeinige und ziegenfüßige Panin zu denken habe. Eine bis auf die Hörner ganz menschlich gebildete Panin werden wir unten auf einem schon vorlängst herausgegebenen unteritalischen Vasenbilde kennen lernen, ist aber hier nicht anzunehmen. Der vermeintliche, bis auf das Schwänzchen scheinbar menschlich gebildete Satiretto soll gewiß das Kind der Panin sein. Der Fuss kommt nicht zum Vorschein, ist aber als Bocksfuss zu denken.

Wenn Brunn annimmt, daß die eben besprochene Gruppe von der früher im Besitz von Vescovali befindlichen nicht verschieden sei, so hat das nach unserem Dafürhalten die größte Wahrscheinlichkeit.

Auch an einem vermuthlich hieher gehörenden Bronzerelief fehlt es nicht. Auf einem bronzenen Kruge im Mus. nazion. zu Neapel ist nach Gerhard und Panofka ant. Bildw. S. 195 der Kopf einer Panin eher als der einer Satyra zu erkennen.

Selbst in Bildwerken aus Blei finden wir eine Panisca dargestellt.

Dütschke beschreibt in den Ant. Bildw. aus Oberitalien III, S. 252, n. 555 eine freilich stark ergänzte Statuette einer solchen.

Auch auf einem Griechischen Bleistempel ist eine Darstellung dieses Wesens entdeckt von Benndorf in den Götting. gel. Anz. 1869, II, S. 2075. Das Blei ist von Postolacca in den Monum. d. inst. VIII, t. LII unter n. 375 herausgegeben und wird in dem dritten nächstens zu veröffentlichenden Hefte der Denkm. d. a. Kst. Taf. XLIII, n. 538a wiederholt erscheinen. Man erblickt im Profil dargestellt eine nackte sitzende weibliche Figur, welche bis über das Knie ganz menschlich gestaltet ist und eine spitze Mütze trägt (wie sie auch sonst bei dem Pan vorkommt, vgl. D. a. K. a. a. O. n. 534), auf dem Trigonon spielend.

Von Werken aus Terracotta haben wir zwei zu Statuetten gehörende Köpfe beizubringen, für deren Echtheit wir freilich nicht einstehen können.

Fr(öhner) hat in dem Verkaufsverzeichniß der Collection Cam. Lecuyer, 1889, p. 52 des Textes als auf eine Panin bezüglich in Abbildung mitgetheilt einen alten und häßlichen Kopf mit sehr gesträubtem Haar, zwei Hörnern und zwei Ziegenohren, an dessen Halse sich unterhalb des Kinnes zwei φήρεα befinden, wie sie aus Bildwerken bei Satyrn häufiger, aber unseres Wissens sonst nicht bei Panen nachweisbar sind.

Ein anderer Kopf ist auf der beigegebenen Tafel XXIX, n. 7 ab-

gebildet mit rundlicherem und jugendlicherem Gesicht, einer Stumpfnase, welcher gesträubtes Haar nur zwischen den Hörnern zeigt, ähnlich wie der Pankopf (nach Anderen Satyrkopf) aus Pompeji in meinen Denkm. d. a. K. II, 42, 522.

Endlich haben wir noch ein unteritalisches Vasenbild als hieher gehörig zu verzeichnen. Dasselbe ist schon in Avellino's Bullett. arch. Napol. T. IV, t. IV, n. 1 abbildlich mitgetheilt. Es stellt eine bis auf die Hörner vollkommen menschliche mit einem um den Hals geschlungenen Zeuggewande bekleidete Panin dar, welche einen Wedel auf der linken Achsel haltend und auf der Doppelflöte vor einem Thymiaterion stehend bläst.

Auch auf geschnittenen Steinen fehlt es nicht an Darstellungen von Paninnen.

Bei Gori Gemm. mus. Florent. I, 93, 1 ist eine Panin mit einem shawlartig über die Arme geworfenen Zeuggewande und hinter ihr ein Pan mit einer erhobenen brennenden Fackel auf einem brennenden Altar, wahrscheinlich des Priapus, dessen Bild hinter dem Altar sichtbar zu werden scheint, zuschreitend dargestellt.

Auf derselben Tafel des Gori'schen Werkes erblickt man unter n. 9 eine im Stehen auf der Doppelflöte blasende Panin.

In Lippert's Daktyliothek Supplem. n. 291 und Hirt's Bilderbuch Taf. XXI, n. 3, ist eine Gemme mit einer Unzucht treibenden Panin dargestellt, welche die größte Aehnlichkeit hat mit der einen entsprechenden Darstellung an dem schon oben S. 392 erwähnten Sarkophagrelief zu Neapel.

Endlich glauben wir auch auf einer Münze, oder zweien, den Kopf einer Panin voraussetzen zu dürfen.

Wir meinen die Silbermünze von Metapont, welche Reg. Stuart Poole Catal. of the Greek coins in the Brit. Mus., Italy, p. 249, n. 90 so beschreibt: Female Dionysiac head, r., with goat's horn above forehead, bound with ivy-wreath, indem er Carelli Num. Ital. vet. t. CLVII, n. 148 vergleicht. In der Erklärung dieses letzteren Exemplars p. 113 spricht Cavedoni nur von einem caput juveniile ohne des ganz deutlichen Horns Erwähnung zu thun. Dieses Horn gleicht aber nicht wohl denen der Satyrn, sondern denen der Pane. Demnach halten wir den Kopf für den einer Panin. Von thierischen Ohren ist weder bei Poole noch bei Cavedoni die Rede, in der Abbildung bei Carelli auch nichts zu sehen. Das thut aber der Annahme einer Panin keinen Eintrag, da Pane mit menschlichen Ohren grade auf unteritalischen Werken mehrfach vorkommen. Die Nase ist keine Stumpfnase.

Nachträge.

Zu S. 386, Z. 29. In dem Verzeichniß der Collection Castellani wird unter n. 277 und 278 eine Herme, gewiß von Marmor, erwähnt mit den Worten: deux Faunisques, mâle et jeune fille. Bel art grec.

Zu S. 386, Z. 32 fg. Einen mit kleinen Hörnern versehenen schönen sicher stehenden Kopf eines weiblichen Satyrkindes erwähnt A. Furtwaengler in den Annali dell' inst. arch. Vol. XLIX, p. 209, Anm. als in der Gall. dei candel. des Vatican. Mus. n. 136 befindlich.

Zu S. 389. Die Münze von Lampsakos ist bei Percy Gardner Types of Gr. coins Taf. X, 40 abgebildet. Er hält den Kopf für den einer Maenade und setzt die Prägung zwischen 371—335 v. Chr. an, gewiß zu früh.

Zu S. 391, nach Z. 9 v. u. Eine „stark ergänzte Statuette einer Paniska" wird nach H. Dütschke in den unteren Räumen der Gall. der Uffizien zu Florenz aufbewahrt (Ant. Bildw. in Oberitalien III, S. 252, n. 555).

Zu S. 393. Im Museum zu Bern befindet sich nach F. Deycks in den Jahrb. von Alterthumsfr. im Rheinlande XI, 1847, S. 2 fg. eine „zu Muri im J. 1660 gefundene Bronze einer Panin mit Paniscus, leider durch Vergoldung und auch wohl andere Ergänzungen, welche der erste Besitzer damit vornehmen ließ, sehr entstellt."

Zu S. 396, Mitte. Das Berliner Mus. besitzt nach Toelken Erkl. Verzeichn. d. vertieft geschn. Steine S. 212, Kl. III, Abth. 3, n. 1163 einen „Achatonyx", dessen Darstellung so beschrieben wird: „zwei bocksfüßige weibliche Satyren, deren eine einen Palmenzweig hält, beschäftigen sich sehr eifrig bei einer Herme des Priap." Der mir vorliegende Abdruck des Steins zeigt, daß es sich um zwei Paninnen handelt, von denen die eine dasselbe vornimmt, wie die Panin auf dem oben S. 392 erwähnten Neapolitan. Relief und auf der S. 396 angeführten Gemme bei Lippert und Hirt, indem sie die linke Hand an den Kopf der nicht behörnten Herme legt, die andere auf einem Altar knieend zuschaut. Von einem Palmzweige kann ich nichts sehen. Ist er vorhanden, so kann er nur als Wedel gefaßt werden.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1890.

(Fortsetzung.)

Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali. Vol. VII, p. 49—80. Adunanza del di 2. marzo 1890.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1890. N. 104. 105. 106. Firenze 1890.
Pennsylvanian Geological Survey 1889. A. A. Atlas. Southern Anthracite field. Part II. A. A. Atlas. Eastern Middle Anthracite field. Part III. A. A. Atlas. Northern Anthracite field. Part V.
The Geological and Natural History Survey of Minnesota Bulletin. N. 1. 5. St. Paul 1889.
Museum of comparative Zoölogy at Harvard college:
a. Bulletin. Vol. XIX. N. 2. 3.
b. Memoirs. Vol. XVI. N. 3. Cambridge 1889.

Juni 1890.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissensch. zu Berlin. 1890. XXVI/XXVII.
Leopoldina. Heft XXVI. N. 9/10.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg:
a. Sitzungsberichte 1890. N. 1—5.
b. Verhandlungen. Neue Folge. Band XXIV. N. 1—4.
Acta mathematica. 14, 2. Stockholm 1890.
Sitzungsberichte der philosophisch-philol. u. historischen Classe d. k. b. Akademie d. W. zu München. 1890. Heft II.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 63. Heft 1. Halle-Saale 1890.
Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für 1888—89. Frankfurt a. M. 1890.
Neues Lausitzisches Magazin. Band 66. Heft 1. Görlitz 1890.
Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen:
a. Abhandlungen. Band XI. Heft 2. Schluß.
b. Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens. Bremen 1890. 89.
Die Grenzschichten zwischen Hilsthon und Wealden bei Bersinghausen am Deister von C. Struckmann in Hannover. (Separatabdruck des Jahrb. d. k. preuß. geologischen Landesanstalt für 1889. Berlin 1890.
Ueber Feuerbestattung. Vortrag von Prof. Dr. Fr. Goppelsröder. Mühlhausen i. Els. 1890.
Abhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig:
a. Philol.-histor. Classe. Bd. XI. No. VII. Umrisse zur Naturlehre der Demokratie v. W. Roscher. Leipzig 1890.
b. Mathem.-physische Classe. Bd. XVI. No. II. 1. Ueber Aufnahme und Ausgabe ungelöster Körper. 2. Zur Kenntniß der Plasmahaut u. der Vacuolen etc. Ebd. 1890.
Beiträge zu der Theorie der gleichzeitigen Transformation von zwei quadratischen oder bilinearen Formen v. R. Lipschitz. (Aus den Sitzungsberichten d. K. Pr. Ak. d. W. zu Berlin 1890. XXVI.)
Jahresbericht der Fürstl. Iablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig. März 1890.
Mittheilungen der antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Band XXII. Heft 6. Leipzig 1890.

XIX. Jahresbericht der historisch-antiq. Gesellschaft von Graubünden. Jahrg. 1889. Chur.
Abhandlungen d. königl. böhmischen Ges. d. W. Prag 1890:
a. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. VII. Folge. 3. Bd.
b. Philosophische, geschichtliche u. philologische Classe. VII. Folge. 3. Band.
Die spekulative Idee der Freiheit etc. v. J. H. Loewe. Herausgegeben v. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. Prag 1890.
Anzeiger der Akademie d. Wiss. in Krakau 1890. Mai. Krakau 1890.
Kgl. Ung. Geologische Anstalt:
a. Jahresbericht für 1888. Budapest 1890.
b. Mittheilungen aus d. Jahrbuche. IX. Band 1. Heft. Ebd. 1890.
Ungarische Revue 1890. V./VI. Heft. Mai/Juni. Budapest 1890.
Értesitö az Erdélyi Muzeum-Egylet orvos-természettudományi szakosztályából. 1890. XV. Evfolgam.
a. I. Orvosi szak. 1. füzet.
b. II. Természettudományi szak. 1. 2. füzet.
c. III. Népszerü szak. 1. füzet. Budapest 1890.
Földtani Közlöny. [Geolog. Mittheilungen.] XX. Kötet. Füzet 1—3, 4. Budapest 1890.
Nature. Vol. 42. N. 1075—78.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. L. N. 7. Mai 1890.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLVII. N. 289. 290.
Journal of the R. Microscopical Society 1890. Part 3. June. London et Edinburgh.
Transactions and proceedings and report of the R. Society of South Australia. Vol. XII. 1888—89. Adelaide 1889.
Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of natural science of Halifax. Vol. VII. Part I. 1886—87. P. II. 1887—88. Halifax 1888.
Bulletin de l'Académie R. de Belgique. 60e année, 3e série, tome 19. N. 5. Bruxelles 1890.
Leçons sur la théorie générale des surfaces etc. par Gaston Darbous. IIIme partie. 1. fasc. Paris 1890.
Tijdschrift vor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. Deel 9. (= Nieuwe Reeks 1. deel.) (1.) 2. Aflever. Leiden 1890.
Nachruf für F. C. Donders.
Ondersoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door Th. W. Engelmann en C. A. Peckelharing. Vierde Reeks. I, 1. Utrecht 1890.
Bulletin de la Société Imp. des naturalistes de Moscou. Année 1889. N. 4. Moscou 1890.
Sällskapet för Finlands Geografi. Fennia 2. 3. Bulletin de la société de geographie de Finlande. Helsingfors 1890.
Sveriges geologiska undersökning:
a. Ser. Aa. N. 84, 100, 103, 104, 105/106. 107. Stockholm 1889.
b. Ser. Bb. N. 4. 6.
c. Ser. C. N. 92—111. 113—115.
Om apatitens förekomstsätt i Norrbottens Län jemförd med dess uppträdande i Norge af G. Löfstrand. Stockholm 1890.
Liste systématique des publications de l'Institut R. géologique de Suède. 1862—1890. Stockholm 1890.
The Norwegian north-atlantic expedition 1876—1878. XIX. Zoology. Actinida. Christiania 1890.
a. Praktisk-Geologisk Karta öfver Farsta och Gustafsberg.
b. Karted zu Série Aa. N. 84, 100, 103, 104. N. 105/106. 107.
Atti della R. Academia dei Lincei 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 1. Sem. Fasc. 7. Roma 1890.
Bollettino delle pubblicazioni italiane (Biblioteca Nationale Centrale di Firenze.) 1890. N. 107, 108. Firenze 1890.
Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbl. govern. d'Italia. (Bibl. nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma). Vol. IV. N. 5. Sett./Ott. 1889. Roma 1890.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College. Vol. XIX. N. 4 u. Vol. XVI. No. 8. Cambridge, U. S. A. 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. IX. N. 81. Baltimore 1890.
Aperçú sur le Micro-graphophone de Gianni Bettini. New-York 1890. (3 Exemplare).

Nachträge.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London. 1890. Part. 1. Jan. and Febr. London 1890.
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Entrega 2. 3. 1890. Febr. Marzo. Tomo XXIX. Buenos-Aires 1890.
Informe de la Direccion general de Estadística 1889. Guatemala.
Washington observations 1884. Appendix I. Catalogue of the stars observed at the U. S. naval observatory during 1845—1877. Washington 1889.
Transactions of the American philosophical society. Vol. XVI. New series. Part III. Philadelphia 1890.
a. American journal of Mathematics. Index to vol I—X.
b. American journal of Mathematics. Vol. XII. N. 1. 2. Baltimore 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. VIII. N. 75. Vol. IX. N. 77. 80.
Johns Hopkins University studies. Seventh series. X—XI. XII. Federal government in Canada. Baltimore.
Mittheilungen des deutschen wissenschaftlichen Vereines in Mexico. Band 1. Heft 1. Mexico 1890.
Boletins mensaes do 1º Observatorio meteorologico da repartiçao dos Telegraphos do Brazil. Vol. 1886. Vol. II. 1887. Vol. III. 1888. Rio de Janeiro.
The geological and natural history survey of Minnesota. 7th annual report. St. Paul 1889.
The transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIX. Part XIII. Dublin.

Juli 1890.

Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissensch. zu Berlin. 1890. XXXI. XXXII u. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI u. XXXVII.
Siebenundzwanzigster Bericht der oberhessischen Gesellsch. für Natur- u. Heilkunde. Gießen 1890.
Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Jahrg. VII. 1889. Hamburg 1890.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. 25. Heft 2. Leipzig 1890.
Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 11—12. Juni 1890. Halle a. S.
Jahresbericht u. Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Magdeburg. 1889. Magdeburg 1890.
Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jahrgang 30. 1889. Königsberg 1890.
Paul Starke: Arbeitsleistung u. Wärmeentwicklung bei der verzögerten Muskelzuckung. (Des XVI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kön. Sächsischen Ges. d. Wiss. N. 1. Leipzig 1890.
Veröffentlichungen des Kgl. Preuß. Geodätischen Institutes. Astronomisch-geodätische Arbeiten 1. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen in den Jahren 1888 u. 1889 etc. Berlin 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 11.

Friedrich Wieseler, weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

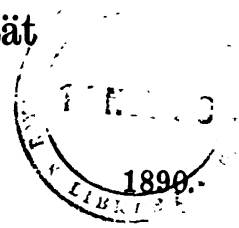
Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

15. October. **№ 12.** 1890.



Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. August.

Ueber die Verteilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Von

W. Nernst.

Henry's Absorptionsgesetz der Gase in Flüssigkeiten ist neuerdings zu ganz besonderer Bedeutung gelangt; von van 't Hoff[1]) nämlich wurde bekanntlich der Beweis erbracht, daß ein Gas, welches sich in einem beliebigen Lösungsmittel dem Drucke proportional löst, bei gleicher räumlicher Konzentration als solches und im Zustande der Lösung gleichen Gas- bez. osmotischen Druck ausübt.

Umgekehrt, wenn ein Stoff wie Rohrzucker Pfeffer's Messungen zufolge in wässeriger Lösung den gleichen Druck ausübt, wie ihn der Dampf des Rohrzuckers bei gleicher räumlicher Konzentration aufweisen würde, so kann daraus mit voller Sicherheit gefolgert werden, daß der Dampf des Rohrzuckers dem Wasser gegenüber Henry's Gesetze gehorcht, daß mit anderen Worten der Partialdruck des Rohrzuckers in dem über einer wässerigen

1) van t' Hoff, Zeitschrift für physik. Chemie. 7, 488 (1887).

Lösung lagernden Dampfe proportional der Konzentration des im Wasser gelösten Zuckers ist. Ein Stoff wie Chlorwasserstoff hingegen, welcher in Lösung einen dem entsprechenden Gasdrucke nahe um das doppelte überlegenen osmotischen Druck aufweist, ist demgemäß auch weit davon entfernt, sich unter Henry's Gesetz zu fügen, wie allgemein die exceptionelle Stellung der Elektrolyte u. A. sich darin zeigt, daß sie sich keineswegs ihrem Partialdrucke proportional in Wasser lösen.

In welcher Weise das Absorptionsgesetz unter solchen Umständen sich modifiziert, läßt sich unschwer mittelst eines dem von van 't Hoff mitgeteilten analogen Kreisprozesses unabhängig von jeder Molekularhypothese entwickeln; einfacher gestalten sich aber die Betrachtungen, wenn wir von dem Satze Gebrauch machen, daß in einer Lösung ebensoviel gelöste Moleküle sich befinden, wie im gleichen Gasvolum bei gleicher Temperatur, in welchem der Gasdruck ebensogroß ist wie dort der osmotische Druck. Dann lautet van 't Hoff's Satz einfach: Nur diejenigen Stoffe folgen Henry's Gesetz, welche mit unveränderter Molekulargröße in Lösung gehen.

Betrachten wir nun einen Stoff, welcher im Zustande der Lösung und als Gas verschiedenen Molekularzustand besitzt, d. h. sich sowohl in Lösung wie als Gas im Dissociationszustande befindet, der aber in beiden Fällen ein sehr verschiedener sein kann. Dann ist nach Analogie des Dalton'schen Gesetzes, wonach bei einem Gemisch von Gasen sich jedes einzeln seinem Partialdrucke und Absorptionskoeffizienten gemäß löst, auch hier vorauszusehen, daß obiger Satz für jede einzelne Molekülgattung Gültigkeit behält, d. h. daß für jede Molekülgattung das Verhältnis der räumlichen Konzentrationen im Gas- und im Lösungszustande bei gleicher Temperatur unabhängig von der Konzentration ist. In der That, betrachten wir z. B. die Bildung einer Doppelmolekel aus zwei Einzelmolekülen, und bezeichnen wir mit g_1 und g_2 den Partialdruck der einfachen und der verdoppelten Moleküle im Gaszustande, und mit l_1 und l_2 den entsprechenden osmotischen Druck der gleichen Moleküle in der Lösung, so muß nach der Gleichung der Dissociationsisotherme

$$g_1^2 = k' g_2 \text{ und } l_1^2 = k'' l_2$$

sein. Bringen wir das Gas und somit auch die damit in Berührung befindliche Lösung auf sehr große Verdünnung, so wird das Verhältnis der Konzentrationen gleich $\frac{g_1}{l_1}$ und von der Konzentra-

tion unabhängig; die einfachste Annahme ist nun die, daß dies auch bei größeren Drucken bestehen bleibt, und dann muß nach obigen Gleichungen auch $\frac{g_2}{l_2}$ konstant sein, d. h. für beide Molekülgattungen findet ein von der Konzentration unabhängiges Teilungsverhältnis statt.

Wenn ein Körper im Gaszustande fast vollständig aus Doppelmolekülen besteht, in Lösung aber fast vollständig in die Einzelmoleküle zerfallen ist, so muß die Konzentration desselben im Gaszustande der zweiten Potenz der Konzentration in der Lösung proportional sein; der Dampf der Essigsäure etwa, der bekanntlich bei niederen Temperaturen, nach seiner Dampfdichte zu schließen, aus Doppelmolekeln besteht, würde dem Wasser gegenüber, worin Essigsäure, von der geringfügigen elektrolytischen Dissociation abgesehen, aus Molekülen normaler Molekulargröße besteht, in so auffälliger Weise vom Henry'schen Gesetze abweichen, während er sich in Benzol, worin Essigsäure bimolekular ist, dem Drucke proportional lösen müßte. Die Notwendigkeit dieses Verhaltens läßt sich übrigens, worauf schon hingewiesen wurde, auch thermodynamisch in aller Strenge ableiten.

Ich hoffe alsbald die obigen Gesetze an einigen Fällen verifizieren zu können; man übersieht nämlich bereits, daß sich aus der Dampfspannung von Lösungen flüchtiger Stoffe in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration Folgerungen über das Verhältnis der Molekulargrößen ergeben, welche dem gelösten Stoffe in der Lösung und im Gaszustande zukommen. Zur Messung der Dampfspannung könnte man sich wohl am besten des Beckmann'schen Siedeapparates bedienen, dessen Theorie sich unschwer mit Hülfe der obigen Prinzipien auch auf die Anwendung flüchtiger Stoffe als gelöster Körper erweitern läßt. Hier jedoch seien dieselben nach einer andern Seite hin weitergeführt, wobei man zu einigen einfachen und an der Erfahrung scharf zu prüfenden Resultaten gelangt.

Wir wollen unter dem Teilungskoeffizienten eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln dasjenige Konzentrationsverhältnis verstehen, bei welchem der betreffende Stoff in den über den beiden Lösungen lagernden Gasgemischen gleichen Partialdruck besitzt. In der That schaltet man zwischen zwei derartige Lösungen eine nur für den gelösten Stoff durchlässige Wand ein, so wird keine der andern von dem gelösten Stoffe entziehen, sondern ein Gleichgewichtszustand bestehen bleiben. Nach dem Früheren ergeben sich dann sofort die Sätze:

1) Besitzt der gelöste Stoff in beiden Lösungsmitteln gleiche Molekulargröße, so kommt ihm ein von der Konzentration unabhängiger Teilungskoeffizient zu und umgekehrt.

2) Besteht der gelöste Stoff aus Molekülen verschiedener Größe oder Zusammensetzung, so gilt der erste Satz für jede beliebig herausgegriffene Gattung von Molekülen.

3) Kommt dem gelösten Stoffe im zweiten Lösungsmittel also etwa die doppelte Molekulargröße zu (vorwiegend) wie im ersten, so ist $\frac{c_1^2}{c_2}$ von der Konzentration unabhängig, wobei c_1 und c_2 die Konzentration in beiden Lösungsmitteln bezeichnen.

Was nun die experimentelle Bestimmung des oben definierten Teilungskoeffizienten anlangt, so wäre dazu nur notwendig, die Dampfspannung des betreffenden Stoffes zu ermitteln, während derselbe in den beiden Lösungsmitteln zu wechselnden Konzentrationen gelöst ist, wobei man freilich häufig auf sehr bedeutende experimentelle Schwierigkeiten stoßen würde. Nur an einem Punkte ist die Bestimmung des Teilungskoeffizienten leicht ausführbar, bei derjenigen Dampfspannung nämlich, welche der reinen festen Substanz entspricht; denn die Löslichkeit des Dampfes von diesem Drucke ist ja gleich der Löslichkeit des festen Körpers und der Teilungskoeffizient demgemäß einfach gleich dem Verhältnis der Löslichkeiten.

Ganz einfach hingegen für jede beliebige Konzentration gestaltet sich die Bestimmung des Teilungskoefficienten eines Stoffes zwischen zwei einander nur äußerst wenig lösende Flüssigkeiten, indem hier nur mittelst Analyse der beiden Lösungen, welche mit einander im Gleichgewichte sind, zu ermitteln ist, wie viel von dem dritten Stoffe jedes der beiden Lösungsmittel enthält. In diesem Falle wird also der von uns eingeführte Teilungskoeffizient identisch mit dem Berthelot'schen[1]); aber er verliert keineswegs seine Bedeutung Flüssigkeiten gegenüber, welche sich stark einander lösen oder gar in allen Verhältnissen mischen; nur seine experimentelle Bestimmung wird unter solchen Umständen schwieriger.

Der Mittheilung der eigenen Versuchsresultate sei eine kurze Diskussion der von Berthelot und Jungfleisch erhaltenen Zahlen vorausgeschickt. Die genannten Forscher finden den Teilungskoefficienten unabhängig von den Mengenverhältnissen der

1) Berthelot und Jungfleisch, Ann. ch. ph. [4], 26, 396 (1872). Berthelot, ibidem 408.

beiden Lösungsmittel, jedoch, wenn auch nicht bedeutend, veränderlich mit der Konzentration und der Temperatur. Der erste Satz ist ohne weiteres einleuchtend; was die geringe Veränderlichkeit mit der Temperatur anbetrifft, so sei daran erinnert, daß auch der Absorptionskoeffizient der Gase mit der Temperatur selten beträchtlich variiert; die Veränderlichkeit mit der Konzentration haben wir auf verschiedene Molekularkonstitution zurückgeführt und kann dieselbe, wie wir später sehen werden, zuweilen außerordentlich bedeutend werden.

Berthelot[1]) konstatiert ferner, daß Gemische von gelösten Stoffen, die auf einander nicht chemisch reagiren, sich so verteilen, wie wenn jeder allein vorhanden wäre, ein völliges Analogon, worauf schon Berthelot selber hinweist, zu dem Satze der unabhängigen Löslichkeit der zu einem Gemische vereinigten Gase.

Im Einzelnen ergab sich Berthelot und Jungfleisch, daß Brom sowohl wie Jod sich zwischen Wasser und Schwefelkohlenstoff in fast konstantem Verhältnis teilen, und zwar schwankt letzteres nur um wenige Prozente, während die Konzentrationen wie 1 : 10 variieren. Beide Elemente besitzen also in diesen Lösungsmitteln gleiches Molekulargewicht; da für in Schwefelkohlenstoff gelöstes Jod die Molekulargröße J_2 erwiesen ist[2]), so kommt auch dem in Wasser gelöstem Jod die normale Molekulargröße zu und auch beim Brom kann es sich hier wohl nur um Br_2 handeln. Wir treffen hier also die erwarteten Verhältnisse an.

Außerdem finden sich in der genannten Abhandlung noch eine Anzahl Versuche über die Verteilung organischer Säuren zwischen Aether und Wasser. Allerdings findet hier eine Komplikation insofern statt, als diese beiden Lösungsmittel sich bekanntlich gegenseitig nicht unbeträchtlich lösen und ferner diese gegenseitige Löslichkeit sich infolge Gegenwart dritter Körper nach den neulich dargelegten Gesetzen[3]) (übrigens in einer der Berechnung völlig zugänglichen Weise) nicht unbeträchtlich ändert. Gleichwohl können wir über die Molekulargröße der betreffenden Säuren in ätherischer Lösung durchaus sichere Schlußfolgerungen ziehn.

Als in 10 cc Wasser 0·121, 0·070, 0·024 g Bernsteinsäure gelöst waren, betrug die entsprechende Menge in 10 cc der ätherischen Lösung 0·022, 0·013, 0·0046. Das Verhältnis dieser Zahlen ist recht konstant (5·4, 5·2, 5·2) und da bei obigen Konzentrationen nur wenige Prozent in wässeriger Lösung elektrolytisch dissociiert

1) l. c. 417.

2) E. Beckmann, Zeitschrift für physik. Chemie. 5, 76 (1890).

3) Nernst, diese Nachrichten vom 26. Februar 1890.

sind[1]), die in Wasser gelöste Bernsteinsäure also weitaus vorwiegend aus Molekülen normaler Größe besteht, so besitzt auch die in Aether gelöste Bernsteinsäure normale Molekulargröße, wie es ja auch nach aller Analogie zu erwarten stand.

Oxalsäure wies bei den Konzentrationen 0·473, 0·436, 0·304, 0·203 g die Teilungskoeffizienten (Verhältnis der in 10 cc Wasser zu der in 10 cc Aether gelösten Menge) 9·0, 9·5, 9·8, 9·9 auf. Bei obigen hohen Konzentrationen (0·45 g in 10 cc Lösung entspricht einer Normallösung) ist jedenfalls die elektrolytische Dissociation nicht übermäßig weit (wenigstens nicht über die Hälfte) fortgeschritten[2]); der Zunahme der elektrolytischen Dissociation mit der Verdünnung entspricht die, besonders wenn man die verhältnismäßig kleinen Aenderungen der Konzentration in Betracht zieht, nicht unerhebliche Zunahme der Teilungskoeffizienten, und man überzeugt sich leicht, daß, wenn man den Quotienten aus dem nicht dissociierten Anteile der Oxalsäure zu der im Aether befindlichen Mengen bildet, bedeutend weniger variierende Werthe des Teilungskoeffizienten resultieren. Demgemäß kann kein Zweifel darüber bestehen bleiben, daß auch die Oxalsäure in Aether gelöst normale Molekulargröße besitzt. Denn wenn sie etwa in Aether bimolekular wäre, müßte der Teilungskoeffizient von den Konzentrationen 0·473 bis 0.203 auf etwa das 5·4fache zunehmen, also eine Variation ganz anderer Größenordnung zeigen. Ebenso sprechen die mit Aepfelsäure und Weinsäure angestellten Messungen entschieden für die normale Molekulargröße dieser Stoffe in ätherischer Lösung, wenn auch hier die Konzentrationen in der wässerigen Lösung schon so bedeutend (bis 10 %) sind, daß die Anwendbarkeit der nur für verdünnte Lösungen streng gültigen Verteilungsgesetze einigermaßen eingeschränkt wird. Bei der Essigsäure, die bei den Konzentrationen 0·3 und 0·1 der wässerigen Lösung den Teilungskoefficienten 1·8 und 2·3 besitzt, dürfte sich die Abnahme desselben mit steigender Konzentration dadurch erklären, daß sich bei den entsprechenden Konzentrationen der ätherischen Lösung bereits theilweise Doppelmoleküle bilden, wozu ja dieser Stoff bekanntlich Neigung besitzt. Ebenso verschwindet bei der Benzoesäure, welche bei den Konzentrationen 0·00304, 0·00258, 0·00150, 0·00110 g auf 10 cc wässeriger Lösung die Teilungskoeffizienten $^1/_{91}$, $^1/_{88}$, $^1/_{80}$, $^1/_{71}$ besitzt, die Zunahme mit der Verdünnung zwar zum großen Theile, wenn man die mit der Verdünnung zunehmende

1) W. Ostwald, Zeitschrift für physikal. Chemie. 3, 370.

2) Ostwald, l. c. 281.

elektrolytische Dissociation in Betracht zieht (dieselbe beträgt bei der größten Konzentration 14, bei der kleinsten bereits 21 %), doch bleibt immerhin noch ein merkliches Anwachsen zurück, was auf eine, wenn auch nur nach wenigen Prozenten zählende Bildung von Doppelmolekeln in den verhältnismäßig konzentrierten (bis zu vierprozentigen) ätherischen Lösungen hindeutet. Natürlich setzen obige Zahlen es in Evidenz, daß auch Benzoesäure in Aether gelöst bei nicht zu hohem Gehalt sich normal verhält.

Bei meinen eigenen Versuchen habe ich solche Stoffe gewählt, welche ein besonders charakteristisches Verhalten vorhersehen ließen. Ganz auffallende Verhältnisse waren nämlich bei der Untersuchung eines Stoffes zu erwarten, welcher in den beiden Lösungsmitteln in ganz verschiedenen Molekularzustande sich befindet; während bei den Versuchen von Berthelot und Jungfleisch immerhin noch von einer wenigstens genäherten Konstanz des Teilungskoeffizienten gesprochen werden kann, darf nach der Theorie im obigen Falle auch nicht entfernt davon die Rede sein. Solche Stoffe sind u. A. Essigsäure und Phenol, die nach den Gefrierpunktsbestimmungen in Wasser sich normal verhalten, in Benzol hingegen bei nicht zu kleinen Konzentrationen bimolekular sind.

Der Versuch entsprach der Erwartung vollkommen; derselbe wurde bei der Essigsäure in der Weise ausgeführt, daß Beckmann's Gefrierapparat mit 5·075 g Wasser und 31·5 g Benzol beschickt, der Gefrierpunkt des Gemenges, welcher bei der geringen Löslichkeit des Wassers in Benzol von demjenigen des reinen Benzols (5·9°) nur wenig verschieden war, ermittelt sowie das Sinken desselben verfolgt wurde, als man successive gewogene Mengen von Essigsäure hinzufügte. Letzteres erfolgt natürlich demjenigen Bruchteile der Essigsäure entsprechend, welcher in das Benzol übergeht; um diesen kennen zu lernen, wurde in einer besonderen Versuchsreihe der Einfluß hinzugefügter Essigsäure auf den Gefrierpunkt von mit nur wenig, zur Sättigung gerade hinreichendem Wasser versetztem Benzol untersucht. Auffallender Weise ergeben sich hier nicht unerheblich stärkere Depressionen, als die von Hentschel[1]), Beckmann u. A. bei Anwendung wasserfreien Benzols gefundenen. Als ich zu 31·5 g Benzol successive 0·0173, 0·0650, 0·292 g Essigsäure hinzusetzte, betrugen die Depressionen 0·033, 0·110, 0·450°, während Beckmann bei entsprechendem Gehalte um 16 bis 17 % kleinere Werte erhielt. Die

1) Hentschel, Zeitschr. f. physik. Chemie. 2, 491 (1888); E. Beckmann, ib. 2, 729 (1888).

einfachste Erklärung dieser die Beobachtungsfehler weit übersteigenden Abweichung ist wohl die Annahme, daß Wasser sich in mit Essigsäure versetztem reichlicher löst als in reinem Benzol. Natürlich wird die Sicherheit der analytischen Bestimmung der Essigsäure in Benzol mittelst des Gefrierapparates dadurch in keiner Weise beeinträchtigt. In Tab. I finden sich die Versuchsresultate; unter t steht die beobachtete Gefrierpunktserniedrigung, unter c_1 die Anzahl g Essigsäure, welche hiernach in den 31·5 g Benzol vorhanden waren; c_2, die Anzahl g Essigsäure, welche in die 5·075 g Wasser übergegangen waren, ergaben sich, indem man c_1 von der hinzugesetzten Gesamtmenge subtrahierte. Strenge genommen sind die Zahlen nicht völlig vergleichbar, weil sie nicht bei der gleichen Temperatur gewonnen sind; doch dürfte der hierdurch erzeugte Fehler bei der geringen Veränderlichkeit der Verteilungskoeffizienten mit der Temperatur, von der auch ich mich wiederholt überzeugte, durchaus verschwindend sein.

Tabelle I.

t	c_1	c_2	$\frac{c_2}{c_1}$	$\frac{c_2^2}{c_1}$
0·075°	0·043	0·245	5·7	1·40
0·120	0·071	0·314	4·4	1·39
0·158	0·094	0·375	4·0	1·49
0·240	0·149	0·500	3·4	1·67

Wie vorauszusehn, ist der Teilungskoeffizient $\frac{c_2}{c_1}$ keineswegs konstant, sondern nimmt mit der Konzentration stark ab, wohingegen $\frac{c_2^2}{c_1}$ viel weniger variiert; daraus, daß letzterer Ausdruck umgekehrt mit steigender Konzentration merklich ansteigt, haben wir zu schließen, daß Essigsäure in Benzol gelöst zwar zum weitaus größten Teile aus Doppelmolekeln besteht, bei geringerer Konzentration aber auch Moleküle normaler Größe in nicht ganz unbeträchtlicher Menge enthält. Zu demselben Resultate gelangte bekanntlich Beckmann[1]) auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Molekulargewichtsbestimmungen nach Raoult's Methode.

Aehnliche Resultate lieferte Phenol, dessen Verteilungsweise zwischen Benzol und Wasser ich nach der gleichen Methode untersuchte. Als ich zunächst behufs Aichung des Apparats zu mit wenig Wasser versetzten Benzol gewogenen Mengen Phenol hin-

1) Beckmann, l. c. S. 730.

zufügte, beobachtete ich auch hier um 17 bis 20 % höhere Depressionen als die von Beckmann mit wasserfreien Substanzen erhaltenen. In folgender Tabelle sind die den daneben stehenden Prozentgehalten (g Phenol auf 100 g Benzol) entsprechenden Depressionen t verzeichnet.

Tabelle II.

% Gehalt	t
0·104	0·041°
0·352	0·139
0·68	0·257
0·89	0·354
2·20	0·765
3·68	1·270
4·90	1·472

Mit Hülfe dieser Zahlen sind aus den Gefrierpunktserniedrigungen, welche durch Hinzufügen von Phenol zu 13·46 g Benzol und 30 g Wasser erzeugt wurden, folgende Werte für c_1 und c_2 abgeleitet.

Tabelle III.

c_1	c_2	$\frac{c_2}{c_1}$	$\frac{c_2^2}{c_1}$
0·017	0·038	2·24	0·085
0·051	0·077	1.51	0.116
0·123	0·159	1·30	0·205
0.327	0·253	0·77	0·196
0·75	0·39	0·52	0·203

Die Beobachtungen, welche hier über ein weiteres Gebiet erstreckt werden konnten, zeigen bei außerordentlicher Veränderlichkeit von $\frac{c_2}{c_1}$ eine bei höherer Konzentration recht nahe erfüllte Konstanz von $\frac{c_2^2}{c_1}$. Da nun bekanntlich Phenol in Wasser gelöst normale Molekulargröße besitzt, muß es also in Benzol bei obigen Konzentrationen weitaus vorwiegend aus Doppelmolekeln bestehen, die jedoch bei den niederen Konzentrationen in erheblichem Maaße sich spalten. Hiermit stimmen wiederum Beckmann's Messungen trefflich überein, welcher bei einem dem größten und kleinsten Werte von c_1 in obiger Tabelle entsprechendem Gehalte die Molekulargrößen 178 und ca. 140 fand, während das normale Molekulargewicht 94 beträgt.

Man kann übrigens aus obigen Zahlen auch den Dissociationszustand ziemlich sicher berechnen; aus den bei großen Konzentrationen erhaltenen Zahlen schließen wir, daß die Anzahl von Doppelmolekeln des im Benzol gelösten Phenols $\frac{c_2^2}{0{\cdot}20}$ beträgt und sich daher für die beiden größten Verdünnungen zu 0·0072 und 0·0277 berechnet. Demgemäß ergiebt sich die Anzahl der dissociierten Molekeln zu 0·010 und 0·023. Gilt nun für die in Benzollösung sich abspielende Reaktion

$$(C_6H_5OH)_2 = C_6H_5OH + C_6H_5OH$$

die Gleichung der Dissociationsisotherme, so muß das Quadrat der Konzentration der Einzelmoleküle dividiert durch die Anzahl der Doppelmoleküle konstant sein. Thatsächlich finden wir

$$\frac{0{\cdot}01^2}{0{\cdot}0072} = 0{\cdot}014 \text{ und } \frac{(0{\cdot}023)^2}{0{\cdot}0277} = 0{\cdot}019$$

kaum über die Versuchsfehler hinaus verschieden, welche sich in obigen Ausdrücken in ganz außerordentlicher Weise vervielfältigen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß Alkohol, welcher in Benzol bei nicht zu hohen Konzentrationen[1]) sowie in Wasser normale Molekulargröße besitzt, sich demgemäß auch unabhängig von der Konzentration zwischen die obigen Lösungsmittel verteilt, wenn auch die hier ausgeführten Messungen wegen der geringen Menge des in das Benzol übergehenden Alkohols (er verteilt sich zwischen gleiche Gewichtsteile Benzol und Wasser etwa im Verhältnis 1:60) und der infolgedessen nur sehr kleinen Gefrierpunktserniedrigungen keine große Genauigkeit beanspruchen können.

Obwohl das bisher mitgeteilte Zahlenmaterial den eingangs theoretisch abgeleiteten Sätzen bereits eine sichere experimentelle Unterlage verleihen dürfte, so empfahl es sich doch zur Entscheidung gewisser anderer Fragen einerseits die Verteilung eines Stoffes innerhalb weiterer Aenderungen der Konzentration und anderseits, was ja ganz besonderes Interesse beansprucht, den Einfluß der elektrolytischen Dissociation zu untersuchen. Ich habe derartige Messungen mit Benzoesäure und Salicylsäure ausgeführt, Stoffe, von denen der erstere als der Repräsentant eines nur wenig, der zweite als derjenige eines verhältnismäßig stark disso-

1) Beckmann, l. c. 728.

ciierten Elektrolyten dienen kann. In Benzol sind beide Stoffe bei denjenigen Konzentrationen, für welche die Raoult'sche Methoden noch genügende Genauigkeit liefern, bimolekular; doch liegen Anzeichen vor, daß sie bereits beginnen, sich in ihre Einzelmoleküle aufzulösen[1]). Thatsächlich werden wir denn auch konstatieren, daß die genannten Stoffe, bei Verdünnungen freilich erst, bei denen die früheren Methoden völlig versagen, normale Molekulargröße annehmen.

Es ist leicht auf Grund dieser Angaben sich im Voraus ein Bild von dem qualitativen Verlauf der Erscheinungen zu machen. Benzoesäure, welche bei großen Verdünnungen in beiden Lösungsmitteln, abgesehen von der geringfügigen elektrolytischen Dissociation, normale Molekulargröße besitzt, muß demgemäß hier sich in konstantem Verhältnisse theilen; bei höheren Konzentrationen, wo dieser Stoff im Benzol in Gestalt von Doppelmolekeln gelöst ist, haben wir Konstanz des Ausdruckes $\frac{c_1^2}{c_2}$ zu erwarten und dazwischen liegt das Dissociationsgebiet. Salicylsäure hingegen, welche bei höherer Konzentration, wo die elektrolytische Dissociation zu vernachlässigen ist, sich wie die Benzoesäure verhalten muß, wird bei großen Verdünnungen sich keineswegs in konstantem Verhältnisse theilen, sondern mit zunehmender Jonenspaltung immer reichlicher an das Wasser abgegeben werden.

Was die Versuche selber anlangt, so verfuhr ich bei der Benzoesäure einfach in der Weise, daß ich sie in gewogenen Mengen successive in einen Scheidetrichter einführte, welcher 250 cc Wasser und 100 cc Benzol enthielt. Nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes[2]), welcher nach mehrmaligem Schütteln schnell und präcise sich einstellte, wurden 50 cc der wässerigen Schicht mittelst Barytwasser und Phenolphtalein als Indikator titriert; die dem Scheidetrichter entnommenen Wassermengen wurden stets wieder ersetzt, wobei darauf geachtet wurde, daß nur von Kohlensäure befreites, nämlich mit Phenolphtalein und Barytwasser bis zur schwachen Rosafärbung versetztes Wasser in Anwendung kam. Da man durch Wägung die gesamte zugeführte, durch Titration die an das Wasser abgegebene sowie auch die im Laufe des Ver-

---

1) Beckmann, l. c. 730.

2) Berthelot's Bemerkung (l. c. 398), wonach der Gleichgewichtszustand sich erst nach einigen Stunden herstellt, kann ich nach meinen Versuchen nicht bestätigen, war vielmehr in allen Fällen erstaunt über die Geschwindigkeit und Sicherheit, mit welcher das schließliche Teilungsverhältnis erreicht wird.

suches zur Titration verbrauchte Menge Benzoesäure kannte, so bot die Berechnung der Versuche keine Schwierigkeit. Mehrfache Wiederholungen zeigten, daß auf diese Weise scharfe Resultate zu erhalten sind; die Versuchsfehler werden um so geringer, je größer die an das Benzol abgegebene im Verhältnis zur gesamten Menge der Säure ist, und wenn die an das Wasser abgegebene Menge gegen jene verschwindet, so werden die Bestimmungen der Konzentration im Benzol so genau als man wägt, und derjenigen im Wasser so genau als man titriert. Schwankungen der nahe 20° betragenden Temperatur wurden während des Versuches nach Möglichkeit vermieden.

Bei der Salicylsäure, wo eine Ausdehnung der Messungen bis auf sehr große Verdünnungen wünschenswert erschien, geschah die Analyse mittelst des elektrischen Leitungsvermögens. Zunächst wurde durch Hinzufügen gewogener Mengen einer Salicylsäurelösung von bekanntem Gehalt zu einer ebenfalls gewogenen in einem Arrhenius'schen Widerstandsgefäße befindlichen Wassermenge eine empirische Skala für die Abhängigkeit des Widerstandes von der Konzentration gewonnen, welcher nach Kohlrausch's Methode unter Anwendung einer Brückenwalze bestimmt wurde. Die Messungen ließen sich bei größeren Konzentrationen vortrefflich durch folgende Formel darstellen, welche eine Umformung der Ostwald'schen Dissociationsgleichung der Elektrolyte darstellt:

$$G = \frac{A}{w} + \frac{B}{w^2}$$

G und w bedeuten den Gehalt und den Widerstand der Lösung, A und B sind Konstante. Bei größeren Verdünnungen ließ sich der Gehalt einfach durch Interpolation aus dem Leitungsvermögen mit hinreichender Sicherheit ermitteln. Mit der Darstellung genügend reinen Wassers hatte ich anfänglich Schwierigkeiten, erzielte schließlich aber solches ($k = 2 \times 10^{-10}$) einfach durch Ausfrieren des gewöhnlichen destillierten Wassers. Die Versuchstemperatur wurde stets auf 18° gehalten.

Die eigentlichen Messungen geschahen nun in der Weise, daß entweder zu einer im Widerstandsgefäße befindlichen Salicylsäurelösung gewogene Mengen Benzol hinzugefügt und die Abnahme des Leitungsvermögens bestimmt, oder zu im Widerstandsgefäße befindlichem Wasser und Benzol gewogene Mengen einer Salicylsäurelösung hinzugesetzt und die Zunahme des Leitungsvermögens der wässerigen Schicht ermittelt wurde. Das über dem Wasser befindliche Benzol hindert die Bestimmung des Widerstandes kei-

neswegs, auch nicht, wie ich mich durch besondere Versuche überzeugte, etwa in der Weise, daß Benzol an den Platinplatten des Widerstandsgefäßes adhäriert und Veranlassung zu einem Uebergangswiderstande giebt. Einige Kontrollversuche wurden auch bei der Salicylsäure mittelst Titration ausgeführt. c_2 bedeutet die an das Wasser [100 bez. 544 g], c_1 die an das Benzol [100 cc bez. 544 g] abgegebene Menge der Säuren.

Tabelle IV.

Verteilung von Benzoesäure zwischen 100 cc Wasser u. 100 cc Benzol.

$t = 20^0$.

c_2 in g	c_1 in g	m	$c_2(1-m)$	m'	c_1-m'	$\frac{m'^2}{c_1-m'}$
0·0163	0·0535	0·190	0·0132	0·0377	0·0158	0·090
0·0197	0·0753	0·178	0·0162	0·0462	0·0291	0·073
0·0244	0·099	0·159	0·0205	0·0584	0·0306	0·111
0·0369	0·194	0·132	0·0321	0·0915	0·1025	0·081
0·0452	0·273	0·118	0·0398	0·1135	0·160	0·080
0·0596	0·444	0·104	0·0534	0·1522	0·292	0·079
0·0788	0·737	0·092	0·0716	0·2041	0·533	0·078
0·0976	1·050	0·081	0·0897	0·256	0·794	0·083
0·1500	2·42	0·066	0·1401	0·399	2·02	0·079
0·1952	4·12	0·058	0·1839	0·524	3·60	0·077
0·289	9·7	0·048	0·275	0·784	8·9	0·069

Tabelle V.

Verteilung der Salicylsäure zwischen 544 g Wasser u. 544 g Benzol.

$t = 18^0$.

c_2 in g	c_1 in g	m	$c_2(1-m)$	m'	c_1-m'	$\frac{m'^2}{c_1-m'}$
0·0363	0·0184	0·739	0·0095	—	—	—
0·0668	0·0504	0·626	0·0250	—	—	—
0·094	0·0977	0·563	0·0411	0·0863	0·0114	0·65
0·126	0·146	0·532	0·0590	0·124	0·022	0·70
0·210	0·329	0·446	0·1163	0·244	0·085	0·70
0·283	0·533	0·402	0·1693	0·354	0·179	0·70
0·558	1·65	0·307	0·387	0·813	0·84	0·79
0·756	2·81	0·271	0·551	1·16	1·65	0·81
0·912	4·34	0·251	0·683	1·43	2·91	0·70

Konstatieren wir zunächst, daß die Zahlen obiger Tabellen durchaus den erwarteten Verlauf zeigen; bei den drei höchsten Konzentrationen (die höchste ist in beiden Fällen der Sättigung nahe) nimmt der Ausdruck $\frac{c_2^2}{c_1}$ die Werte 0·0093, 92, 87 bei der Benzoesäure und 0·194, 0·203, 0·192 bei der Salicylsäure an; bei den größten Verdünnungen sind bei ersterem Stoffe c_2 und c_1 einander proportional, aber selbst nicht annähernd bei dem zweiten.

Behufs der genaueren Berechnung gehen wir am einfachsten von einer bestimmten Molekülgattung, etwa der normalen, aus. Bedeutet m den Grad der elektrolytischen Dissociation, so erhalten wir in dem Ausdruck $c_2(1-m)$ die Anzahl der normalen Moleküle im Wasser und nach unserem Gesetz muß dieser die entsprechende Größe für die Benzollösung proportional sein. Da elektrolytisch dissociierte Moleküle im Benzol jedenfalls nur in absolut verschwindender Anzahl vorkommen (ich überzeugte mich zum Ueberfluß, daß eine an Benzoesäure oder Salicylsäure gesättigte Benzollösung keine Spur elektrischer Leitfähigkeit zeigt) so erhält man durch Subtraktion der normalen Moleküle von der Gesamtmenge die Anzahl der im Benzol befindlichen Doppelmoleküle.

Der Dissociationsgrad [1]) m ist bekanntlich in seiner Abhängigkeit von dem Volumen v, in welchem eine g-Molekel gelöst ist, durch die Formel

$$\frac{m^2}{(1-m)v} = k$$

und demgemäß

$$m = \frac{kv}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{vk}}-1\right)$$

gegeben, worin k die Dissociationskonstante bedeutet. Für Benzoesäure und Salicylsäure besitzt nach Ostwald's Messungen [2]) k die Werte 0·000060 und 0·00102. Da ferner 122 und 138 die Molekulargewichte dieser beiden Substanzen betragen, so ergiebt sich für die Benzoesäure

$$m = \frac{0{\cdot}000366}{c_2}\left(\sqrt{1+\frac{c_2}{0{\cdot}000183}}-1\right)$$

und für die Salicylsäure

---

1) W. Ostwald, Zeitschrift f. phys. Chemie. 2, 270 (1888).
2) W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chemie. 3, 246 (1889).

$$m = \frac{0{\cdot}0383}{c_2}\left(\sqrt{1+\frac{c_2}{0{\cdot}0192}}-1\right).$$

Der Umstand, daß sich Ostwald's Zahlen auf eine etwas höhere Temperatur (25°) beziehen als die, welche bei unsern Messungen inne gehalten wurde, dürfte bei der geringen Veränderlichkeit von k mit der Temperatur[1]) nicht zu sehr ins Gewicht fallen. In Kolumne III und IV obiger Tabellen finden sich die mit Hülfe obiger Formeln für m und für $c_2(1-m)$, die Anzahl der normalen Moleküle im Wasser, berechneten Werte.

Den bei geringeren Konzentrationen gefundenen Werten entnehmen wir für den Teilungskoeffizienten des normalen Benzoesäure- bez. Salicylsäuremoleküls die Werte 2·85 und 2·1; durch Multiplikation dieser Zahlen mit $c_2(1-m)$ finden wir die Konzentration m' der normalen Moleküle und im Ausdruck $c_1 - m'$ demgemäß die Konzentration der Doppelmoleküle im Benzol. Diese Größen sind in Kolumne V und VI verzeichnet.

Hiermit sind wir nun in die Lage versetzt, eine für die Theorie der Lösungen wohl nicht ganz unwichtige Frage zu entscheiden. Wenn nämlich die in Benzollösung vor sich gehenden umkehrbaren Reaktionen

$$(C_6H_5COOH)_2 = C_6H_5COOH + C_6H_5COOH \quad \text{und}$$
$$(C_6H_4(OH)COOH)_2 = C_6H_4(OH)COOH + C_6H_4(OH)COOH$$

dem Gesetze der chemischen Massenwirkung folgen, so muß der Ausdruck $\frac{m'^2}{c_1 - m}$ von der Konzentration unabhängig sein, die gewöhnlichen Dissociationsgesetze bewahren mit anderen Worten auch dann ihre Gültigkeit, wenn der Zerfall des zusammengesetzteren Moleküls in die einfacheren in Lösung vor sich geht. Bekanntlich würde dies bei der in wässeriger Lösung sich abspielenden elektrolytischen Dissociation im Allgemeinen nicht der Fall sein, wenn das elektrische Leitungsvermögen ein exaktes Maaß für den Dissociationszustand darstellt, und nur bei den schwachen Säuren fand Ostwald einen, hier allerdings vorzüglichen Anschluß der Gleichung der Dissociationsisotherme an die Beobachtungen. Die Erledigung der Frage, ob die beobachteten Abweichungen ihre Erklärung in dem Umstande finden, daß für den Dissociationszustand das Leitungsvermögen kein genaues Maaß liefert, oder ob thatsächlich unsere Anschauungen über die Konstitution der Salze in wässeriger Lösung noch einer kleinen Korrektur bedürfen,

1) S. Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chemie. 4, 96 (1889).

scheint mir von größter Wichtigkeit zu sein, und um so lieber nahm ich denn hier die Gelegenheit war, auf einem gänzlich unabhängigen Wege eine Prüfung der Frage vorzunehmen, ob die in Lösung sich abspielenden Dissociationen durch die bekannten Gesetze geregelt werden oder nicht. Die Antwort fiel entschieden bejahend aus; denn wenn die in der letzten Kolumne von Tab. IV und V verzeichneten Werte für $\frac{c_1 - m'}{m'^2}$ auch nicht unbedeutende Schwankungen aufweisen, so spricht die Regellosigkeit derselben einerseits zweifellos dafür, daß sie mindestens zum großen Theil von den in obigen Werten außerordentlich stark hervortretenden Unsicherheiten der Messungen herrühren, und andrerseits wird, wenn man die im Verhältnis von etwa 1 zu 200 variierenden Gesamtkonzentrationen in Betracht zieht, die bei alledem zu Tage tretende Konstanz einigermaaßen überraschen.

Schließlich sei noch auf die große Veränderlichkeit des Teilungskoeffizienten mit der Konzentration hingewiesen; während bei großen Gehalten Benzoesäure sowohl wie Salicylsäure zum weitaus größten Teile an das Benzol abgegeben werden, geht letzterer Stoff bei den erreichten Verdünnungsgraden zum größeren Teile in das Wasser über und der Gang der Zahlen läßt kaum einen Zweifel darüber aufkommen, daß bei außerordentlich geringen Konzentrationen beide Säuren überhaupt nur zu einem verschwindenden Bruchteil an das Benzol abgegeben werden; die ganz exceptionelle Stellung gerade des Wassers als Lösungsmittels, welche sich in der Fähigkeit zeigt, die in ihm gelösten Stoffe elektrolytisch zu dissociieren und ihnen ungewöhnliche Reaktionsfähigkeit zu erteilen, erscheint hier in einem neuem Lichte. Hand in Hand mit obigen Eigenschaften geht das deutlich ausgesprochene Vermögen des Wassers, die letzten Teile gelöster Substanz fremden Lösungsmitteln gegenüber mit außerordentlicher Zähigkeit fest zu halten.

Inhalt von No. 12.
W. Nernst, über die Verteilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

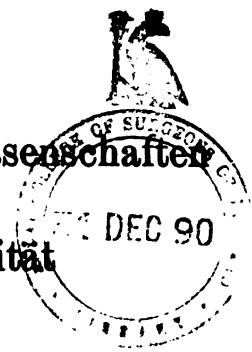
Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. November. **№ 13.** 1890.



Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. November.

Riecke legt von sich vor a. „Das thermische Potential für verdünnte Lösungen". b. „Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung." c. von den Herrn Privatdocenten P. Drude und W. Nernst „Ueber das Verhalten des Wismuth im Magnetfelde in seiner Abhängigkeit von der Temperatur und der molekularen Beschaffenheit".

Voigt legt vor a. von Herrn Privatdocenten P. Drude, „Ueber die Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte und die Konstitutionskonstanten der Plataux'schen Glycerin-Seifen-Lösung". b. von Herrn Privatdocenten W. Venske „Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$".

Klein legt von Herrn Franz Meyer, Prof. in Clausthal, vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen". Dritte Mittheilung. (Vgl. Sitzung vom 2. August d. J.)

Wüstenfeld legt für die Abhandlungen (Bd. 37) vor: „Die gelehrten Schâfi'iten des IV. Jahrhunderts d. H."

Wieseler legt „Einige Nachträge zu dem Aufsatze über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer" vor. (Nachr. 1890 S. 385 ff.)

de Lagarde legt vor a. „Die Inschrift von Aduli". b. „Das hebräische Wort gébhîm". c. „Der Fluß Orontes". d. „Die Stichometrie der syrisch-hexaplarischen Uebersetzung des alten Testaments". e. „Σισαρα".

F. Kielhorn legt vor: „Erklärung zweier Stellen des Kâvyâdarça.

Weiland legt für die Abhandlungen (Bd. 37) vor: „Beiträge zur Kritik der Chronik des Matthias von Neuenburg".

Kleine Mittheilungen.

Von

Paul de Lagarde.

Die Inschrift von Aduli.

Es war meine Absicht, mich in den goettingischen gelehrten Anzeigen ausführlich über Eduard Glasers Skizzen der Geschichte und Geographie Arabiens zu äußern.

Diese Absicht habe ich nicht ausführen können. Einmal nicht, weil die zum Urtheilen nöthigen Akten (die ich übrigens, soweit sie aus Inschriften bestehn, nur mit großer Vorsicht würde haben brauchen dürfen) nicht allein noch nicht vollständig, sondern sogar sehr unvollständig vorliegen. Zweitens nicht, weil aus der Beurtheilung, wenn sie hätte taugen sollen, ein Buch hätte werden müssen, nicht ein Heft.

Ich greife daher für unsere Nachrichten Einen der vielen Punkte heraus, die in einer Recension jener Skizzen zu erörtern gewesen wären — man wird sehen, daß es so ganz leicht nicht ist, Glasers Werk zu recensieren —, aber ehe ich an die Arbeit gehe, spreche ich Herrn Eduard Glaser, dem hocherfreulicher Weise die Philosophen Greifswalds den Doctorhut honoris causa aufgesetzt haben, auch öffentlich meine Bewunderung für den Muth, die Opferwilligkeit und die Umsicht aus, mit denen er in Arabien gereist ist, und den Wunsch, daß er noch lange Jahre mit gleichem Erfolge wie bisher, und weniger als bisher angefeindet, der Wissenschaft möge dienen können.

Es handelt sich für mich jetzt um einen zwischen EGlaser und ADillmann (Glaser, Skizzen 2 475 ff.) über die Inschrift von Aduli entbrannten Streit.

Aduli schreibe ich, weil die Griechen (siehe unten) einen Genetiv Ἀδούλεως brauchen, also Ἄδουλις gehört haben müssen. Daß Yâqût 3 623$_{15}$ âdaulay sprechen heißt, weiß ich: ebenso weiß ich, daß mein Lehrer Friedrich Rückert in seiner, Symmicta 1 198 ff. gedruckten, Uebersetzung der Muallaqa des Θarafa von *Schiffen von Adauli* redet. Adauli = Adôli wird sich zu Ἄδουλι-ς umgekehrt

verhalten wie Ἄξωμα zu dem nachmals im Lande üblichen Aksûm, und عدول wird mit dem in der Uebersicht 54₉ ff. besprochenen עֲדוּלִם zusammengehören.

Wer Aduli auf einer Karte aufsuchen will, bediene sich der englischen Admiralitätskarte[1]) „Red Sea, Sheet 4“, und suche südlich des jetzt viel genannten „Massaua“ (die Engländer schreiben Musawwa) die Annesley-Bay: an dieser — aber jetzt durch eine Stunde Sand von der See getrennt — lag und liegt Aduli, auf italienischem Gebiete.

In diesem Aduli fand sich einst eine von Ptolemaeus Euergetes und eine andere von einem eingeborenen, aber griechisch redenden, Könige gesetzte griechische Inschrift. Beide sind in der Urschrift verloren, aber der Anfang der ersten, das Ende der anderen ist in einem griechischen Werke des sechsten Jahrhunderts erhalten, durch einen Mann erhalten, der gar nicht merkte, daß er die Bruchstücke zweier durch viele Jahre von einander getrennten Titel vereinigte.

Dieser Mann heißt Κοσμᾶς ὁ Ἰνδικοπλεύστης, nicht, wie (meines Wissens ohne Vorlage) IBekker im Register zu Photius 556 schreibt, Ἰνδοπλεύστης: er schiffte ja nicht auf dem Ἰνδός, sondern auf dem ἰνδικὸν πέλαγος. Man sehe über ihn des IAFabricius bibliotheca graeca (Harles) 4 251 ff.

Von wem alles das in Rede stehende Monstrum von Inschrift abgedruckt ist (sogar unser Lohenstein hat es in seine Cleopatra aufgenommen), lerne man von Fabricius a. a. O. und von Boeckh CIG 3 5127. Das Buch des Cosmas, aus dem zuerst Leo Allatius die Inschrift herausfischte, ist vollständig von BdeMontfaucon in der Nova collectio patrum 2 im Jahre 1706 hinausgegeben worden. Eine neue Ausgabe thut dringend Noth: die ganze Cosmasfrage muß von Neuem aufgeworfen werden.

Daß August Boeckh nicht auf die Handschriften des Cosmas zurückgegangen ist, nimmt Wunder. Daß Herr August Dillmann es nicht gethan hat, nimmt nicht Wunder, da wer Abraham Berliners Onkelos als abschließende Meisterleistung feiern, wer die diplomatische Bezeugung des jüdischen Canons viâ ac ratione vor aller Exegese zu untersuchen für unnöthig, ja schädlich halten kann, offenbar andere Anschauungen von Kritik hegt, als seit Richard Bentley bei uns gewöhnlicheren Philologen verbreitet sind. Was ich 1882, mich auch auf FrField und FrDübner berufend, in meiner Ankündigung 50 über BdeMontfaucon geurtheilt habe, konnte der 1879

1) Zu kaufen bei JDPotter, 31 Poultry, London, und nicht theuer.

schreibende Herr Dillmann nicht gelesen, er würde es freilich auch wenn er es gelesen hätte, mit der allen meinen Arbeiten gegenüber bei ihm üblichen grimmen Unlust bei Seite geschoben haben. EGlaser war als Astronom nicht verbunden die Methode der Philologie und den Ruf Montfaucons zu kennen.

Was Herr August Dillmann zu thun für unnütz erachtet hat, habe ich jüngst gethan: mich um die Handschriften des Cosmas gekümmert.

Vaticanus graecus 699, wirklich quadratus, in zwei Spalten auf der Seite beschrieben, mit Bildern geziert, deren Farben starken Schaden gelitten haben, enthält auf Blatt $13^{3}{}_{5}$ bis Blatt $14^{1}{}_{19}$ die in Rede stehende Inschrift, soweit sie mich angeht. Die Accente sind zu der späten Unciale noch später zugesetzt: ich nehme auf sie so wenig Rücksicht wie auf die werthlosen und zum Theil selbstverständlichen Aenderungen des mit dem Accentuierenden wohl identischen Correctors: einiges Wenige, was ich gebe, schien nothwendig. Was ich mit Cursiva habe drucken heißen, steht 4 27—29 32/33 35 40—43, ausdrücklich als παραγραφη bezeichnet, im Texte, hingegen 10/11 16 21/22 von der Hand des Textes am Rande: wo sich im Texte παραγραφη findet, hören die Obelen auf, durch welche die Inschrift vor der Zeile als Citat bezeichnet wird. Die Anmerkungen, die als wirkliche παραγραφαι am Rande erscheinen, sind durch dasselbe QuecksilberRoth, mit dem vom Schreiber selbst παραγραφη geschrieben wird, sicher in den Text eingewiesen.

Florentinus der Laurentiana IX 28, Blatt $39^{1}{}_{11}$ bis $40^{3}{}_{2}$. Bandini ist leicht einzusehen. Angeblich aus dem zehnten Jahrhundert.

Der Wiener Codex kommt nicht in Betracht, da das kleine Stück über das schon Lambeck 3 9 handelte, wie bereits Montfaucon berichtet hat, nur wenige Seiten umfaßt, und (was Montfaucon nicht gemeldet) die Inschrift von Aduli nicht enthält. Ich wandte mich mit der Bitte zu helfen an WvHartel, der seinen Schüler, Herrn Doctor Rudolf Beer, mit allem Weiteren betraute. Ich bin dem Herrn von Hartel wie Herrn Doctor Beer zu warmem Danke für ihre Unterstützung verpflichtet. Herr Rudolf Beer schrieb an Hartel:

> Ich habe mir den Codex, heute Theol. graec. 230, kommen lassen und folgendes gefunden.
>
> Nach dem von Lambeck und Nessel mitgetheilten Titel folgt noch der von ihnen ausgelassene Zusatz μερικά· μᾶλλον δὲ πρὸς τὸν ἕξω; also jedenfalls Bruchstücke, schon vom Abschreiber so gekennzeichnet. Die ersten Worte πρῶτον μὲν οὖν stimmen nicht mit dem Anfang; sie finden sich Montfaucon p. 117D; dann geht der Text der Hds weiter bis

fol 32ᵃ τὰ πάντα οὐκ ἔστι (Montfaucon 124 B Anfang) und mit der Schlußnotiz τέλος τὰ περὶ τούτου.

Die zweite Abtheilung beginnt gleich darauf mit den Worten: λέγει τοίνυν ὁ θεῖος κοσμογράφος Μωϋσῆς (Montfaucon p. 126 A Ende) und geht — mit einigen Auslassungen — fort bis fol 34ᵃ (Montfauc. p. 130 B Ende) διηγοῦνται τὴν δόξαν θεοῦ mit einigen wenigen Zeilen, einem Appendix über ein erklärendes Schema.

Da nun der Text der Urschrift bei Montfaucon p. 141 beginnt, so ergibt sich klar, daß unsere Handschrift den gewünschten Text nicht enthält, beziehungsweise nicht so weit reicht.

Natürlich kam für eine von Cosmas mitgetheilte Urkunde der Styl des Cosmas nicht in Betracht: wohl aber kamen die παραγραφαὶ und σχόλια für mich in Betracht, die Cosmas in seinem Buche bietet. Ich habe, so lange ich auch Montfaucons nova collectio besitze und benutze, über diese παραγραφαὶ und σχόλια Studien nicht gemacht, weil ich sie ohne die Handschriften verglichen zu haben, nicht machen konnte. An diesem Punkte bin ich also verwundbar.

Ich theile zunächst den Text des Vaticanus [R] so wie er von der ersten Hand geschrieben ist, mit, und lege ihm die Varianten des Laurentianus [F] unter. Danach werde ich die Urschrift hergestellt geben, mit richtiger Eintheilung, und werde Erläuterungen beifügen, die für Dillmann gegen Glaser entscheiden. Auf Geographisches darf ich mich nicht einlassen: mir fehlt die Muße, mich ausreichend zu orientieren.

1 μεθ' ἃ ἀνδριώσας τὰ μὲν ἔγγιστα τοῦ βασιλείου ἔθνη εἰρηνεύεσθαι κελεύσας, ἐπολέμησα καὶ ὑπέταξα μάχαις τὰ ὑπογεγραμμένα ἔθνη. Γαζη ἔθνος ἐπολέμησα, ἔπιτα Αγαμε καὶ Σιγυηνε νικήσας, τὴν ἡμίσιαν πάν-

---

1 ἀνδρειώσας F

1 nach βασιλείου + μου F

2 zu γαζη hat die erste Hand in F später ein σ hinzugefügt. am rechts beschnittenen Rande hat F σχόλιον· γάζην λέγει τοὺς [ά]ξωμίτας ἄχρι [γὰρ καὶ] τοῦ νῦν ἀγάζη αὐτοὺς ὀνομά[ζου]σι

3 ἔθνη F

3 ἔπειτα F

3 αγαμη und dem vielleicht später ein ν nachgefügt F: mich däuchte (an einem dunkelen Morgen, an dem mir das Licht von zwei Seiten einfiel) das η dieses Worts auf einer Rasur zu stehn

3 σιγύην ἐνίκησα F. Zu seinem σιγύην hat F unmittelbar hinter dem zu 2 angeführten σχόλιον, aber mit eigenem Verweisungszeichen, am rechts beschnittenen Rande, σιγύην ** [**] σουσκινῖτα [***] καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτῶν ἔθνη

3 ἡμίσειαν F

3/4 παντων bis αυα Rs ersetzt F durch τῶν παρ' αὐτοῖς πάντων καὶ αὐτῶν ἐμερισάμην ἄυα

των τῶν παρ' αὐτοῖς καὶ αυν ἐμερησαμ... Ασα *Τιαμα, τοὺς λεγομένους Τζιαμω, καὶ τοὺς Γαμβελα καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτοῦ λέγει ἔθνη τὰ πέραν τοῦ Νείλου* καὶ Ζινγαβηνε καὶ Αγγαβε καὶ Τιαμαα καὶ Αθαγαους καὶ Καλαα καὶ Σαμινε ἔθνος πέραν τοῦ Νείλου ἐν δυσβάτοις καὶ χιο[illegible]νώδεσι ὄρεσι οἰκοῦντας, ἐν οἷς διὰ παντὸς νιφετοὶ καὶ κρύη καὶ χιόνες βαθιαι, ὡς μέχρι γονάτων καταδύειν τὸν ἄνδρα, τὸν ποταμὸν διαβὰς ὑπέταξα. ἔπιτα Λασινε καὶ Ζαα καὶ Γαβαλα [τα]υτα ἔθνη [ἕω]ς τῆς σήμε[ρον] οὕτως καλοῦνται οἰκοῦντας παρ' ὄρεσι θερμῶν ὑδάτων βλύοντι καὶ καταρύτω, Αταλμω καὶ Βεγα καὶ τὰ σὺν αὐτοῖς ἔθνη πάντα. Ταγγαιτῶν τὰ μέχρι τῶν τῆς Αἰγύπτου ὁρίων οἰκοῦντας ὑποτάξας πεζεύεσθαι ἐποίησα τὴν ὁδὸν ἀπὸ τῶν τῆς ἐμῆς βασιλίας τόπων μέχρι

---

4 αυν von R^{c} zu αυτων ergänzt, αὐτῶν F

4 R^{c} hat η von εμερησαμ zu ι radiert, und leider das Ende dieses Wortes so verschmiert, daß ich weder was Er gewollt noch was R geschrieben, entziffern kann. R^{c}s Accentuierung weist auf ἐμερισάμην, das F wirklich bietet

4—6 die παραγραφὴ hat F im Texte

4 τιαμα R, καὶ τιαμῶ F

5 F betont τζιαμῶ und γαμβελά

5 αὐτῶν F

6 ζιγγαβηνε F

6 zu αγγαβε hat am Rande F σχόλιον τὰ ἐγγὺς ἀδούλ λέγει ἔθνη τῶν τιγρητανῶν, wo der Name der Stadt am unteren rechten Ende des λ den bekannten Strich, und über dem λ eine mir unlesbare Abkürzung darbietet

6 τιαμα F

7 σεμῆναι F

7/8 χιονώδεσιν ὄρεσιν F

7 möglich daß die Rasur Rs den rechten Schenkel eines ω vertilgte: mir geht sie dafür allerdings zu tief nach unten: ο ist aus etwas Anderem hergestellt

9 βαθύτατοι [so] F

9 καταδύνειν ohne folgendes τὸν F

10 ἔπειτα F

10 das Verweisungszeichen in R schon bei λασινε. Der Rand links beschnitten: was ich ergänze, steht zwischen []. ταῦτα ἔθνη könnte sich hier finden, wie es sich 33 wirklich findet: vergleiche zu 23, aber auch 45. Die Beischrift 10/11 fehlt in F

11 ὄρεσι klar die Hdss. Wir brauchen einen Singular, da βλυοντι und καταρυτω folgt. Da der Mann 44 46 Ἄρεει schreibt, traue ich ihm hier ὄρεει zu

11/12 βλύζουσι F, aber ζουσ von erster Hand auf Rasur

12 natürlich leistet R^{c} καταρρυτω. καταρρύτοις F, aber ο halb, ισ ganz, von erster Hand auf Rasur

12 zu αταλμῶ an dem links beschnittenen Rande F [το]ὺσ βλέμμυασ [•] ωσὶχ καλοῦσιν οἱ ἀιθίοπεσ: ταγ[γαῖτα]σ καλεῖ τοὺσ ατια••' καὶ τοὺσ ἀδρα••σ:—, wo das τι von ἀτια *mir* nicht sicher ist

13 .τ.αγγαῖτασ (das umpunktierte τ steht in der Hds. dicht am α) F, dessen Akut jünger als der Text ist, während der rechte Theil des letzten α und das ganze σ von erster Hand auf Rasur stehn

13 statt τὰ F jetzt τοὺσ, indem aus ο ein ε hergestellt ist. Der rechts unten liegende Theil des σ ist von erster Hand. Der über σ stehende Gravis ist jung. Vermuthlich stand zuerst τῶν da

13/14 ich merke an, daß auf dem Bilderblatte, das vor 13 vorhergeht, αιθιοπες πεζευοντες abgebildet sind: ein kupferfarbiger Mann, der über der linken Schulter einen Stab trägt, und am hinteren Ende des Stabes hangend, eine Last

14 βασιλείασ F

14 zu μέχρι fügte man in F später (nicht das in F meist auch am Schlusse der Wörter verwandte σ, sondern) c hinzu

Αἰγύπτου. ἔπιτα Αννηνε καὶ Μετινε ἐν ἀποκρίμνοις οἰκοῦντας ὄρεσι. Σεσεα [τ]ὰ τῆς *Βαρβα[ρ]ίας ἔθνη ἐνταῦθα δηλοῖ* ἔθνος ἐπολέμισα, οὓς καὶ μέγιστον καὶ δυσβατότατον ὄρος ἀνελθόντας περιφρουρήσας κατήγαγον καὶ ἀπελεξάμην ἐμαυτῷ τούς τε νέους αὐτῶν καὶ γυναῖκας καὶ παῖδας καὶ παρθένους καὶ πᾶσαν τὴν ὑπάρχουσαν αὐτοῖς κτισιν Ραυσῶ ἔθνη μεσόγια λιβανοτοφόρων βαρβάρων οἰκοῦντα ἐντὸς παιδίων μεγάλων ἀνύδρων. καὶ Σολατε *Σολατε λεγόμενοι αι οι ποροθ οι ἐπὶ τὴν Βαρβαρίαν* ἔθνος ὑπέταξα, οἷς καὶ τοὺς αἰγιαλοὺς τῆς θαλάσσης φυλάσσειν ἐκέλευσα. ταῦτα δὲ πάντα τὰ ἔθνη ὄρεσι ἰσχυροῖς πεφρουρημένα αὐτὸς ἐγὼ ἐν ταῖς μάχαις παρὼν νικήσας καὶ ὑποτάξας, ἐχαρισάμην αὐτοῖς πάσας τὰς χώρας ἐπὶ φόροις. ἄλλα δὲ πλιστα ἔθνη ἑκόντα ὑπετάγη μοι ἐπὶ φόροις. καὶ πέραν δὲ τῆς ἐρυθρᾶς θαλάσσης οἰκοῦντας Ἀρραβίτας καὶ Κινεδοκολπίτας *Ἀρραβίτας καὶ Κιναιδοκολπίτας τοὺς εἰς τὸν Ὁμηρίτην σημαίνει, τοῦτ' ἐστὶ τοῖς ἐν τῇ εὐδαίμονι Ἀραβίᾳ*, στράτευμα ναυτικὸν καὶ πεζικὸν διαπεμψάμενος καὶ ὑποτάξας

---

15 ἔπειτα F

15 ἀννίνε F. dazu am links beschnittenen Rande [ἀννίνε] καὶ μετίνε: ἔ[τι καὶ] νῦν ταῦτα τὰ ἔ[θνη ο]ὕτω καλοῦνται: —, wo ἔ der Hds. gegen meine Ergänzung nichts beweist: vergleiche ἑτυμολογία = ἑτοιμολογία GHoffmann ZDMG 32 736

15 ἀποκρήμνοις F

15 ὄρεσιν F

16 die Randschrift Rs links vom Buchbinder beschnitten: die Randschrift fehlt in F

16 ἐπολέμησα F

17 δυσβατώτατον F

18 ά von ἀπελεξάμην von R^{c}, der am rechten Ende der Columne seine Auffrischungskünste getrieben hat. ἐπελεξάμην F

19 κτῆσιν· F

19 ῥαυσῶν F. dazu am links beschnittenen Rande [τὰ] τῆσ βαρβαρίασ ἔ[θν]η λέγει, worin das erste βαρ von βαρβαρίασ, nicht von erster Hand, über der Zeile

20 μεσόγεια F

20 λειβανωτοφόρων F^{1}, λιβανωτοφόρων F^{2}

20 οἰκοῦντασ ἐντὸσ πεδίων μεγίστων F

21 σωλάτε F. dazu am links beschnittenen Rande [σ]ωλάτε γὰρ, τοὺσ [κατὰ τ]ὴν βαρβαρίαν [τιγ]ρῆτασ τοὺσ πα[ραλ]ίουσ λέγει. die erste Zeile des Scholion war als erste eingezogen, daher nur Ein Buchstab ergänzt zu werden braucht. τιγ in τιγρῆτας und ραλ in παραλίουσ ist durch die zu 23 folgende Glosse sicher

21/22 die Glosse Rs fehlt in F. Sie steht am oberen Rande des Blatts, und ist sehr verblichen

21 ποροθ könnte πορεθ gelesen werden

23 zu ἐκέλευσα am unteren Rande Fs die Glosse μέχρι τοῦ νῦν ὅλοι οἱ τιγρῆται, τὰ παράλια οἰκοῦσι μέρη. ἀπὸ ἀδούλ/ [über λ noch ein Abkürzungszeichen, das ich, da darum umherradiert ist, nicht aufzulösen verstehe] μέχρι τῶν τῆσ βαρβαρίασ τόπων

23 τὰ R am ZeilenEnde: vielleicht Zusatz R^{c}s

23 ὄρεσιν F

25 πλεῖστα F

27 das andere ρ im ersten ἀρραβίτασ in F (vielleicht, aber kaum, von erster Hand) über der Zeile. Dazu am rechts beschnittenen Rande ἀραβίτασ (ein anderes ρ hinzugeschrieben) ἐντ[αῦθα] τοὺσ ὁμηρίτασ [κα]λεῖ: καὶ κιναιδοκ[ολπ(]τασ, τοὺσ παρ' ἅλ[λοισ] ἀδανίτασ καλ[ουμένουσ]

27 Mitte κιναιδοκολπίτασ F

27—29 die Beischrift fehlt in F

28 τοις am ZeilenEnde in R^{c}s Hand R

αὐτῶν τοὺς βασιλέας, φόρους τῆς γῆς τελεῖν ἐκέλευσα καὶ ὁδεύεσθαι μετ' εἰρήνης καὶ πλέεσθαι ἀπό τε λευκῆς κώμης ἕως τῶν Σαβαίων χώρας ἐπολέμησα *εἰς τὰ μέρη τῶν Βλεμμύων ἐστὶν κώμη καλουμένη τὸ Λευκογην.* πάντα δὲ ταῦτα ἔθνη πρῶτος καὶ μόνος βασιλέων τῶν πρὸ ἐμοῦ ὑπέταξα, δι' ἣν ἔχω πρὸς τὸν μέγιστον θεόν μου Ἄρην εὐχαριστείαν *Σαβαίων χώρα πάλιν εἰς τὸν Ὁμηρίτην ἐστίν* ὃς με καὶ ἐγέννησε, δι' οὗ πάντα τὰ ἔθνη τὰ ὁμοροῦντα τῇ ἐμῇ γῇ ἀπὸ μὲν ἀνατολῆς μέχρι τῆς λιβανοτοφόρου, ἀπὸ δὲ δύσεως μέχρι τῶν τῆς Αἰθιοπίας καὶ Σασσου τόπων ὑπ' ἐμαυτὸν ἐποιησα..εν αὐτὸς ἐγὼ ἐλθὼν καὶ νικήσας, ἃ δὲ διαπεμπόμενος, καὶ ἐν εἰρήνῃ καταστήσας πάντα τὸν ὑπ' ἐμοὶ κόσμον *αὕτη ἡ Σασου χώρα ὑστάτη ἐστὶν τῶν Αἰθιόπων, ἔνθα καὶ πολὺ χρυσίον ἐστὶν τὸ λεγόμενον ταγχαρας. ἐπέκεινα δὲ ταύτης ὁ ὠκεανὸς παράκειται, ὥσπερ καὶ τῶν Βαρβαρεωτῶν τῶν καὶ τὸν λίβανον ἐμπορευομένων,* κατῆλθον εἰς τὴν Αδουλι τῷ Διΐ καὶ τῷ Ἄρεσι καὶ τῷ Ποσιδῶνι ὑσιάσαι ὑπὲρ τῶν πλοϊζομένων. ἀθρύσας δέ μου τὰ στρατεύματα καὶ ἐφ' ἓν ποιήσας ἐπὶ τούτῳ τῷ τόπῳ, καθήσας τόνδε τὸν δίφρον παρεθήκην τῷ Ἄρεσι ἐποίησα, ἔτι τῆς ἐμῆς βασιλείας κζ.

---

31 κόμησ F. zu λευκῆσ κόμησ F am rechts beschnittenen Rande λευκ]ὴν κόμην κ[αλεῖ] τὸ λεγόμενον λευ[••••] ἐπὶ τὰ μέρη τῶν β[λεμ.]μύων, ὃν παρὰ θ[άλασσαν]

31 σαβέων F. dazu am rechts beschnittenen Rande σαβέων χωραυ•• τὸν ὁμηρίτην. ich kann nur υ, nicht ν, lesen

32/33 die Beischrift fehlt in F

33 nach ταῦτα + τὰ F

34 πρὸς > F

35 εὐχαριστείαν auch F¹, ἐυχαριστίαν F²

35 die Glosse fehlt in F

36 zu ἀπὸ F am rechts beschnittenen Rande σάσου καὶ λιβανω[το]φόρον καλεῖ, τὰσ τῶν ἀιθιόπων χώρα[σ] μησάσου, εἰσ νό[τον] καὶ δύσιν κειμένη[ν] τὴν δὲ βαρβαρ[ίαν] εἰσ νότον καὶ ἀνατ[ολὴν] κειμένην· βαρ[βαρία] δέ ἐστιν, ἡ τὸν λίβα[νον] ποιοῦσα γῆ· ἡ δ[ὲ] σάσου χώρα, ὑστ[άτη] ἐστὶ τῶν ἀιθιόπων. ἔνθ[α καὶ] πολὺ χρυσίον ἐστὶ τ[ὸ λε]γόμενον τάγχαρας. [ἐπέ]κεινα δὲ ταύτησ [ὁ ὠ]κεανὸσ παράκειται. ὥσ[περ] καὶ τῶν βαρβαρεωτῶν [τῶν] τὸν λίβανον ἐμπορευομένων. Man sieht, daß die Ergänzungen nicht gleich groß sind: man wird sich auf die Nothwendigkeit, kleine Aenderungen aus einer vollständigen Hds. aufnehmen zu müssen, gefaßt zu halten haben. Die Worte τὸν λίβανον ἐμπορευομένων stehn nicht zur Seite, sondern unter der Kolumne

37 beide Male μέχρι F

37 λιβανωτοφόρου F

38 μην von εποιησαμην R^c^s jetzt verschmiert: vier Buchstaben sind in R dagewesen, vor ν jedenfalls ein ε. was R gehabt hat, das hat F noch heute, und druckte aus F Montfaucon, nämlich ἐποίησα ἃ μὲν

40—43 das kursiv Gedruckte fehlt in F

43 ἀδουλὴν F, in dem der Accent jetzt radiert ist

43 αδουλι von R^c in αδουλη geändert

44 ἄρεϊ F

44 ποσειδῶνι F

44 ο von πλοϊζομένων in F auf Rasur: war wohl einst ω

44 ἀθροίσασ F

45 ὑφ' F

45 καθίσασ F

46 ἄρεϊ F

46 ἔτι auch F¹: ἔτει F², in dem ει auf Rasur steht

47 ἑικοστῶ ἑβδόμω F (ohne ι adscr), wo ἑβδόμω alt auf Rasur

Ich heiße nunmehr die Inschrift in der Gestalt wiederholen, in der sie modernen Gelehrten, die wenigstens noch ein griechisches Wörterbuch zu benutzen verstehn, verständlich sein wird.

A 1 *μεϑ' ἃ ἀνδρειώσας,*

2 *τὰ μὲν ἐγγύτατα τοῦ βασιλείου μου ἔϑνη εἰρηνεύεσϑαι κελεύσας,*

3 *ἐπολέμησα, καὶ ὑπέταξα μάχαις, τὰ ὑπογεγραμμένα ἔϑνη.*

[1]*Γάζη*[a] *ἔϑνη ἐπολέμησα.*

[2]*Ἔπειτα Αγαμε καὶ Σιγυηνε*[b] *νικήσας, τὴν ἡμίσειαν πάντων τῶν παρ' αὐτοῖς καὶ αὐτῶν ἐμερισάμην.*

[3]*Αυα καὶ Ζαγαβηνε καὶ Λαγαβε*[c] *καὶ Τιαμα*[d] *καὶ Αϑαγαους καὶ Καλαα καὶ Σαμινε, ἔϑνος πέραν τοῦ Νείλου ἐν δυσβάτοις καὶ χιονώδεσι ὄρεσι οἰκοῦντας, ἐν οἷς διὰ παντὸς νιφετοὶ καὶ κρύη καὶ χιόνες βαϑεῖαι, ὡς μέχρι γονάτων καταδύειν τὸν ἄνδρα, τὸν ποταμὸν διαβὰς ὑπέταξα.*

[4]*Ἔπειτα Λασινε*[e] *καὶ Ζαα καὶ Γαβαλα, οἰκοῦντας παρ' ὄρεει ϑερμῶν ὑδάτων βλύοντι καὶ καταρύτῳ,*

[5]*Αταλμω καὶ Βεγα καὶ τὰ ὄν αὐτοῖς ἔϑνη πάντα.*

[6]*Ταγγαϊτῶν τὰ μέχρι τῶν τῆς Αἰγύπτου ὁρίων οἰκοῦντας ὑποτάξας, πεζεύεσϑαι ἐποίησα τὴν ὁδὸν ἀπὸ τῶν τῆς βασιλείας τόπων μέχρι Αἰγύπτου.*

[7]*Ἔπειτα Αννινε*[f] *καὶ Μετινε ἐν ἀπορρήμνοις οἰκοῦντας ὄρεσι.*

[8]*Σεσεα ἔϑνος ἐπολέμησα, οὓς καὶ μέγιστον καὶ δυσβατώτατον ὄρος ἀνελϑόντας περιφρουρήσας κατήγαγον, καὶ ἐπελεξάμην ἐμαυτῷ τούς τε νέους αὐτῶν καὶ γυναῖκας καὶ παῖδας καὶ παρϑένους καὶ πᾶσαν τὴν ὑπάρχουσαν αὐτοῖς κτῆσιν.*

[9]*Ραυσων*[g] *ἔϑνη, μεσόγεια λιβανωτοφόρων βαρβάρων οἰκοῦντα ἐντὸς πεδίων μεγάλων ἀνύδρων, καὶ Σολατε*[h] *ἔϑνος ὑπέταξα, οἷς καὶ τοὺς αἰγιαλοὺς τῆς ϑαλάσσης φυλάσσειν ἐκέλευσα*[i].

---

a Γάζη λέγει τοὺς Ἀξωμίτας· ἄχρι γὰρ καὶ νῦν Ἀγάζη αὐτοὺς ὀνομάζουσι. Der Scholiast weiß sich also der Zeit nach von dem schreibenden Könige unterschieden. Cosmas selbst glaubte Sätze des Ptolemaeus Euergetes zu lesen. Ag:âzî, Dillmann WB 1189

b das Scholion zu Σιγυηνε ist (wenigstens von mir) nicht herstellbar: siehe oben

c τὰ ἐγγὺς Ἀδούλεως λέγει ἔϑνη τῶν Τιγρητανῶν

d Τιαμα τοὺς λεγομένους Τζιαμῶ καὶ τοὺς Γαμβελὰ καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτῶν λέγει ἔϑνη τὰ πέραν τοῦ Νείλου. Aethiopisch geschrieben Çeyâm auf der Inschrift von Aksûm: Dillmann, die Anfänge des axumitischen Reichs 196. طغار räth mir, Genesis 10_{30} טפר herzustellen, Mittheilungen 2 26

e ταῦτα τὰ ἔϑνη ἕως τῆς σήμερον οὕτω καλοῦνται

f ἔτι καὶ νῦν ταῦτα τὰ ἔϑνη οὕτω καλοῦνται

g τὰ τῆς Βαρβαρίας ἔϑνη λέγει

h Σωλάτε γὰρ τοὺς κατὰ τὴν Βαρβαρίαν Τιγρῆτας τοὺς παραλίους λέγει F. Rs Glosse sehe man oben im Texte: sie ist zum Theil unleserlich, aber auch sie sucht ihre Σολατε in der Βαρβαρία

i μέχρι τοῦ νῦν ὅλοι οἱ Τιγρῆται τὰ παράλια οἰκοῦσι μέρη ἀπὸ Ἀδούλεως μέχρι τῶν τῆς Βαρβαρίας τόπων

4 ταῦτα δὲ πάντα τὰ ἔθνη ὄρεσι ἰσχυροῖς πεφρουρημένα αὐτὸς ἐγὼ ἐν ταῖς μάχαις παρὼν νικήσας καὶ ὑποτάξας, ἐχαρισάμην αὐτοῖς πάσας τὰς χώρας ἐπὶ φόροις.

5 ἄλλα δὲ πλεῖστα ἔθνη ἐκόντα ὑπετάγη μοι ἐπὶ φόροις.

B Καὶ πέραν δὲ τῆς ἐρυθρᾶς θαλάσσης οἰκοῦντας Ἀραβίτας[k] καὶ Κιναιδοκολπίτας στράτευμα ναυτικὸν καὶ πεζικὸν διαπεμψάμενος, καὶ ὑποτάξας αὐτῶν τοὺς βασιλέας, φόρους τῆς γῆς τελεῖν ἐκέλευσα, καὶ ὁδεύεσθαι μετ' εἰρήνης καὶ πλέεσθαι ἀπό τε Λευκῆς κώμης[l] ἕως τῶν Σαβαίων[m] χώρας ἐπολέμησα.

C Πάντα δὲ ταῦτα τὰ ἔθνη πρῶτος καὶ μόνος βασιλέων τῶν πρὸ ἐμοῦ ὑπέταξα δι' ἣν ἔχω πρὸς τὸν μέγιστον θεόν μου Ἄρην εὐχαριστίαν, ὃς με καὶ ἐγέννησε, δι' οὗ πάντα τὰ ἔθνη τὰ ὁμοροῦντα τῇ ἐμῇ γῇ ἀπὸ μὲν ἀνατολῆς μέχρι τῆς λιβανωτοφόρου, ἀπὸ δὲ δύσεως μέχρι τῶν τῆς Αἰθιοπίας καὶ Σάσου[n] τόπων ὑπ' ἐμαυτὸν ἐποίησα, ἃ μὲν αὐτὸς ἐγὼ ἐλθὼν καὶ νικήσας, ἃ δὲ διαπεμπόμενος.

D Καὶ ἐν εἰρήνῃ καταστήσας πάντα τὸν ὑπ' ἐμοὶ κόσμον, κατῆλθον εἰς τὴν Ἀδουλι, τῷ Διῒ καὶ τῷ Ἄρεϊ καὶ τῷ Ποσειδῶνι θυσιάσαι ὑπὲρ τῶν πλωϊζομένων.

ἀθροίσας δέ μου τὰ στρατεύματα καὶ ὑφ' ἓν ποιήσας ἐπὶ τούτῳ τῷ τόπῳ, καθίσας τόνδε τὸν δίφρον παρεθήκην τῷ Ἄρεϊ ἐποίησα

ἔτει τῆς ἐμῆς βασιλείας κβ.

---

k Ἀραβίτας ἐνταῦθα τοὺς Ὁμηρίτας καλεῖ, καὶ Κιναιδοκολπίτας τοὺς παρ' ἄλλοις Ἀδανίτας καλουμένους F. Ἀραβίτας καὶ Κιναιδοκολπίτας τοὺς εἰς τὸν Ὁμηρίτην σημαίνει, τοῦτ' ἐστὶ τοὺς ἐν τῇ εὐδαίμονι Ἀραβίᾳ R

l λευκὴν κώμην καλεῖ τὸ λεγόμενον Λευ•••• ἐπὶ τὰ μέρη τῶν Βλεμμύων ὂν παρὰ θάλασσαν F. Da die Blemmyer ohne Frage in Afrika wohnen, und Ḥaurâ ohne Frage in Arabien liegt, kann der Satz des Scholiasten nur bedeuten, Ḥaurâ liege der Stelle der africanischen Küste gegenüber, an der die Blemmyer sitzen. Εἰς τὰ μέρη τῶν Βλεμμύων ἐστὶν κώμη καλουμένη τὸ Λευκογην R

m Σαβαίων χώρα πάλιν εἰς τὸν Ὁμηρίτην ἐστίν R. über F siehe zu Zeile 31

n ἡ Σάσου χώρα ὑστάτη ἐστὶν τῶν Αἰθιόπων, ἔνθα καὶ πολὺ χρυσίον ἐστὶν τὸ λεγόμενον ταγχαρας. ἐπέκεινα δὲ ταύτης ὁ ὠκεανὸς παράκειται, ὥσπερ καὶ τῶν Βαρβαρεωτῶν τῶν καὶ τὸν λίβανον ἐμπορευομένων R. F Σάσου καὶ λιβανωτοφόρον καλεῖ τὰς τῶν Αἰθιόπων χώρας. καὶ τὴν μὲν Σάσου εἰς νότον καὶ δύσιν κειμένην, τὴν δὲ Βαρβαρίαν εἰς νότον καὶ ἀνατολὴν κειμένην. Βαρβαρία δὲ ἐστὶν ἡ τὸν λίβανον ποιοῦσα γῆ. ἡ δὲ Σάσου χώρα ὑστάτη ἐστὶ τῶν Αἰθιόπων, ἔνθα καὶ πολὺ χρυσίον ἐστὶ τὸ λεγόμενον ταγχαρας. ἐπέκεινα δὲ ταύτης ὁ ὠκεανὸς παράκειται, ὥσπερ καὶ τῶν Βαρβαρεώτων τῶν τὸν λίβανον ἐμπορευομένων. Ueber ταγχαρας vergleiche man was ich 1856 aus MVdeLaCrozes armenischem Wörterbuche in meinen Reliquiae iuris ecclesiastici antiquissimi graece ix x mitgetheilt und selbst gesammelt habe, ferner meine 1866 erschienenen gesammelten Abhandlungen 227_{18} ff., CHaeberlins Schrift de carminibus Graecorum figuratis und die eben erschienenen Nachträge zu derselben im Philologus von 1890 Seite 279 wegen der dort gegebenen Nachweise. ADillmann, über die Anfänge des axumitischen Reichs 200, hätte ausschreiben sollen, was er aus Cosmas [139⁴] citiert χρυσίον ὡς θέρμια τὸ λεγόμενον ταγχάραν [Accusativ].

Der Barbarenfürst hat seine Inschrift, wie man nunmehr wohl zugeben wird, gut disponiert. Da manche Zeitgenossen die Disposition bisher noch nicht begriffen haben, wird es nützlich sein, außer durch die durch die Art meines Satzes gegebenen Hülfsmittel noch durch »adminiculierendes Beiwerk« den Gedanken des afrikanischen Königs Verständnis zu schaffen.

Wenn bei B mit καὶ — δὲ Arabien auftritt, so ist vor B von Arabien nicht die Rede. Folglich wohnen alle in A vorkommenden Völker in Africa. In C nennt unser König zuerst die von Osten bis zum Weihrauchlande, dann die vom Westen bis nach Aethiopien und dem Lande Σάσου an sein Stammgebiet grenzenden Völker. Da ich nicht weiß, wie weit seine Majestät Griechisch verstanden hat, möchte ich aus der von ihr zweimal angewandten Phrase ἀπὸ—μέχρι nichts schließen. Hier werden die Geographen uns das Griechische verstehn lehren müssen, nicht wird das Griechische der Inschrift Aufschluß über Probleme der Geographie geben. Der Usurpator gieng vom Binnenlande aus. Die λιβανωτοφόροι βάρβαροι, von denen die Inschrift redet, wohnten in Africa: Kenner der Pflanzengeographie und der Botanik müssen sagen wo dort die Weihrauchstaude vorkommt: dann werden wir auch wissen wo die A 3₉ genannten Ραυσοι gewohnt haben. Ich habe zu meiner Belehrung nur AErmans »Aegypten und aegyptisches Leben« 659 ff., Jacob Kralls Schrift über das Land Punt (Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, historisch-philologische Klasse 1890) und JLiebleins Aufsatz »der Handel des Landes Pun« ZAegSpr **24** 7 ff. zur Verfügung: HBrugsch ebenda **20** 33.

Durch das Land der Ταγγαῖται hindurch sicherte sich der König eine von seinem Stammgebiete nach Aegypten führende Karawanenstraße, auf der man [durch Neger] Lasten tragen lassen konnte (A 3₆): er sicherte den Waaren in Arabien von Λευκὴ κώμη = alḤaurâ (bei dem die Ἀραβῖται gesucht werden müssen) bis Adan (wo nach der Glosse und nach dem Zusammenhange die Κιναιδοκολπῖται zu suchen sind) den Durchzug, und sicherte ihnen Fahrt auf dem mit dem Landwege parallel laufenden Meerwege.

Γάζη sind Αξωμιται: daraus folgt mir, daß der Redende, der sie bekriegt, nicht zu ihnen gehörte, nicht in Aksum von Anfang an zu Hause war. Er mag ein Condottiere gewesen sein, der sich Aksums bemächtigte, und von da aus sich die Nachbaren dienstbar machte, so weit es für seine Pläne nöthig schien. Er behandelte die verschiedenen Völker verschieden.

Und die Zeit der Inschrift?

Hätte Deutschland nicht versäumt, zur rechten Stunde gegen Rußland Krieg zu führen, so würde England die sich ihm in Africa bietende Gelegenheit, für das auf alle Fälle einmal irgendwie ihm verloren gehende Indien Ersatz zu finden, nicht gegen Deutschland, Frankreich und Italien habe benutzen können. Indien wäre ihm dann auch kaum bedroht gewesen. Die Analogie ist schlagend. Unser Africaner wird durch die Lage der zwischen Parthern (oder aber Persern) und Römern schwebenden Politik in den Stand gesetzt worden sein, sich am rothen Meere einen Handelsstaat zu gründen, der dies Meer bis Bâb almandab schließen konnte. Er war also ein Feind der Römer, aber kein offener, da er mit Aegypten handelte: er hatte sich durch seine Politik die Möglichkeit geschaffen, den von Clysma und Aelana ausgehenden Handel Roms lahm zu legen. Er that das vermuthlich ohne darüber zu reden daß er es that. Sein Ἄρης ist der in meinen Mittheilungen 1 108r vorgestellte persische Vereθraγna = Bahrâm = Maḥram. Persien und Rom müssen beide gehindert gewesen sein, in Erythraea sich unnütz zu machen, als dieser Usurpator sein Reich gründete.

Βαρβαρία ist, was ausdrücklich zu sagen angezeigt scheint, nach Ptolemaeus (Αἰθιοπίας τῆς ὑπὸ Αἴγυπτον θέσις) zu verstehn: Μόσυλοι ὑπὲρ τὸ ὁμώνυμον ἄκρον καὶ ἐμπόριον· ἡ δὲ ἐντεῦθεν μέχρι τοῦ Ραπτοῦ ποταμοῦ παράλιος πᾶσα, Βαρβαρία μὲν ἡ παράλιος, Ἀζανία δὲ ἡ ἐνδοτέρω, ἐν ᾗ πλεῖστοι ἐλέφαντες. Der Periplus und Cosmas 138 ff. lehren mehr. Barbara Yâqût 1 543 9 ff., und die Quellen Yâqûts.

Das ε am Ende vieler Namen sehe ich wie ը am Ende neu-Armenischer Wörter, wie das endende ь ъ der slavischen Sprachen, als Rest eines volleren Vokals an. Daß Αθαγαους ein griechischer Accusativ ist, scheint bestreitbar. ἐθαγως gäbe die Form her, in der γ für *w* eingetreten wäre: daß Αἰθίοπες neben Αθαγαους vorkommt, beweist für besonnene Forscher nicht gegen meine Vermuthung. Auf die Τιγρῆται der Noten, die zur Zeit unseres Königs wo anders wohnen als später, mache ich besonders aufmerksam.

Ueber das Wort gébhîm Regnorum γ 69.

Als ich jüngst in Rom war, gieng in meinem Kreise außer über Anderes auch über die Kuppel des Pantheon die Rede hin und wieder. Ein verstorbener Genosse römischer Tage, Henri Jordan, hatte 1885 am Pantheon untersucht: ein Oesterreicher war unlängst weiter als Er gekommen. Ich erwähnte, daß ich ein Kuppel bedeutendes Wort im alten Testamente gefunden. Ueber den Fund soll

ich ausführlicher berichten als bisher (armenische Studien § 499, Orientalia 2 8_9, Mittheilungen 1 211 ff., Uebersicht 155r — von 1877 bis 1889) geschehen war.

Vorerst die sogenannte Ueberlieferung.

𝔖 וַיִּסְפֹּן אֶת־הַבַּיִת גֵּבִים וּשְׂדֵרֹת בָּאֲרָזִים.

𝔊 καὶ ἐκοιλοστάθμησεν τὸν οἶκον κέδροις, ohne Variante, da As Zusatz φάτνώσεσιν (Andere φατνώμασιν) καὶ διατάξεσιν in BS 198_{27} unter ⋇ steht, also erst aus 𝔖 nachgetragen ist.

𝔗 וטליל ית ביתא בהנתוכין ועילא מינהון סידרא דריכפת רישי שריית ארזיא, was die Londoner Polyglotte »et operuit domum trabibus cavis, et supra illis erat ordo multiplex capitum tignorum cedrinorum« übersetzt. Nathan hat für הנתוכין keine Erklärung: Buxtorf leistet 626 cantherii, trabes, tigna .... trabes leviter incurvae et fornicatae. Levy[1] 1 203 kanalartige[so], gehöhlte[so] Balken. Beide ohne Beweis. הנתוך könnte persisch sein, und zu توختن und دوختن und اندوختن gehören: von tuč würde *hantôka = *संतोक regelrecht gebildet werden, und Vernähung = Verzapfung, aber auch sehr vieles Andere, bedeuten können: zur Wurzel توجش = tôǧiš, Symmicta 2 14. Das ist natürlich nur eine Vermuthung. 𝔗 hat גֻּבִים zu verstehn gemeint, was nicht gegen mich, er hat zur Uebersetzung eine eranische[?] Vokabel gebraucht, was in soferne für mich spricht als es lehrt, daß die Eranier in der Baukunst wenigstens in gewissen Punkten Lehrer der Semiten gewesen sind. Nicht gegen mich, da ja aus הנתוכין nichts darüber folgt, daß 𝔗 gerade גבים gelesen hat.

𝔖 ܘܰܛܠܳܗ̇ ܠܒܰܝܬܳܐ ܦܣܺܝܩܳܐ ܢܣܺܝܪܳܐ ܘܐܪ̈ܙܶܐ. Dies Wort bespricht PSmith 670 ff., indem er aus »Bar Ali« und Bar Bahlûl verschiedene Erklärungen beibringt: unter diesen leuchtet ihm دفاف منشورة am meisten ein. Mir nicht. Erstens nicht, weil nicht abzusehen ist, wie ܦܣܺܝܩܳܐ zu der Bedeutung Bretter hat kommen sollen. Zweitens nicht, weil die Bretter gesägte zu nennen wenig bezeichnet hätte. Drittens nicht, weil man die Decke eines Tempels doch kaum bloß aus »Brettern« herstellen wird. Ich greife also auf »Bar Ali«s ܦܣܺܝܩܳܐ ܕܟܘܢܒܪ ܡܛܠܠܝܢ ܒܗܘܢ ܗܝܟܠܐ, zumal كُنْبَذ der Perser jenes ܟܘܢܒܪ bestätigt.

Mir ist nicht zweifelhaft — des Aggaeus 1_4 בָּתִּים סְפוּנִים = οἶκος κοιλόσταθμος = տուն զմբեթեալ beweist es mir —, daß 𝔖 nichts als וַיִּסְפֹּן אֶת־הַבַּיִת בָּאֲרָזִים gehabt, und daß 𝔊 καὶ ἐκοιλοστάθμησεν τὸν οἶκον κέδροις übersetzt, daß dann eine Glosse jenes וַיִּסְפֹּן durch גְּבָרִים וּשְׂדֵרֹת erklärt, daß 𝔊c [Ax?] dies durch φατνώμασιν καὶ διατάξεσιν wiedergegeben hat, während 𝔖𝔗 schon die Glosse im Texte fanden, und daher, so gut sie vermochten, von Hause aus übersetzten.

גֻּבָּד = ܓܢܒܐ = գմբեթ würde also immerhin im alten Testamente vorkommen, aber in einer Glosse unbekannter Zeit. Falls κοιλοσταθμεῖν wölben bedeutet, würde סָפַן (vergleiche סְפִינָה die κοιλὴ ναῦς) genügen, um Wölbungen, nicht aber, um Kuppelbauten, auch in den guten Zeiten der israelitischen Nation deren Baumeistern bekannt zu glauben. Was ein werthvolles Ergebnis der Untersuchung nicht ist.

Wie sich das arabische جنبذ zu جنابث verhält, wird nur untersuchen dürfen, wer in arabischen Texten belesener ist als ich.

Der Fluß Orontes.

In der Zeitschrift für aegyptische Sprache und Alterthumskunde 27 39 ff. hat Adolf Erman unlängst (1889) den »syrischen Feldzug Amenophis des Zweiten« besprochen. Die Stele von Amada, auf der von diesem Feldzuge gehandelt wird, berichtet, der König sei über die mṡdt von 'irnṯ gesetzt. So, nicht 'irsṯ, lesen Brugsch und Maspero. Diese beiden Gelehrten deuten 'irnṯ als Orontes, und Erman nennt diese Vermuthung »gewis richtig«.

Der Orontes, um den es sich hier handelt, ist der عاصى, der Widerspenstige, der aus Trotz nicht den nächsten, sondern den weitesten Weg in die See laufende Fluß Coelesyriens. Er ergießt sich nördlich von Laodicea in das Meer, Socin² 456. Wie dieser Fluß in ältester Zeit geheißen hat, weiß man nicht sicher: den Namen 'Ορόντης trug er [ἀπὸ] τοῦ γεφυρώσαντος αὐτὸν 'Ορόντου, καλούμενος πρότερον Τυφών, nach Strabo ις 2 7 = 750 Casaubon. Ausführlich handelte über 'Ορόντης EBurnouf commentaire sur le Yaçna 248 ff. Add. 181: später (LDindorf zu Stephanus s. v.) 'Ορέντης. اروند noch bei Firdôsî der Tigris in seinem oberen Laufe.

Es wird also entweder die DoppelNachricht Strabos (und seiner von Burnouf citierten Genossen) als irrig nachzuweisen, oder aber die Deutung jenes Irnṯ durch 'Ορόντης aufzugeben sein.

Die Stichometrie der syrisch-hexaplarischen Uebersetzung des alten Testaments.

Da ThBirt in seiner Arbeit über das antike Buchwesen [mein Specimen psalterii graeci 8²] die Stichometrie der Bibel nicht mit der gehörigen Sorgfalt behandelt hat, lege ich hier aus dem ersten Bande meiner Bibliotheca syriaca eine Probe derselben vor, und bin unter Umständen bereit, mehr mitzutheilen.

Schon vor fast einem Vierteljahrhundert hatte AMCeriani in seinen monumenta sacra et profana die syrisch-hexaplarische Uebersetzung der Genesis und eines Theils des Exodus, soweit beide erhalten sind, herausgegeben: ich veröffentlichte 1880 veteris testamenti ab Origene recensiti fragmenta apud Syros servata quinque, ein Buch, das für wirkliche, d. h. das Ethos mehr als das Dogma und die Partei schätzende Theologen allein schon um der Nöthe willen beachtenswerth war, unter denen es an das Licht getreten ist (siehe die Vorrede, und auch die Citate Mittheilungen 3 80), das aber von den Mitgliedern der ersten Facultät selbstverständlich gar nicht beachtet, von einem berühmten Mitgliede einer vierten Facultät wegen seines hebräischen Kleides (ich hatte keine syrische Schrift zur Verfügung) mit Spott verfolgt worden ist. Herr Birt ist, wie die Sachen liegen, entschuldigt, daß er von ihm nichts erfahren hat.

Ich lese vom Rande meiner Bibliotheca Syriaca, deren erster Band vor dem October 1891 nicht wird ausgegeben werden können, die Stichennotierung ab, die von den syrischen Schreibern nicht zu Worten, sondern zu Zeilen, und auch das nur ungefähr genau, zugesetzt, von mir aber stets zu einem Sinnanfange bezogen worden ist. Die Syrer reden von ܐܡܪ = ἔπη, nicht von στίχοι.

Genesis 300:	Genesis 5_{9}	καὶ ἔζησεν:	BS 34_{6}
400:	5_{21}	σὸ δὲ λήψῃ:	35_{21}
500:	8_{16}	ἔξελθε:	37_{2}
	Lücken in der Handschrift		
1400:	32_{1}	καὶ Ἰακὼβ:	39_{13}

Das Ende der Genesis, unvollständig erhalten, enthält zufälliger Weise gerade die Stellen nicht, auf welche die Stichennotierung getroffen hatte.

Exodus 100:	Exodus 2_{16}	παραγενόμεναι:	52_{3}
200:	4_{3}	καὶ εἶπεν:	53_{18}
300:	5_{5}	καὶ εἶπεν:	54_{32}
400:	6_{20}	καὶ ἔλαβεν:	56_{12}
500:	ungefähr 7_{28}:		57_{28}
600:	9_{1}	εἶπεν δὲ:	59_{7}
700:	10_{3}	εἰσῆλθεν δὲ:	61_{2}
800:	11_{4}	καὶ εἶπεν:	62_{14}
900:	12_{28}	καὶ ἀπελθόντες:	63_{33}
1000 vom Schreiber nicht angemerkt			
1100:	14_{24}	καὶ ἐπέβλεψεν:	66_{29}
1200:	16_{2}	διεγόγγυζον:	68_{6}
1300:	16_{36}	τὸ δὲ γομορ:	69_{28}
1400:	18_{19}	νῦν οὖν:	71_{4}

Exodus	1500:	Exodus	20_{5}	ἐγὼ γὰρ:	BS 72_{26}
	1600:		21_{20}	ἐὰν δέ τις:	75_{1}
	1700:		22_{22}	καὶ κεκράξαντες:	76_{16}
	1800:		23_{31}	καὶ θήσω:	77_{20}
	1900:		25_{20}	συσκιάζοντες:	79_{10}
	2000:		26_{19}	ὀὸο βάσεις:	80_{24}
	2100:		28_{1}	καὶ σὺ:	82_{7}
	2200:		28_{42}	καὶ ποιήσεις:	83_{20}
	2300:		29_{31}	καὶ τὸν κριὸν:	85_{3}
	2400:		30_{22}	καὶ ἐλάλησεν:	86_{11}
	2500:		32_{7}	καὶ ἐλάλησεν:	87_{22}
	2600 2700 vom Schreiber nicht angemerkt				
	2800:		35_{20}	καὶ ἐξῆλθεν:	92_{13}
	2900:		36_{20}		93_{23}
	3000:		37_{19}		95_{13}
	3100:		38_{27}	καὶ ἐγενήθη:	96_{23}
	3200:		39_{32}		97_{23}
	3300:		40_{32}		99_{10}
Numeri	100:	Numeri	1_{38}	πάντα ἀρσενικὰ:	99_{31}
	200:		2_{28}	δύναμις:	100_{28}
	300:		3_{33}	οὗτοι:	101_{30}
	Lücke in der Handschrift				
	1000:		10_{6}	ungefähr:	102_{33}
	1100:		11_{10}	καὶ ἤκουσε:	104_{5}
	1200:		12_{8}	στόμα κατὰ:	105_{15}
	1300:		14_{1}	καὶ ἀναλαβοῦσα:	106_{28}
	1400:		14_{36}	καὶ οἱ ἄνθρωποι:	108_{6}
	1500 1600 werden in eine Lücke der Hds. fallen				
	1700:		18_{1}	καὶ σὺ καὶ οἱ:	111_{18}
	1800:		19_{1}	καὶ ἐλάλησεν:	112_{29}
	1900:		20_{6}	καὶ ὤφθη:	113_{33}
	2000:		21_{15}	καὶ τοὺς χειμάρρους:	115_{17}
	2100:		22_{15}	ungefähr:	117_{3}
	2200 wird in eine Lücke der Hds. fallen				
	2300:		24_{20}	καὶ ἰδὼν:	119_{28}
Iosue	100 wird in eine Lücke der Hds. fallen				
	200:		4_{4}	καὶ ἀνακαλεσάμενος:	123_{11}
	300:		5_{11}	καὶ ἐφάγοσαν:	126_{6}
	400:		6_{27}	καὶ ἦν κύριος:	128_{7}
	500:		8_{3}	καὶ ἀνέστη:	129_{22}
	600:		8_{30}	τότε ᾠκοδόμησαν:	131_{18}
	700:		10_{1}	Ueberschrift:	134_{7}

Iosue	800 [codex 900]: Iosue	10_{29}	καὶ ἀπῆλθον:	BS 135_{17}
	900:	11_{17}	καὶ ἕως Βααλγαδ:	138_{1}
	1000:	13_{9}	ἀπὸ Αρωηρ:	140_{3}
	1100:	14_{12}	ἐὰν οὖν:	142_{12}
	1200:	15_{45}	Ἀκκαρὼν:	144_{17}
	1300:	17_{12}	καὶ οὐκ:	147_{2}
	1400:	19_{1}	καὶ ἐξῆλθεν:	149_{8}
	1500:	19_{51}	καὶ ἐπορεύθησαν:	152_{2}
	1600:	21_{32}	καὶ ἐκ τῆς φυλῆς:	154_{3}
	1700:	22_{13}	καὶ ἀπέστειλαν:	155_{23}
	1800:	23_{3}	ὅτι κύριος:	157_{18}
	1900:	24_{14}	καὶ νῦν φοβήθητε:	159_{14}
	2000:	24_{29}	etwa	160_{13}
Iudices	100 wird in eine Lücke der Hds. fallen			
	200:	2_{20}	ἀνθ' ὧν ὅσα:	163_{13}
	300:	3_{30}	καὶ ἐνετράπη:	164_{24}
	400:	5_{4}	κύριε ἐν τῇ ἐξόδῳ:	165_{31}
	500:	6_{7}	καὶ ἐγένετο ὡς:	167_{10}
	600:	6_{38}	καὶ ἐγένετο οὕτως:	168_{25}
	700:	7_{23}	καὶ ἐβόησαν:	169_{33}
	800:	8_{27}	καὶ ἐποίησεν:	171_{3}
	900:	9_{23}	καὶ ἐξαπέστειλεν:	172_{5}
	1000:	9_{52}	anderes καὶ ἤγγισεν:	173_{10}
	1100 vom Schreiber nicht angemerkt			
	1200:	12_{2}	καὶ οἱ υἱοὶ Ἀμμὼν:	175_{34}
	1300:	13_{20}	καὶ Μανωε:	177_{10}
	1400 1500 vom Schreiber nicht angemerkt			
	1600:	16_{31}	καὶ κατέβησαν:	180_{22}
	1700:	18_{18}	τί ὑμεῖς:	181_{36}
	1800:	19_{9}	καὶ ὀρθριεῖτε:	182_{36}
	1900:	20_{7}	δότε:	184_{8}
	2000:	20_{40}	καὶ ἐπέβλεψεν:	185_{18}
	2100:	21_{24}	ἀνὴρ:	186_{25}
Ruth	100: Ruth	2_{10}	καὶ ἔπεσεν:	188_{8}

Σεισαρα

wird in den Hdss. entweder σεισάρα, oder (k) σεισαρά betont. Das Letztere ist das Richtige. Wenn der Ton auf der Letzten lag, mußte der Vokal der offenen Vorletzten vor betonter Letzter regelrecht halbiert werden. So entstand das סִיסְרָא der Tiberienser.

Zu Daṇḍin's Kâvyâdarça III, 150.

Von

F. Kielhorn.

Während des Druckes seiner Uebersetzung des Kâvyâdarça fragte mich von Böhtlingk nach der Bedeutung des vom indischen Commentator zu den Versen III, 150 und 151 citierten Satzes „karmâdi-vishaye 'py-avivakshite karmâdau saṁbandha-vivakshâyâṁ shashṭhî". Was ich dem verehrten Gelehrten damals antwortete, hat er in einer Anmerkung mitgetheilt. Seitdem habe ich Gelegenheit gehabt Daṇḍin's Werk wieder einmal sorgfältiger zu lesen, und habe gefunden, daß der Commentator seinen Autor an der bezeichneten Stelle nicht verstanden, und auch von Böhtlingk irre geführt hat.

Die beiden Verse, um die es sich handelt, lauten mit von Böhtlingk's Uebersetzung: —

Dakshiṇâdrer-upasaran-mârutaç-chûta-pâdapân |
kurute lalitâdhûta-prabâlâṅkura-çobhinaḥ || 150 ||
Ityâdi çâstra-mâhâtmya-darçan-âlasa-chetasâm |
apabhâshaṇavad-bhâti na cha saubhâgyam-ujjhati || 151 ||

150. „Der an das Malaja-Gebirge herankommende Wind macht, daß die Mangobäume mit ihren leise bewegten jungen Sprossen prangen".

151. Dieses und Aehnliches erscheint denjenigen, deren Geist zu träge ist die würdevollen Lehrbücher einzusehen, als fehlerhafte Sprache, bleibt aber trotzdem reizend.

Der Sinn des zweiten Verses ist klar. Leuten, die keine gründliche Kenntniß der Grammatik besitzen, mag Etwas fehlerhaft erscheinen, das in Wahrheit nicht nur correct ist, sondern dem Ausdrucke sogar einen besonderen Reiz verleiht. Ein Beispiel hierfür soll der erste Vers enthalten. Nach dem Commentare und der Uebersetzung wäre der Fehler, den der Vers enthält, der, daß der Dichter statt des zu erwartenden Accusativs *dakshiṇâdrim* den Genetiv *dakshiṇâdreḥ* gebraucht hätte. Der Fehler wäre aber nur ein scheinbarer, weil sich auch der Genetiv durch das Maxim der Grammatiker karmâdînâm-api saṁbandhamâtra-vivakshâyâṁ shashṭhy-eva erklären ließe.

Betrachten wir den Vers näher, so muß uns zunächst auffallen, daß der Dichter von dem an das Malaya-Gebirge herankommenden Winde reden soll. Denn gewöhnlich ist es der von

Süden kommende Wind, der im Frühlinge die Mangobäume sprossen macht; und hätten wir den Commentar nicht, so würden wir auch hier ohne Weiteres „der vom Malaya-Gebirge kommende Wind" übersetzen. Angenommen aber, Daṇḍin hätte wirklich den Genetiv statt des Accusativs gebraucht, so würden wir doch vergeblich nach dem besonderen Reize suchen, den der Genetiv an Stelle des Accusativs dem Verse verleihen sollte. Und endlich möchte ich behaupten, daß kein respectabler Grammatiker Indiens einen auf die Frage Wohin? gebrauchten Genetiv durch den vom Commentator citierten Satz rechtfertigen würde. Man mag über die indische Grammatik denken wie man will; sicher ist, daß der indische Grammatiker auch mit seinen Kunstgriffen nur den çishṭaprayoga zu erklären sucht. Der Satz karmâdînâm=avivakshâ çeshaḥ würde demnach zwar für den Genetiv *mâshâṇâm* in *mâshâṇâm=açnîyât* gelten[1]), weil der Gebildete wirklich so sagt; aber nicht für *adrêr=upasarati* „er kommt an den Berg heran", denn Niemand bedient sich auf die Frage Wohin? des Genetivs. Die Erklärung des Commentators ist also in jeder Hinsicht unhaltbar.

In Wirklichkeit liegt der scheinbare Fehler des ersten Verses in dem Worte *upasaran*, und gerade der Gebrauch dieses Wortes mußte dem gebildeten Leser reizend erscheinen. Pâṇini lehrt in VII, 3, 78, daß die Wurzel *sṛi* ihre Specialtempora von *dhau* bildet. Für den, der nur die Regeln der Ashṭâdhyâyî kennt, scheint *upasaran* deshalb fehlerhaft gebraucht zu sein statt des richtigen *upadhâvan*. Wer aber Grammatik gründlicher studiert hat, wer z. B. die Kâçikâ-Vṛitti oder die Grammatik des Çâkaṭâyana kennt, weiß, daß *dhau* für *sṛi* nur dann eintritt, wenn von einer schnellen oder stürmischen Bewegung die Rede ist[2]). *Upasaran* ist also grammatisch correct in der Bedeutung „langsam, oder sanft, oder leise herankommend", und die Worte *dakshiṇâdrer=upasaran=mârutaḥ* (wo *dakshiṇâdreḥ* natürlich Ablativ ist) bedeuten „der leise vom Malaya-Gebirge herankommende Wind". Das Ansprechende des Ausdrucks liegt darin, daß der Sinn des in Versen ähnlichen Inhalts gebrauchten Adjectivs *manda*[3]) schon durch das gewählte Verbum bezeichnet wird.

1) Vgl. z. B. Sâyaṇa zu Ṛigveda I, 20, 6.

2) Vgl. Kâçikâ-Vṛitti zu P. VII, 3, 78: sarter=vegitâyâṁ gatau dhâv-âdeçam=ichchhanti | anyatra sarati anusarat=îty=êva bhavati | . Çâkaṭâyana hat die Regel sarter=dhau vege; Hemachandra, vege sarter=dhâv, und das Gegenbeispiel priyâm=anusarati. In der Mâdhavîya Dhâtu-vṛitti lesen wir: yad=âyaṁ saratir=vegita-gamane vartate tadâ pâghrâdinâ çit-pratyaye dhâv-âdeçe dhâvat=îtyâdi.

3) Vgl. z. B. Çârṅgadhara's Paddhati 3789, 3791, 3808, 3813, 3816.

Mit Recht benutzt meines Erachtens der indische Commentator den oben erwähnten Satz der Grammatiker zur Erklärung eines Genetivs in Vers II, 149 des Kâvyâdarça, wo von Böhtlingk seinen eignen Weg gegangen ist. Der Vers lautet, mit der gedruckten Uebersetzung: —

Kshaṇaṁ darçana-vighnâya pakshma-spandâya kupyataḥ |
premṇaḥ prayâṇaṁ tvaṁ brûhi mayâ tasy=eshṭam=ishyate ||

„Verkünde, da mir erwünscht ist, was der Zuneigung erwünscht ist, daß diese sich auf die Reise begebe, diese Zuneigung, die schon über das Blinzeln der Augenlider, dieser flüchtigen Störung für's Sehen, zürnt".

Von Böhtlingk macht hier den Genetiv *premṇaḥ* von *prayâṇam* abhängig. Der Commentator erklärt, der Genetiv stehe an Stelle des Accusativs, abhängig vom Verbum *brûhi*. Welche Erklärung die richtige sei, ist nicht schwer zu entscheiden. Der Vers ist ein Beispiel für den Paravaçâkshepa. Ein Verliebter bittet die Geliebte, ihn zu entlassen; sie, die ganz die Sklavin ihrer Liebe ist und darum selbst Nichts zu erlauben hat, antwortet: „Sag es meiner Liebe, daß Du gehn willst, — der Liebe, die schon dem Blinzeln der Augenlider grollt, wenn es Dich den Blicken einen Moment entzieht; ich will, was sie will". Es ist klar, daß Daṇḍin hier, statt nach der Regel bruvi-çâsi-guṇena cha yat=sachate das Verbum *brû* mit doppeltem Accusative zu construieren, an Stelle des Accusativs den Genetiv der Person gesetzt hat, — ein Gebrauch, für den sich Beispiele genug beibringen ließen; und der Commentator war zweifellos berechtigt, sich diesen Genetiv durch das von ihm angeführte karmatv-âvivakshâyâṁ saṁbandha-vivakshayâ shashṭhî zu erklären.

Daß übrigens der Commentator selbst in Dingen, die er hätte verstehn sollen, keineswegs unfehlbar ist, mag man z. B. aus seiner Erklärung von I, 43 ersehen, wo er die Worte mâlatî-mâlâ lolâli-kalilâ für ein Beispiel des *çlishṭa* ausgibt, während sie doch von Daṇḍin gerade angeführt werden um zu zeigen, was unter *çithila*, dem Gegentheile von çlishṭa, zu verstehn sei. Die falsche Erklärung des Commentators hat in der Uebersetzung des Verses 44 natürlich die Hinzufügung eines doppelten „auch" nothwendig gemacht, das sich im Originale nicht findet.

Inhalt von No. 13.
Paul de Lagarde, Kleine Mittheilungen. -- *F. Kielhorn*, zu Dandin's Kâvyâdarça III, 150.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Coll 6
1

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

10. December. № 14. 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. November.

Das thermische Potential für verdünnte Lösungen.

Von

Eduard Riecke.

In der folgenden Mittheilung wird zunächst im Anschluß an die Untersuchungen von Planck[1]) das Potential für die Componenten einer verdünnten Lösung berechnet. Es werden sodann die gefundenen Werthe benützt, um die Gesetze der Dampfspannungs-, Gefrierpunkts- und Löslichkeitserniedrigung, der Dissociation in verdünnter Lösung, der Vertheilung eines Stoffes zwischen 2 Lösungsmitteln, das Gesetz des osmotischen Druckes und das Henry-Dalton'sche Gesetz zu ermitteln. Es deckt sich demnach der Inhalt der folgenden Zeilen zu einem Theile mit den Untersuchungen, welche Planck über verdünnte Lösungen angestellt hat; es schien mir aber nicht überflüssig, zu zeigen, wie die betreffenden Beweise auf dem Boden der Potentialtheorie zu führen sind. Daß die analytischen Entwicklungen, wie sie in der Theorie von Planck sich gestalten, jederzeit in die Potentialtheorie übertragen werden

1) Planck, Wied. Ann. Bd. 32. S. 485.

können, ergiebt sich daraus, daß der Unterschied der beiden Theorieen zunächst als ein rein formaler aufgefaßt werden kann. Mit Bezug hierauf möge noch Folgendes bemerkt werden.

Die Theorie von Gibbs geht aus von der Gleichung:

$$d\varepsilon = Td\eta - pdv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

in welcher die Entropie η, das Volumen v, und die Massen m der chemischen Componenten als unabhängige Veränderliche erscheinen; den Uebergang zu den Variabeln p, T, m_1, $m_2 \ldots$ macht Gibbs durch die Einführung der Function $\zeta = \varepsilon - \eta T + pv$, für welche

$$d\zeta = -\eta dT + v\,dp + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2 + \ldots$$

und

$$\frac{\partial \zeta}{\partial m_1} = \mu_1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial m_2} = \mu_2, \ \ldots$$

Die Funktion ζ ist gleich der von Planck benützten Funktion Φ negativ genommen und multiplicirt mit der absoluten Temperatur. Der Vorzug, welchen die Darstellung von Gibbs besitzt, beruht auf der Einführung des Namens „Potential" für die Differentialquotienten μ, auf der Einfachheit des Ausdruckes, welcher hierdurch für den fundamentalen Satz der Theorie[1]), auf der Uebersichtlichkeit des Schemas, welches für die weiteren Rechnungen gewonnen wird.

I. Potentiale der Componenten eines Gasgemisches.

Der ganze von den Gasen eingenommene Raum sei v; die Massen der einzelnen Gase m_1, m_2, $m_3 \ldots$, ihre Partialdrucke p_1, p_2, $p_3 \ldots$, ihr Gesammtdruck p; bezeichnen wir durch n_1, n_2, $n_3 \ldots$ die Anzahl der Grammmolekeln, welche von den einzelnen Gasen in dem Volumen v enthalten sind, so ergiebt sich für g. und cm. als Einheiten nach dem Boyle-GayLussac'schen Gesetz:

$$vp_1 = 84511\ n_1 T, \quad vp_2 = 84511\ n_2 T, \ \ldots$$

und

$$1) \qquad vp = 84511\ (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots)\, T.$$

Verstehen wir unter c_{p1}, c_{v1}, c_{p2}, c_{v2}, $\ldots$ die specifischen Wärmen

1) Es ist dies der Satz: Zwischen den Phasen eines aus mehreren physikalisch und chemisch verschiedenen Theilen zusammengesetzten Systemes besteht Gleichgewicht, wenn das Potential jeder einzelnen chemischen Componente in allen Phasen je einen und denselben Werth hat.

der einzelnen Componenten, unter R_1, R_2.. die denselben nach dem Boyle-GayLussac'schen Gesetze entsprechenden Constanten, so sind ihre Potentiale gegeben durch die Ausdrücke

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{R_1 \log \frac{m_1}{v} - \mathfrak{A} c_{v1} \log T + \mathfrak{A} c_{p1} - H_1\right\}$$

$$\mu_2 = E_2 + T\left\{R_2 \log \frac{m_2}{v} - \mathfrak{A} c_{v2} \log T + \mathfrak{A} c_{p2} - H_2\right\}$$

. . . . . .

Hier sind die E und H Constante, deren Werthe lediglich von den Normalzuständen der einzelnen Componenten abhängen, $\mathfrak{A}$ das mechanische Aequivalent der Wärme, T die Temperatur.

Setzen wir für v den aus der Gleichung 1 sich ergebenden Werth, so erhalten wir:

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{R_1 \log \frac{m_1 p}{84511\, \Sigma n} - \mathfrak{A} c_{p1} \log T + \mathfrak{A} c_{p1} - H_1\right\}$$

oder, wenn wir durch γ_1 das Molekulargewicht der ersten Componente bezeichnen

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{R_1 \log \frac{\gamma_1 p}{84511} + R_1 \log \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} - \mathfrak{A} c_{p1} \log T + \mathfrak{A} c_{p1} - H_1 .\right\}$$

Nun ist $\gamma_1 R_1 = 84511$, und somit

$$\mu_1 = E_1 + T\left\{R_1 \log \frac{p}{R_1} - \mathfrak{A} c_{p1} \log T + R_1 \log \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} + \mathfrak{A} c_{p1} - H_1\right\}. \quad 2)$$

Durch entsprechende Ausdrücke werden die Potentiale der übrigen Componenten dargestellt.

II. Potentiale der Componenten einer verdünnten Lösung.

Nach dem Vorgange von Planck[1]) setzen wir die Energie ε und das Volumen v der Lösung gleich linearen Funktionen der Massen der einzelnen Componenten;

$$\varepsilon = m_1 \varepsilon_1 + m_2 \varepsilon_2 + m_3 \varepsilon_3 + \ldots$$

$$v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \ldots$$

1) l. c. S. 486.

Für die Entropie der Lösung ergiebt sich dann ein Ausdruck von der Form

$$\eta = m_1(\eta_1 + k_1) + m_2(\eta_2 + k_2) + \ldots$$

wo die Größen η_1, $\eta_2 \ldots$ nur von p und T, die Integrationskonstanten k_1, $k_2 \ldots$ nur von den Massen m abhängig sind. Nun genügen die Potentiale μ_1, $\mu_2 \ldots$ der einzelnen Componenten der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} m_1 d\mu_1 + m_2 d\mu_2 + \ldots &= v\,dp - \eta\,dT \\ &= m_1(v_1 dp - \eta_1 dT - k_1 dT) \\ &+ m_2(v_2 dp - \eta_2 dT - k_2 dT) \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

Da diese Gleichung für alle möglichen Werthe von m_1, m_2.. erfüllt sein muß, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= v_1 dp - \eta_1 dT - k_1 dT, \\ d\mu_2 &= v_2 dp - \eta_2 dT - k_2 dT \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\mu_1 = M_1 - k_1 T, \quad \mu_2 = M_2 - k_2 T, \ldots$$

Uebertragen wir die von Planck mit Bezug auf die Entropie geführte Untersuchung auf das Potential, so ergiebt sich, daß das in μ_1 auftretende Glied $-k_1 T$ mit demjenigen Terme des Potentials der gasförmigen Componente übereinstimmen muß, welcher von den Massen, beziehungsweise den Anzahlen der Grammmolekeln abhängig ist. Die Größen k müssen also die Werthe besitzen

$$k_1 = -R_1 \log \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}, \quad k_2 = -R_2 \log \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}.$$

. . . . .

Für die Potentiale der einzelnen Componenten der Lösung ergeben sich somit die Gleichungen:

$$\mu_1 = M_1 + R_1 T \log \frac{n_1}{n_1 + n_2 + \ldots}, \quad \mu_2 = M_2 + R_2 T \log \frac{n_2}{n_1 + n_2 + \ldots} \tag{4}$$

in welchen die Größen M_1, M_2, ... nur abhängig sind von p und T.

Zu dem Falle einer verdünnten Lösung, bei welcher die erste Componente durch das Lösungsmittel gebildet wird, gelangen wir,

wenn wir die Zahlen n_2, n_3 ... als sehr klein annehmen gegenüber von n_1. Für das Potential des Lösungsmittels ergiebt sich dann der Ausdruck:

$$\mu_1 = M_1 - R_1 \frac{n_2 + n_3 + \cdots}{n_1} T. \qquad 4')$$

Hier ist M_1 nichts anderes als das Potential des reinen Lösungsmittels entsprechend den gegebenen Werthen von Temperatur und Druck und kann daher durch den Ausdruck dargestellt werden

$$M_1 = E_1 + T(\mathfrak{A} c_{p1} - H_1 - \mathfrak{A} c_{p1} \log T) + \frac{v}{m_1} p \,. \qquad 5)$$

III. Anwendung der Theorie von Gibbs auf verdünnte Lösungen.

1. Erniedrigung der Dampfspannung.

Die Temperatur werde konstant erhalten auf dem Betrage T. Dann wird die Dampfspannung p_0 des reinen Lösungsmittels nach dem Fundamentalsatze bestimmt durch die Gleichung

$$\mu(p_0, T) = \mu'(p_0, T)$$

wo μ und μ' die Potentiale des Lösungsmittels im gasförmigen und flüssigen Zustand bezeichnen. Es werden nun in dem gegebenen Mittel geringe Mengen irgend welcher Körper gelöst, so daß auf n Grammmolekeln des Lösungsmittels n_1, n_2, n_3 ... Grammmolekeln von denselben kommen; ist die hierdurch bedingte Erniedrigung der Dampfspannung gleich π, so ist das neue Potential der gasförmigen Phase des Lösungsmittels gleich

$$\mu(p_0 - \pi, T) = \mu(p_0, T) - \frac{\partial \mu}{\partial p_0} \pi.$$

Andererseits ist das neue Potential der flüssigen Phase

$$\mu'(p_0 - \pi, T) - R \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots}{n} T$$

$$= \mu'(p_0, T) - \frac{\partial \mu'}{\partial p_0} \pi - R \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots}{n} T.$$

Gleichgewicht zwischen der flüssigen und gasförmigen Phase ist vorhanden, wenn das Potential des Lösungsmittels in beiden denselben Werth besitzt. Es ergiebt sich somit die Bedingung

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p_0} - \frac{\partial \mu'}{\partial p_0}\right) \pi = R \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots}{n} T.$$

Im Falle einer einzigen Componente ist aber nach Gl. 3) $\partial\mu/\partial p_0 = v/m$, $\partial\mu'/\partial p_0 = v'/m'$, wo v und v' die Volumina, m und m' die Massen der beiden Phasen bezeichnen; vernachlässigen wir v'/m' gegen v/m, so ergiebt sich

$$\frac{v}{m}\pi = R\frac{n_1+n_2+\cdots}{n}T$$

oder mit Rücksicht auf das Boyle GayLussac'sche Gesetz

$$\frac{\pi}{p_0} = \frac{n_1+n_2+\cdots}{n}.$$

Vernachlässigt man die Aenderung, welche das Potential der flüssigen Phase durch die Aenderung des Druckes erleidet, so ergiebt sich mit Hülfe des im ersten Abschnitte gegebenen Ausdruckes für das Potential eines gasförmigen Körpers die allgemeiner gültige Beziehung

$$\frac{p_0}{p} = \frac{n+n_1+n_2+\cdots}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{p} = \frac{n_1+n_2+\cdots}{n}$$

wo p der erniedrigte Dampfdruck.

Nimmt man den Druck konstant, die Temperatur variabel, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Beziehung $\partial\mu/\partial T = -\eta/m$ das Gesetz der Siedepunktserhöhung ϑ

$$\frac{\vartheta W}{R\Theta_0^2} = \frac{n_1+n_2+\cdots}{n}$$

wo W die Verdampfungswärme, Θ_0 der normale Siedepunkt.

2. Gefrierpunktserniedrigung.

Der Gefrierpunkt des reinen Lösungsmittels wird bestimmt durch die Gleichung

$$\mu'(p, T_0) = \mu''(p, T_0)$$

wo μ'' das Potential der festen Phase bezeichnet. Durch Lösung von n_1, n_2, n_3 ... Grammmolekeln irgend welcher anderer Körper in n Grammmolekeln des Lösungsmittels wird der Gefrierpunkt erniedrigt um τ; die neuen Potentiale sind

$$\mu'(p, T_0-\tau) - RT_0\frac{n_1+n_2+\cdots}{n} = \mu'(p, T_0) - \frac{\partial\mu'}{\partial T_0}\tau - RT_0\frac{n_1+n_2+\cdots}{n}$$

$$\mu''(p, T_0-\tau) = \mu''(p, T_0) - \frac{\partial\mu''}{\partial T_0}\tau.$$

Die Gleichsetzung der Potentiale giebt:

$$\left(\frac{\partial \mu''}{\partial T_0} - \frac{\partial \mu'}{\partial T_0}\right)\tau = RT_0 \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}$$

oder mit Benützung von Gleichung 3)

$$\left(\frac{\eta'}{m'} - \frac{\eta''}{m''}\right)\tau = RT_0 \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}.$$

Bezeichnen wir durch Q die Schmelzwärme für die Gewichtseinheit des Lösungsmittels, so ergiebt sich:

$$\frac{\tau Q}{RT_0^2} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}.$$

Benützen wir als Einheit der Kraft den Druck von 1 g auf 1 cm^2, so ist für Wasser als Lösungsmittel $Q = 80 \times 42800$, $R = \frac{84511}{18} = 4695$ und somit

$$\frac{\tau}{102} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n}.$$

3. Dissociation in verdünnter Lösung.

In der Lösung sei eine beliebige Zahl von Stoffen enthalten, welche der Dissociation, beziehungsweise der wechselseitigen Umwandlung fähig sind; wir bezeichnen sie durch $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_d \ldots$ Dieselben seien in bekannter Weise zusammengesetzt aus einer gewissen Zahl anderer Stoffe, welche ihrerseits bei allen in der Lösung vor sich gehenden Umwandlungen völlig unzersetzt bleiben mögen; wir bezeichnen diese letzteren durch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3 \ldots$

Die chemische Zusammensetzung der Componenten $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_d \ldots$ sei gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
a\mathfrak{S}_a &= \alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3 + \ldots \\
b\mathfrak{S}_b &= \beta_1\mathfrak{S}_1 + \beta_2\mathfrak{S}_2 + \beta_3\mathfrak{S}_3 + \ldots \\
c\mathfrak{S}_c &= \gamma_1\mathfrak{S}_1 + \gamma_2\mathfrak{S}_2 + \gamma_3\mathfrak{S}_3 + \ldots \\
d\mathfrak{S}_d &= \delta_1\mathfrak{S}_1 + \delta_2\mathfrak{S}_2 + \delta_3\mathfrak{S}_3 + \ldots \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir durch μ_a, μ_b, μ_c, $\mu_d \ldots$ die Potentiale der in der Lösung befindlichen Componenten, durch m_a, m_b, m_c, $m_d \ldots$ die von denselben vorhandenen Massen, so besteht Gleichgewicht wenn:

$$\mu_a dm_a + \mu_b dm_b + \mu_c dm_c + \mu_d dm_d + \ldots = 0$$

vorausgesetzt, daß das Lösungsmittel selbst an den Reaktionen der gelösten Stoffe nicht betheiligt ist. Nun sind aber die Veränderungen der Massen m der Bedingung unterworfen, daß durch dieselben die Masse der Stoffe $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ ... nicht verändert werden kann. Wir erhalten somit für die Variationen dm_a, dm_b, dm_c, dm_d ... die Gleichungen:

$$\frac{\alpha_1}{a} dm_a + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \frac{\delta_1}{d} dm_d + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a} dm_a + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \frac{\delta_2}{d} dm_d + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_3}{a} dm_a + \frac{\beta_3}{b} dm_b + \frac{\gamma_3}{c} dm_c + \frac{\delta_3}{d} dm_d + \ldots = 0$$

. . . . . .

Durch diese werden die Verhältnisse der dm im Allgemeinen nur dann bestimmt, wenn ihre Zahl um die Einheit kleiner ist als die Zahl der Componenten a, b, c, d ... Die Zahl der Gleichungen stimmt überein mit der Zahl der Stoffe $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ ... Die Verhältnisse der chemischen Umwandlung sind also im Allgemeinen nur dann in eindeutiger Weise bestimmt, wenn die Zahl der unveränderlichen Bestandtheile um eins kleiner ist, als die Zahl der veränderlichen Componenten. Verstehen wir unter λ_1, λ_2, λ_3 ... gewisse unbekannte Faktoren, so erhalten wir aus den obigen Bedingungen die Formeln:

$$\mu_a + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \lambda_3 \frac{\alpha_3}{a} + \ldots = 0$$

$$\mu_b + \lambda_1 \frac{\beta_1}{b} + \lambda_2 \frac{\beta_2}{b} + \lambda_3 \frac{\beta_3}{b} + \ldots = 0$$

$$\mu_c + \lambda_1 \frac{\gamma_1}{c} + \lambda_2 \frac{\gamma_2}{c} + \lambda_3 \frac{\gamma_3}{c} + \ldots = 0$$

$$\mu_d + \lambda_1 \frac{\delta_1}{d} + \lambda_2 \frac{\delta_2}{d} + \lambda_3 \frac{\delta_3}{d} + \ldots = 0$$

. . . . . .

Ist die im Vorhergehenden besprochene Bedingung erfüllt, so ist die Zahl dieser Gleichungen um Eins größer als die Zahl der unbekannten Faktoren λ_1, λ_2, λ_3 ... und wir erhalten durch Elimi-

mination derselben eine Gleichung v on der Form

$$A\mu_a + B\mu_b + \Gamma\mu_c + \Delta\mu_d + \ldots = 0.$$

Setzen wir für die Potentiale die in den Gleichungen 4 aufgestellten Ausdrücke, so ergiebt sich:

$$\log n_a^{AR_a} n_b^{BR_b} n_c^{\Gamma R_c} \ldots = \log N^{AR_a + BR_b + \Gamma R_c + \ldots} - \frac{AM_a + BM_b + \Gamma M_c + \ldots}{T}.$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Funktion der Zahlen n ist dieselbe, wie in dem Falle einer Mischung gasförmiger Componenten, die auf der rechten Seite stehende Funktion von p und T ist eine andere.

Die Gleichungen

$$\frac{\alpha_1}{a} dm_a + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a} dm_a + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_3}{a} dm_a + \frac{\beta_3}{b} dm_b + \frac{\gamma_3}{c} dm_c + \ldots = 0$$

bestimmen die Verhältnisse der dm_a, dm_b, dm_c ... auch bei gleicher Zahl der veränderlichen Componenten $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$ ... und der unveränderlichen Bestandtheile $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ ..., sobald die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{a} & \frac{\beta_1}{b} & \frac{\gamma_1}{c} & \ldots \\ \frac{\alpha_2}{a} & \frac{\beta_2}{b} & \frac{\gamma_2}{c} & \ldots \\ \frac{\alpha_3}{a} & \frac{\beta_3}{b} & \frac{\gamma_3}{c} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

verschwindet. Es ist dieß der Fall bei den Umsetzungen in Folge doppelter Wahlverwandtschaft und das Problem der Dissociation ist daher auch in diesem Falle ein vollkommen bestimmtes.

Wir betrachten noch zwei allgemeinere Fälle von Dissociation. Zunächst nehmen wir an, es sei der eine

der in der Lösung befindlichen Körper, etwa $\mathfrak{S}_a$, gleichzeitig auch in festem und in gasförmigem Zustand vorhanden. Wir bezeichnen die Massen, welche den verschiedenen Zuständen entsprechen durch m_a, m'_a, m''_a, die Potentiale durch μ_a, μ'_a, μ''_a. Wir erhalten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mu_a dm_a + \mu'_a dm'_a + \mu''_a dm''_a + \mu_b dm_b + \mu_c dm_c + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{a}(dm_a + dm'_a + dm''_a) + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a}(dm_a + dm'_a + dm''_a) + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \ldots = 0$$

. . . . . .

Woraus

$$\mu_a + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \ldots = 0$$

$$\mu'_a + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \ldots = 0$$

$$\mu''_a + \lambda_1 \frac{\alpha_1}{a} + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{a} + \ldots = 0$$

$$\mu_b + \lambda_1 \frac{\beta_1}{b} + \lambda_2 \frac{\beta_2}{b} + \ldots = 0$$

$$\mu_c + \lambda_1 \frac{\gamma_1}{c} + \lambda_2 \frac{\gamma_2}{c} + \ldots = 0$$

. . . . . .

Man sieht sofort daß $\mu''_a = \mu'_a = \mu_a$ und daß außerdem zwischen den Potentialen μ_a, μ_b, μ_c . . . dieselben Beziehungen bestehen wie früher.

Allgemein ergiebt sich das Resultat: Wenn irgend welche Componenten außer in der Lösung noch in festem oder gasförmigem Zustand vorhanden sind, so wird dadurch die Beziehung zwischen den Potentialen der gelößten Bestandtheile nicht verändert, es tritt zu derselben nur noch die Bedingung hinzu, daß für jede Componente das Potential in den verschiedenen Phasen denselben Werth besitzen muß.

Wir behandeln endlich noch den Fall, daß die chemische Reaktion in der Lösung keine bestimmte ist, d. h. daß die Zahl der unveränderlichen Bestandtheile um mehr als Eins kleiner ist, als die Zahl der veränderlichen Componenten. Wir erhalten in diesem Falle die Gleichungen:

$$\mu_a dm_a + \mu_b dm_b + \mu_c dm_c + \ldots\ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{a} dm_a + \frac{\beta_1}{b} dm_b + \frac{\gamma_1}{c} dm_c + \ldots\ldots = 0$$

$$\frac{\alpha_2}{a} dm_a + \frac{\beta_2}{b} dm_b + \frac{\gamma_2}{c} dm_c + \ldots\ldots = 0$$

. . . . . .

Nehmen wir an, die Zahl der unveränderlichen Bestandtheile $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ . . . sei um 2 kleiner als die Zahl der Componenten $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$, $\mathfrak{S}_c$ . . . Die Zahl der Bedingungsgleichungen, welche sich auf Grund der stöchiometrischen Verhältnisse für die Zuwüchse dm_a, dm_b, dm_c . . . ergeben, ist dann gleichfalls um 2 kleiner als die Zahl der dm; werden 2 von den Zuwüchsen dm willkürlich gewählt, so sind die übrigen bestimmt. Wir können zunächst den Zuwachs dm_a gleich Null setzen; die ihm entsprechende chemische Componente scheidet dann aus der Reaktion aus, diese verläuft in vollkommen eindeutiger Weise zwischen den übrigen Componenten und ihre Potentiale genügen der früher entwickelten Gleichung; eine zweite solche Gleichung erhalten wir, wenn wir $dm_b = 0$ setzen u. s. f. Am übersichtlichsten ergiebt sich das System der von den Potentialen zu erfüllenden Gleichungen, wenn man zu dem System der Bedingungsgleichungen der dm noch eine lineare homogene Gleichung zwischen dm_a, dm_b, dm_c . . . hinzufügt.

$$u\,dm_a + v\,dm_b + w\,dm_c + \ldots = 0.$$

Die Zahl der Gleichungen stimmt dann überein mit der Zahl der Zuwüchse; bildet man nun die Determinante der Coëfficienten, so erhält man die gesuchten Gleichungen, indem man die Unterdeterminanten nach u, v, w . . . gleich Null setzt.

Ein einfaches Beispiel für den zuletzt betrachteten Fall giebt die Dissociation zweier binärer Elektrolyte mit einem gemeinsamen Bestandtheil. Die stöchiometrischen Gleichungen sind:

$$a\mathfrak{S}_a = \alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2$$
$$b\mathfrak{S}_b = \beta_2\mathfrak{S}_2 + \beta_3\mathfrak{S}_3$$

wo $\alpha_2 = \beta_2$. Bezeichnet man mit n_a, n_b die Anzahlen der nicht dissociirten g-Molekeln, mit n_1, n_2, n_3 die Zahl der durch Dissociation gebildeten g-Molekeln von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, mit N die Zahl der g-Molekeln des Lösungsmittels, so ergeben sich die Gleichungen

$$n_1 n_3 = N k_a n_a, \qquad n_2 n_3 = N k_b n_b$$

wo $n_3 = n_1 + n_2$; wir bezeichnen ferner durch $N_a = n_a + n_1$, $N_b = n_b + n_2$ die Zahl der ursprünglich vorhandenenen g-Molekeln der Stoffe $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$. Zunächst ergiebt sich:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{k_a(N_a - n_1)}{k_b(N_b - n_2)}.$$

Setzt man hiernach

$$n_1 = x k_a (N_a - n_3), \qquad n_2 = x k_b (N_b - n_3)$$

so ergiebt sich

$$n_1 = \frac{k_a N_a x}{1 + k_a x}, \qquad n_a = \frac{N_a}{1 + k_a x}$$

$$n_2 = \frac{k_b N_b x}{1 + k_b x}, \qquad n_b = \frac{N_b}{1 + k_b x}.$$

Die Dissociationsgrade werden:

$$y_a = \frac{k_a x}{1 + k_a x}, \qquad y_b = \frac{k_b x}{1 + k_b x}.$$

Endlich ergiebt sich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\left(\frac{k_a N_a}{1 + k_a x} + \frac{k_b N_b}{1 + k_b x}\right) x^2 = N.$$

Befindet sich in der Lösung nur der eine Elektrolyt, etwa $\mathfrak{S}_a$, so gelten die auf Molekelzahlen und Dissociationsgrade sich beziehenden Gleichungen unverändert, nur die Gleichung zur Bestimmung von x wird eine andere, nemlich

$$\frac{k_a N_a x^2}{1 + k_a x} = N.$$

Betrachtet man N als eine veränderliche Ordinate, so gehen die durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmten Curven für sehr kleine Werthe von x und N in Parabeln über, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$(k_a N_a + k_b N_b) x^2 = N \quad \text{und} \quad k_a N_a x^2 = N.$$

Für sehr große Werthe von x und N werden die Curven geradlinig und zwar sind ihre Richtungstangenten gegen die x-Axe gegeben durch $N_a + N_b$, beziehungsweise N_a.

Aus dem hierdurch bestimmten Verlauf der durch die beiden Gleichungen dargestellten Curven ergiebt sich, daß bei gegebenem Werthe von N die zweite Gleichung einen größeren Werth von x liefert als die erste. Daraus folgt aber weiter der Satz:

Wird der Lösung eines Elektrolyten ein zweiter Elektrolyt zugesetzt, welcher mit dem ersten ein Jon gemeinschaftlich besitzt, so wird der Dissociationsgrad des ersten vermindert.

Dieser Satz wurde von Nernst[1]) und von Arthur Noyes[2]) einer experimentellen Prüfung unterworfen. Die Verhältnisse der angestellten Versuche waren aber einfacher in so fern, als bei denselben gesättigte Lösungen zur Anwendung kamen. Dadurch ergeben sich für die Potentiale der gelößten und nicht dissociirten Componenten noch zwei weitere Gleichungen, welche sich auf die Form bringen lassen $n_a = Nl_a$ und $n_b = Nl_b$, unter l_a und l_b zwei nur von Temperatur und Druck abhängende Größen verstanden[3]).

4. Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln.

Von den beiden Lösungsmitteln, welche sich wechselseitig nicht lösen sollen, seien N und N' g-Molekeln gegeben; in dem ersten seien n, in dem zweiten n' g-Molekeln eines dritten Körpers gelößt. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn

$$M(p, T) + RT \log \frac{n}{N} = M'(p, T) + RT \log \frac{n'}{N'}.$$

Die Brüche n/N und n'/N' bezeichnen wir als die Lößlichkeitskoëfficienten des dritten Körpers. Setzen wir sie gleich λ und λ', so ergiebt sich:

$$\log \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{RT} \left\{ M'(p, T) - M(p, T) \right\}.$$

Das Verhältniß der Lößlichkeiten bleibt dasselbe, welches auch die Concentrationen, d. h. die Werthe von n und n', sind. Dieß gilt nicht mehr, wenn der gelößte Stoff in dem einen der beiden Lösungsmittel der Dissociation unterworfen ist. Wir nehmen an, daß von den n g-Molekeln des Stoffes, welche sich in dem ersten Lösungsmittel befinden, n_1 nicht dissociirt, n_2 dissociirt seien und zwar so daß jede Molekel in zwei zerfalle. Wir erhalten dann die Gleichungen

$$\frac{n_1}{N} \cdot \frac{N'}{n'} = A, \quad \left(\frac{n_2}{N}\right)^2 \cdot \frac{N}{n_1} = B$$

1) Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. IV. S. 372.

2) Inauguraldiss. Leipzig 1890.

3) Vgl. noch: Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. Bd. II. S. 284. Bd. V. S. 1.

wo A und B gewisse Funktionen von Druck und Temperatur. Die Löslichkeitskoëfficienten sind:

$$\lambda = \frac{n_1 + n_2}{N} \text{ und } \lambda' = \frac{N'}{n'}.$$

Wir erhalten:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = A + \sqrt{\frac{AB}{\lambda'}}.$$

Bezeichnen wir den Dissociationsgrad des Stoffes in dem ersten Lösungsmittel durch $x = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$, so ergiebt sich:

$$x = \sqrt{AB}\frac{\sqrt{\lambda'}}{\lambda} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{A}{B}}\lambda'}.$$

Der Dissociationsgrad nimmt ab mit wachsender Concentration.

Noch etwas komplicirter gestalten sich die Verhältnisse in dem von Nernst[1]) behandelten Falle, in welchem der gelöste Körper in beiden Lösungsmitteln der Dissociation unterworfen ist. Wir beschränken uns dabei, mit Beziehung auf die von Nernst ausgeführten Experimentaluntersuchungen, auf die Dissociation einer Molekel in zwei unter sich gleiche. Es seien wieder N und N' die Anzahlen der g-Molekeln, welche von den beiden Lösungsmitteln gegeben sind, n_1 sei die Zahl der normalen, n_2 die Zahl der dissociirten Molekeln in dem ersten Lösungsmittel; n_1' und n_2' haben dieselbe Bedeutung für das zweite Mittel. Bezeichnen wir das Molekulargewicht für die normalen Molekeln durch γ_1, für die durch Dissociation entstehenden durch γ_2, so ist $\gamma_2 = \gamma_1/2$. Ist R_1 die Constante des Gasgesetzes für die normalen Molekeln, R_2 dieselbe Constante für die durch Dissociation gebildeten, so ist $R_1\gamma_1 = R_2\gamma_2$, also $R_2 = 2R_1$. Die Werthe der vier in Betracht zu ziehenden Potentiale sind:

$$\mu_1 = M_1(p, T) + R_1 T \log \frac{n_1}{N}, \quad \mu_1' = M_1'(p, T) + R_1 T \log \frac{n_1'}{N'}$$

$$\mu_2 = M_2(p, T) + R_2 T \log \frac{n_2}{N}, \quad \mu_2' = M_2'(p, T) + R_2 T \log \frac{n_2'}{N'}.$$

Zwischen denselben bestehen die vier Gleichungen:

---

1) Nernst, Gött. Nachr. 1890. N. 12.

$$\mu_1 - \mu_1' = 0, \quad \mu_2 - \mu_2' = 0$$
$$\mu_2 - \mu_1 = 0, \quad \mu_2' - \mu_1' = 0.$$

Dieselben sind nicht von einander unabhängig, denn wenn man von der Summe der beiden links stehenden die Summe der beiden rechts stehenden abzieht, so ist das Resultat Null. Die Auflösung der Gleichungen giebt:

$$\frac{n_1}{n_1'} = \frac{N}{N'} e^{\frac{M_1' - M_1}{R_1 T}} = \frac{N}{N'} l_1; \quad \frac{n_2}{n_2'} = \frac{N}{N'} e^{\frac{M_2' - M_2}{R_2 T}} = \frac{N}{N'} l_2$$

$$\frac{n_2^2}{n_1} = N e^{\frac{M_1 - M_2}{R_1 T}} = Nk \quad ; \quad \frac{n_2'^2}{n_1'} = N' e^{\frac{M_1' - M_2'}{R_1 T}} = N' k'.$$

Die nur von p und T abhängenden Größen l_1 und l_2 können wir als Theilungskonstanten, die ebenfalls nur von p und T abhängenden Größen k und k' als Dissociationskonstanten bezeichnen. Zwischen denselben besteht die Beziehung

$$\frac{l_2^2}{l_1} = \frac{k}{k'}.$$

Bezeichnen wir die Dissociationsgrade in den beiden Lösungsmitteln durch

$$x = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \text{ und } x' = \frac{n_2'}{n_1' + n_2'}$$

so wird:

$$\frac{x^2 (n_1 + n_2)}{1 - x} = Nk, \qquad \frac{x'^2 (n_1' + n_2')}{1 - x'} = N' k'.$$

Somit das Theilungsverhältniß:

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1' + n_2'} = \frac{x'^2 (1 - x)}{x^2 (1 - x')} \cdot \frac{Nk}{N' k'}.$$

Da die Dissociationsgrade abhängig sind von der Concentration, so gilt gleiches von dem Theilungsverhältniß. Von den mannigfachen Ausdrücken, welche für dieses letztere aus den obigen Gleichungen abgeleitet werden können, möge noch der folgende angeführt werden:

$$\frac{n_1 + n_2}{n_1' + n_2'} = \frac{N}{N'} \frac{\sqrt{n_1} + \sqrt{Nk}}{\frac{\sqrt{n_1}}{l_1} + \frac{\sqrt{Nk}}{l_2}}$$

durch welchen das Teilungsverhältniß in seiner Abhängigkeit von der Zahl der normalen Molekeln in dem ersten Lösungsmittel dargestellt wird.

Betrachtet man n_1, n_2, n_1', n_2', k, k', l_1, l_2 als Unbekannte, so müssen zu den obigen Gleichungen noch 4 weitere hinzugefügt werden, um ihre Berechnung zu ermöglichen. Nernst hat zu diesem Zwecke die Gesammtzahl der in den beiden Lösungsmitteln enthaltenen g-Molekeln bestimmt $n_1+n_2 = c_1$, $n_1'+n_2' = c_2'$; ferner betrachtet er k und l_1 als gegeben.

5. Gesetz des osmotischen Druckes.

Dieses Gesetz ist kürzlich von Planck[1]) aus den allgemeinen Principien der Thermodynamik hergeleitet worden. Ich füge im Folgenden den auf der Benützung des Potentiales beruhenden Beweis hinzu, welchen ich schon vor längerer Zeit gefunden hatte. Im Inneren einer von einer halbdurchlässigen Membran umschlossenen Zelle befinde sich eine Lösung, in welcher auf n g-Molekeln des Lösungsmittels n_1, n_2, n_3 . . . g-Molekeln der gelößten Körper kommen; der Druck sei p; außerhalb der Zelle stehe das reine Lösungsmittel unter dem Drucke p_0. Ist Gleichgewicht vorhanden, so muß das Potential des Lösungsmittels zu beiden Seiten der Zellwand nach Gibbs[2]) denselben Werth haben; es ergiebt sich somit die Gleichung:

$$M(p, T) - RT\frac{n_1+n_2+\cdots}{n} = M(p_0, T)$$

oder mit Rücksicht auf den für M in Gleichung 5 gegebenen Werth

$$\frac{v}{m}(p-p_0) = \frac{RT}{n}(n_1+n_2+\ldots).$$

Verstehen wir unter v das Volumen der Zelle, unter m das Gewicht des in derselben enthaltenen Lösungsmittels, so ist m/n gleich dem Molekulargewicht des Lösungsmittels und demnach $R\frac{m}{n} = 84511$; somit ergiebt sich für den osmotischen Druck $p-p_0 = \pi$ die Gleichung des Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes

$$v\pi = 84511(n_1+n_2+\ldots)T.$$

Diesem Resultat entsprechend liegt es nahe, die Ur-

1) Planck, Zeitschrift f. phys. Chem. V, S. 187.
2) Gibbs, Transactions of the Connecticut. Ac. III, 138.

sache des osmotischen Druckes in den Stößen zu suchen, welche von den Molekeln des gelößten Körpers auf die Membran ausgeübt werden. Daß nach dieser von van t'Hoff begründeten Anschauung der osmotische Druck in der That gleich ist der Differenz der hydrostatischen Drucke zu beiden Seiten der Membran ergiebt sich aus der folgenden Ueberlegung. Die Zelle sei hergestellt aus einer durch die Membran unten verschlossenen Glasröhre, welche mit Salzlösung gefüllt und in ein mit dem Lösungsmittel gefülltes Gefäß gestellt wird. Die freie Oberfläche der Salzlösung wird durch die gegen sie gerichteten Stöße gehoben, bis der Druck der gehobenen Säule gleich dem osmotischen durch die Stöße verursachten Druck ist. Der Druck der gehobenen Säule ist aber andererseits gleich der Differenz der hydrostatischen Drucke zu beiden Seiten der Membran, womit die Behauptung bewiesen ist.

Unter der Voraussetzung, daß der osmotische Druck durch die Stöße der Molekeln gegen die halbdurchlässige Membran, beziehungsweise gegen die freie Oberfläche der Flüssigkeit hervorgebracht werde, ergiebt sich aber andererseits

$$\pi = \tfrac{1}{3}\frac{n_1\mu_1 g_1^2 + n_2\mu_2 g_2^2 + \ldots}{v}$$

wo μ das Molekulargewicht, g die Geschwindigkeit der gelößten Molekeln. Ist diese letztere dieselbe wie im Gaszustande, so ist das Gesetz identisch mit dem entsprechenden Gesetze der Gastheorie. Der Unterschied zwischen einem freien und einem in Lösung befindlichen Gase würde dann wesentlich durch die verschiedene Länge der freien Wege begründet sein.

Wir geben endlich noch zwei Anwendungen der Potentialtheorie, welche nicht eben so sicher erscheinen, wie die im Vorhergehenden behandelten, da sie zwei weitere Annahmen von einigermaßen hypothetischer Natur nothwendig machen. Die erste Annahme besteht darin, daß wir die Potentialtheorie auch für solche Veränderungen als gültig betrachten, welche zu labilen Zuständen der Ueber- oder Untersättigung führen. Die zweite Annahme ist, daß die in den Gleichungen 4 gegebenen Ausdrücke auch für die Potentiale gesättigter Lösungen gelten, vorausgesetzt, daß die gelösten Körper in dem Lösungsmittel nur wenig lößlich sind.

6. Erniedrigung der Löslichkeit.

Wir betrachten mit Nernst[1]) zwei Flüssigkeiten a und b, welche nur wenig in einander löslich sind; schichten wir dieselben über einander, so bilden sich zwei Lösungen, von welchen die eine auf n_a g-Molekeln von a ν_b g-Molekeln von b, die zweite auf n_b g-Molekeln von b ν_a g-Molekeln von a enthalten möge. Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\mu_a(p, T) - R_a T \frac{\nu_b}{n_a} = M_a(p, T) + R_a T \log \frac{\nu_a}{n_b}$$

$$\mu_b(p, T) - R_b T \frac{\nu_a}{n_b} = M_b(p, T) + R_b T \log \frac{\nu_b}{n_a}.$$

Es mögen nun in der Componente a irgend welche in b nicht lösliche Körper in geringer Menge gelöst werden; die Folge davon wird sein, daß ein Theil der ν_a g-Molekeln von a, welche bisher in b gelöst waren, nach a zurückwandert; es bildet sich ein neuer Gleichgewichtszustand zwischen den beiden Lösungen aus, bei welchem einerseits auf n_a g-Molekeln von a ν_b' g-Molekeln von b, und $n_1, n_2, n_3 \ldots$ g-Molekeln der fremden Körper, andererseits auf n_b Molekeln b ν_a' Molekeln von a kommen. Die neuen Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\mu_a(p, T) - R_a T \frac{\nu_b' + n_1 + n_2 + \ldots}{n_a} = M_a(p, T) + R_a T \log \frac{\nu_a'}{n_b}$$

$$\mu_b(p, T) - R_b T \frac{\nu_a'}{n_b} = M_b(p, T) + R_b T \log \frac{\nu_b'}{n_a}.$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den vorhergehenden giebt:

$$\frac{\nu_b - \nu_b' - (n_1 + n_2 + \ldots)}{n_a} = -\log \frac{\nu_a'}{\nu_a} = -\frac{\nu_a - \nu_a'}{\nu_a}.$$

Vernachlässigt man $\frac{\nu_b - \nu_b'}{n_a}$, so ergiebt sich

$$\frac{\nu_a - \nu_a'}{\nu_a} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n_a}$$

oder allgemeiner mit Benützung der Gleichung 4

$$\frac{\nu_a - \nu_a'}{\nu_a'} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots}{n_a}$$

und dieß ist der von Nernst in einer Reihe von Fällen experimentell bestätigte Satz.

1) Zeitschr. f. phys. Chemie. VI, S. 16.

7. Das Henry'sche Absorptionsgesetz.

Betrachten wir den in Gleichung 4 gegebenen Ausdruck für das Potential eines in geringer Menge in einer Flüssigkeit gelößten Stoffes als gültig auch für den Fall der Absorption eines Gases durch eine Flüssigkeit, so ergiebt sich durch Gleichsetzen der Potentiale des freien und des absorbirten Gases

$$RT\log p/R + E + T(\mathfrak{A}c_p - H - \mathfrak{A}c_v \log T) = M + RT\log n/N.$$

Hier bezeichnet n die Anzahl der absorbirten Grammmolekeln des Gases, N die Zahl der Molekeln der absorbirenden Flüssigkeit. Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}c_p - H - \mathfrak{A}c_v \log T = R\Theta, \text{ so ergiebt sich}$$

$$n = Np\frac{e^{\Theta + \frac{E-M}{RT}}}{R}.$$

Soll das Henry'sche Gesetz erfüllt sein, so muß in dem Falle eines absorbirten Gases die im allgemeinen von p und T abhängende Function M sich auf eine Function von T allein reduciren.

Mit Hülfe desselben Ansatzes ergiebt sich, wie man leicht sieht, auch das Dalton'sche Gesetz über die Absorption eines Gasgemenges.

Wir betrachten endlich noch den Fall eines Gases, welches sich bei der Absorption dissociirt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß jede Molekel des Gases in zwei Theilmolekeln zerfalle. Ist n_1 die Anzahl der nicht dissociirten g-Molekeln in der Flüssigkeit, n_2 die Anzahl der dissociirten, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$n_1 = NAp \quad \text{und} \quad \frac{n_2^2}{n_1} = NB$$

wo A allein abhängig ist von der Temperatur, B von Temperatur und Druck. Hiernach ergiebt sich für die Gesammtzahl der absorbirten g-Molekeln der Werth

$$n_1 + n_2 = NAp\left(1 + \sqrt{\frac{B}{Ap}}\right)$$

dieselbe ist dem Drucke nicht mehr proportional.

Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung.

Von

Eduard Riecke.

Riess[1]) hat im Jahre 1876 eine Reihe von Versuchen mitgetheilt, welche sich auf die Bestimmung der durch Reibung erregten Elektricitätsmengen bezogen. Die kreisförmige Fläche des Reibzeuges hatte einen Durchmesser von 4 cm; sie bestand aus Leder, welches mit einer dünnen Schichte von Kienmayers Amalgam überzogen war. Die geriebene Fläche bestand aus einer Tafel von Hartgummi mit glänzender Oberfläche, von 73 cm Länge und 32,5 cm Breite. Seine Versuche beschreibt Riess in folgender Weise. Das unbeschwerte Reibzeug wurde auf die Hartgummitafel gestellt und mit Hülfe eines isolirenden Handgriffes in gerader Linie um 1 Zoll = 2,7 cm behutsam fortgeführt. Die dabei stattgefundene Reibung wird zur Einheit der Reibungsmenge genommen. Dann wurde das Reibzeug behutsam abgenommen, auf eine frische Stelle der Platte gesetzt, wiederum einen Zoll weit fortgeführt u. s. w. Die Anzahl dieser Operationen bestimmte den Werth der Reibungsmenge. War die gewünschte Menge erreicht, so wurde mit dem Reiber der Knopf eines Sinuselektrometers berührt und die erregte Elektricitätsmenge gemessen. Bei einer zweiten Versuchsreihe wurden die Reibungsmengen dadurch gewonnen, daß der Reiber in einem Zuge über eine größere oder geringere Strecke der Hartgummitafel fortgezogen wurde. Als Resultat dieser Untersuchungen ergaben sich die folgenden Sätze:

„Durch fortgesetzte Reibung wird desto weniger Elektricität erregt, je größer die vorangegangene Reibung war."

„An zwei vorläufig elektrisirten Flächen erregt die Reibung eine kleinere Elektricitätsmenge, als wenn die eine Fläche unelektrisch ist.".

Durch die Versuche von Riess wurde ich veranlaßt zu dem Versuche einer Theorie der Elektricitätserregung durch Reibung[2]), welche auf den folgenden Grundlagen beruht. Es wird zunächst angenommen, daß der Reiber die Gestalt eines Rechteckes besitzt, dessen Breite äußerst klein ist im Vergleich zu seiner Länge. Wird ein solcher Reiber parallel mit seiner Breite über die geriebene Fläche fortgeführt, so wird die erregte Elektricitätsmenge

1) Berl. Monatsber. 1876. S. 301.

2) Gött. Nachr. 1877. Nr. 25. Wied. Ann. Bd. 3. S. 414.

proportional der Oberfläche des Reibers und proportional der geriebenen Fläche gesetzt: außerdem wird angenommen, daß eine fortdauernde Wiedervereinigung der geschiedenen Elektricitäten erfolge nach demselben Gesetze, welches für die Zerstreuung der Elektricität in der Luft gilt. Die theoretischen Folgerungen aus diesen Annahmen standen in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Riess und ebenso mit den Beobachtungen, welche Carl Schering auf meine Veranlassung hin ausgeführt hat[1]).

Der Zweck von Beobachtungen, welche ich im Februar und März 1888 angestellt habe, war es, das zur Zeit noch sehr unzulängliche Beobachtungsmaterial zu vermehren; dabei wurde im Wesentlichen die von Riess angegebene Methode der Beobachtung beibehalten, dieselbe wurde nur auf eine größere Zahl verschiedenartiger Körper in Anwendung gebracht; zur Messung der erregten Elektricitätsmengen wurde ein Goldblattelektroskop benützt und es wurden endlich die an diesem Elektroskop beobachteten Ausschläge auf absolutes elektrostatisches Maaß reducirt.

1. Die reibenden Körper.

Als reibende Körper wurden benützt: Platten von Bernstein, Glas, Hartgummi, Holz, Nickel, Schellack, Schwefel und Siegellack. Dieselben hatten meist eine rechteckige beziehungsweise quadratische Form; eine von einem natürlichen Schwefelkrystall abgeschnittene Platte hatte die Gestalt eines Parallelogramms, eine zweite ebensolche die Gestalt eines Paralleltrapezes; zwei Holzplatten waren kreisförmig begrenzt. In der Mitte war an allen Platten ein dünner Stil von Hartgummi befestigt von einer Länge von beiläufig 15 mm; oben trug dieser Stil ein rechtwinkliges Kreuz von Hartgummi, dessen Arme eine Länge von 30 mm besaßen. Bei der Reibung wurden die Platten mit den Spitzen von 4 Fingern in den Endpunkten des Kreuzes gefaßt und mit mäßigem Drucke und geeigneter Geschwindigkeit über eine zuvor abgemessene Strecke der geriebenen Fläche hinweggeführt. Sie wurden sodann abgehoben und mit dem einen Arme des Kreuzes über dem Knopfe des Goldblattelektroskopes aufgehängt, welches zur Messung der Elektricitätsmengen diente. Die Entfernung zwischen den Platten und dem Knopfe des Elektroskops betrug etwa 6 cm.

2. Die geriebenen Flächen.

Als geriebene Körper wurden vorzugsweise verwandt Flanell und Seide; bei einer kleineren Zahl von Versuchen auch Katzen-

1) Wied. Ann. Bd. 3. S. 465.

pelz. Flanell und Seide wurden in rechteckigen Stücken verwandt, welche aus mehreren Lagen über einander bestanden; ihre Länge betrug 83 cm, ihre Breite 11 cm. An ihren breiten Seiten waren die Stücke auf Hartgummicylindern befestigt; diese wurden mit ihren vorstehenden Enden in zwei feste Lager eingelegt, so daß die geriebenen Flächen zwischen denselben in horizontaler Richtung sich ausdehnten. Um eine ebene Reibungsfläche von genügender Festigkeit herzustellen, wurde gegen die Flanell- oder Seidenstücke von unten eine horizontal gestellte Glasplatte gedrückt, so daß dieselben straff gespannt waren und keine Faltung zeigten. Wurde die Länge der geriebenen Flächen von dem Reiber mehrmals durchlaufen, so wurde darauf geachtet, daß dieß stets an einer neuen Stelle geschah. Nach jedem einzelnen Versuch wurde die geriebene Fläche durch Bestreichen mit einem Spitzenkamm, die Fläche des Reibers mit Hülfe einer Flamme entladen.

3. Das Elektroskop.

Das Elektroskop war ein einfaches Goldblattelektroskop, welches zum Schutze gegen äußere Störungen in einen metallenen Kasten eingeschlossen war. Dieser war an zwei einander gegenüberliegenden Stellen mit Oeffnungen versehen, so daß die Verbindungslinie derselben senkrecht zu der Divergenzebene der Blätter stand. Die hintere Oeffnung diente zur Beleuchtung der Blätter; die vordere trug eine Linse, durch welche das Bild der Blätter auf den Glasmaaßstab geworfen wurde, an welchem ihre Divergenz beobachtet wurde.

Die Reduktion der Ausschläge des Elektroskopes auf absolutes elektrostatisches Maaß geschah in folgender Weise. Ueber den Knopf des Elektroskops wurde die geladene Standkugel einer elektrischen Drehwage gestellt und der hierdurch erzeugte Ausschlag gemessen; es wurde hierauf die Standkugel in die Drehwage gebracht und die Abstoßung ihres Balkens beobachtet. Sodann wurde die Standkugel in das Elektroskop zurückgestellt und von neuem der Ausschlag gemessen; diese alternirenden Beobachtungen wurden fortgesetzt, bis die Ausschläge in Folge der Zerstreuung auf einen nur noch kleinen Betrag gesunken waren. Die elektrische Ladung der beweglichen Kugel der Drehwage war zu Anfang der ganzen Beobachtungsreihe in absolutem Maaße bestimmt worden; ihre Abnahme im Verlauf der Beobachtungen wurde berechnet mit Hülfe des Werthes, welcher sich aus den Messungen selbst für den Zerstreuungskoëfficienten in der Drehwage ergab.

Wir stellen zunächst die Ladungen e_1 der Standkugel (mm, mg, sec) zusammen mit den entsprechenden Ausschlägen A des Elektroskopes und dem Verhältniß e_1/A.

e_1	8770	5378	5203	4830	4200	2055
A	28.3	16.7	18.4	15.4	13.9	6.7
e_1/A	303	322	283	314	303	307.

Im Mittel ist $e_1/A = 304$.

Bezeichnen wir durch q_{11} die Capacität der Standkugel der Drehwage, wenn sie dem Knopfe des Elektroskops gegenübergestellt ist, durch q_{12} die Capacität dieses letzteren, so ergiebt sich für die Ladung der Goldblätter der Werth

$$e_2 = -\frac{q_{12}}{q_{11}} \cdot e_1.$$

Die Capacitäten ergeben sich mit Hülfe der Formeln, welche ich in einer früheren Abhandlung[1]) entwickelt habe, aus den Durchmessern und dem Centralabstand der beiden Kugeln. Nun war der Halbmesser der Standkugel $a = 6{,}07$ mm, der Halbmesser der Kugel des Elektroskopes $b = 5{,}80$ mm; der Centralabstand $c = 18{,}62$ mm. Hiernach ergiebt sich:

$$q_{11} = 6{,}867, \qquad q_{12} = -2{,}163$$

und somit die elektrische Ladung der Goldblätter in mm, mg, sec

$$e_2 = 96\,A.$$

Dieses Resultat stimmt nahe überein mit dem in der angeführten früheren Arbeit gefundenen, obwohl die Verhältnisse des Versuches wesentlich andere sind. Der früher gefundene Werth ist $e_2 = 97\,A$ (mm, mg, sec).

Es mögen endlich noch die Formeln angeführt werden, mit Hülfe deren die auf den Reiberflächen erzeugten elektrischen Dichtigkeiten aus den Ausschlägen des Elektroskops berechnet wurden.

Vorausgesetzt ist, daß die Fläche der Platten senkrecht stehe gegen die Linie, welche den Mittelpunkt der Elektroskopkugel mit dem Mittelpunkt der Platten verbindet. Bezeichnen wir den Abstand einer Platte von dem Mittelpunkt der Kugel durch d, den Halbmesser der Kugel durch a, die elektrische Dichtigkeit an der Oberfläche der Platte durch ε, so wird die Menge der in der Kugel inducirten ungleichnamigen, der in den Goldblättern sich sammelnden gleichnamigen Influenzelektricität gegeben durch

1) Gött. Nachr. 1885. S. 416. Wied. Ann. Bd. 28. S. 55.

$$e_3 = a\varepsilon \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{d^2+\xi^2+\eta^2}}.$$

ξ und η sind die rechtwinkligen Coordinaten mit Bezug auf zwei in der Ebene der Platte durch ihren Mittelpunkt hindurchgelegte Axen, l ist die Länge, b die Breite der Platte. Die Integration nach η giebt:

$$e_3 = a\varepsilon \int_{-l/2}^{+l/2} d\xi \log \frac{\sqrt{d^2+b^2/4+\xi^2}+b/2}{\sqrt{d^2+b^2/4+\xi^2}-b/2}.$$

Woraus durch partielle Integration:

$$e_3 = al\varepsilon \log \frac{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}+b/2}{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}-b/2} - ab\varepsilon \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\xi^2 d\xi}{(d^2+\xi^2)\sqrt{d^2+b^2/4+\xi^2}}$$

und

$$e_3 = al\varepsilon \log \frac{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}+b/2}{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}-b/2} + ab\varepsilon \log \frac{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}+l/2}{\sqrt{d^2+\frac{l^2+b^2}{4}}-l/2}$$
$$- 4ad\varepsilon \arcsin \frac{bl}{4\sqrt{d^2+b^2/4}\,\sqrt{d^2+l^2/4}}.$$

Sind die Dimensionen der Platte klein gegen die Entfernung d, so kann man setzen:

$$e_3 = \varepsilon bl \frac{a}{d}\left(1-\frac{l^2+b^2}{8d^2}\right).$$

Führt man an Stelle der elektrischen Ladung der Goldblätter ihre Divergenz A ein, so ergiebt sich zur Berechnung der elektrischen Dichtigkeit ε die Formel

$$\varepsilon bl \frac{a}{d}\left(1-\frac{l^2+b^2}{8d^2}\right) = 96A.$$

Ist die Platte durch einen Kreis vom Halbmesser r begrenzt, so lautet dieselbe:

$$\varepsilon \pi r^2 \frac{a}{d}\left(1-\frac{r^2}{4d^2}\right) = 96A.$$

4. Versuche mit Hartgummischeiben.

Es war nothwendig, zunächst mit Benützung eines und desselben Stoffes eine etwas größere Zahl von Versuchen auszuführen, um ein Urtheil über den gesetzmäßigen Verlauf derselben und die Constanz der Resultate zu erhalten. Es wurden zu diesem Zwecke drei Platten von Hartgummi benützt, welche aus einer Tafel von 6,5 mm Dicke herausgeschnitten waren. Die Ergebnisse der Versuche sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Die Länge der Platten ist mit l, ihre Breite mit b bezeichnet; T ist die Temperatur, ϱ die relative Feuchtigkeit, A der beobachtete Ausschlag des Elektroskops, s die von der Platte durchlaufene Strecke in cm. Bei zwei Scheiben wurden je drei, bei der dritten vier korrespondirende Versuchsreihen ausgeführt. Die geriebene Fläche bestand aus Flanell.

I. Scheibe. $l = 29{,}2$ (mm) $b = 10{,}4$ (mm)
$A_\infty = 15{,}5$ $\alpha = 25{,}2$ (cm).

T	19.9	19.1	19.5		
ϱ	52	51	47		
s (cm)	A			A Mittel	A berechn.
25	8.4	10.3	10.0	9.6	9.8
50	13.8	12.7	14.2	13.6	13.3
75	15.4	14.2	14.7	14.8	14.7
150	15.5	14.3	14.8	14.9	15.5
300	15.5	14.7	15.4	15.2	15.5

Die berechneten Werthe sind erhalten mittelst der Formel

$$A = A_\infty \left(1 - e^{-\frac{s}{\alpha}}\right).$$

Führt man die Platte über eine Strecke von $\alpha = 25{,}2$ cm der geriebenen Flanelloberfläche hinweg, so erhält man hiernach 63 % der schließlich erreichten elektrischen Ladung. In derselben Weise sind auch die Beobachtungen der folgenden Tabellen berechnet.

II. Scheibe. $l = 29.9$ (mm) $b = 19.9$ (mm)
$A_\infty = 22.7$ $\alpha = 29.9$ (cm).

T / ϱ	17.2 / 51	17.5 / 53	18.8 / 50		
s (cm)	A			A Mittel	A berechn.
25	11.2	13.4	12.8	12.5	12.8
50	17.4	19.5	19.1	18.7	18.4
75	20.4	21.7	21.0	21.0	20.9
150	21.1	22.2	22.3	21.9	22.6
300	22.8	22.3		22.5	22.7

III. Scheibe. $l = b = 30.1$ (mm)
$A_\infty = 27.7$ $\alpha = 42.7$ (cm).

T / ϱ	19.0 / 50	19.2 / 53	17.9 / 51	17.3 / 48		
s (cm)	A				A Mittel	A berechn.
25	6.5	12.1	15.4	14.6	12.1	12.3
50	14.8	19.6	20.3	22.6	19.3	19.1
75	20.7	26.3	24.2	25.7	24.2	23.0
150	25.6	27.2	27.6	27.2	26.9	26.8
300	27.8	28.8	27.8	27.2	27.7	27.7

Mit Bezug auf die Art und Weise in welcher die vorhergehenden Beobachtungsreihen gewonnen wurden, möge noch Folgendes bemerkt werden.

Aus einer Reihe von vorläufigen Versuchen ergab sich, daß die elektrische Erregbarkeit der Platten durch den Proceß der Reibung selbst vermehrt wurde. Von einem Versuche zum anderen wurden dieselben in einem mit koncentrirter Schwefelsäure getrockneten Recipienten aufbewahrt. Wurde nun eine Platte aus diesem Raume herausgenommen und über eine bestimmte Strecke des in derselben Weise aufbewahrten Flanellstückes weggeführt, so ergab sich zunächst eine ziemlich schwache elektrische Ladung. Diese steigerte sich aber bei jeder Wiederholung der Operation bis zu einem schließlichen konstant bleibenden Betrage.

Es möge dieß an einem Beispiele erläutert werden. Der Versuch wurde ausgeführt mit der quadratischen Hartgummischeibe; die geriebene Flanellstrecke hatte eine Länge von 75 cm. Die bei Wiederholung der Reibung der Reihe nach beobachteten Ausschläge des Elektroskopes waren folgende:

10.6	14.5	15.3	18.0	18.4	18.6
19.4	21.6	21.8	22.1	22.8	23.9
23.6	23.9	22.0	23.3	22.5	23.0.

Um nun die Beobachtungen von dem Einfluß dieser Veränderung zu befreien, wurde jede Beobachtungsreihe damit begonnen, daß die zu untersuchende Platte wiederholt über eine Strecke von 75 cm gerieben wurde, bis schließlich keine Vermehrung der elektrischen Ladung mehr zu beobachten war. Erst nachdem auf diese Weise eine konstante Oberflächenbeschaffenheit der Platte hergestellt war, wurde mit der eigentlichen Versuchsreihe begonnen, bei welcher in der Regel von kleinen Reibungsstrecken zu größeren fortgeschritten wurde. In dieser Weise schloß sich an die Versuche, deren Ergebniß in den obigen Zahlen enthalten ist, die folgende Beobachtungsreihe an.

Reibungsstrecke $s = 25$ cm.

Ausschläge des Elektroskops bei den einzelnen auf einanderfolgenden Versuchen:

$A =$	13.0	12.5	14.5	13.0	14.2	15.7
	13.9	13.6	15.3	13.7	14.7	16.7
	15.0	15.5	15.0	17.2	17.4	16.8

Mittel $A = 15.4$.

Reibungsstrecke $s = 50$ cm.

Ausschläge: $A =$	18.8	19.0	20.9	21.2	19.7	20.8
	20.1	21.6	20.3	20.3	20.6	20.3

Mittel $A = 20.3$.

Reibungsstrecke $s = 75$ cm.

Ausschläge: $A =$	25.7	23.2	26.0	24.5	25.0	24.7
	24.4	23.1	24.0	24.0	24.4	24.4

Mittel $A = 24.4$.

Reibungsstrecke $s = 150$ cm.

Ausschläge: $A =$	27.9	24.0	26.0	29.0	26.0	28.0
	27.0	29.9	26.3	29.3	27.5	27.6

Mittel 27.6.

Reibungsstrecke $s = 300$ cm.

Ausschläge: $A =$	26.3	27.6	29.3	28.0	28.1	27.0
	26.7	29.3	27.7	28.7	27.8	27.5

Mittel 27.8.

Man sieht daß bei dieser Beobachtungsreihe auch durch die vorausgegangene wiederholte Reibung keine vollkommen konstante Beschaffenheit der Oberfläche erreicht war; es findet bei den beiden kleinsten Reibungsstrecken noch ein deutliches Ansteigen der Ladung bei wiederholter Reibung statt, und der bei der Strecke

$s = 75$ cm erreichte Betrag der Ladung ist größer als bei den Vorversuchen. Uebrigens muß hervorgehoben werden, daß mit Bezug hierauf die Beobachtungsreihen im Ganzen günstigere Verhältnisse darbieten als die hier mitgetheilte.

5. Zusammenstellung der Dimensionen der bei den Versuchen benützten Platten.

Die Länge derselben ist ebenso wie früher mit l, die Breite mit b, die Dicke mit h bezeichnet; d ist der Abstand, in welchem die geriebene Fläche der in das Elektroskop gehängten Platten von dem Mittelpunkte der Kugel sich befand; die Angaben beziehen sich auf das mm als Längeneinheit.

		l	b	h	d
Bernstein	I	27.9	27.9	4.8	72.3
	II	25.4	20.1	2.4	73.9
	III	25.2	23.2	1.9	75.1
	IV	27.5	19.4	3.3	73.7
Glas	I	29.1	29.1	2.1	73.8
	II	29.8	14.7	2.1	73.7
	III	29.6	29.6	1.0	74.8
	IV	29.7	14.8	1.0	75.2
Hartgummi	I	30.1	30.1	6.5	69.8
	II	29.9	19.9	6.5	69.8
	III	29.2	10.4	6.5	69.9
	IV	29.7	29.7	2.0	74.8
	V	30.1	20.2	2.0	74.7
	VI	29.8	10.1	2.0	74.8
Holz	I	$r = 15.6$		6.0	70.0
	II	$r = 15.1$		6.0	70.0
Nickel	I	20.4	20.4	2.8	73.8
	II	20.4	20.4	2.8	73.7
Schellack	I	28.6	28.6	6.0	71.3
	II	29.7	14.4	6.0	70.9
Schwefel	I	30.6	30.6	6.2	70.7
	II	30.3	15.0	6.2	69.9
	III	22.9	14.8	5.0	68.8
	IV	24.6	12.8	5.4	69.5
Siegellack	I	29.4	29.4	6.0	70.9
	II	29.4	14.8	6.0	71.7

Von den beiden Holzplatten war die erste aus Buchsbaumholz, die zweite aus einem schwarzen, harten Holze kreisförmig ausgedreht. Von den Schwefelplatten bestanden die beiden ersten aus käuflichem Stangenschwefel, die dritte und vierte waren aus einem natürlichen Schwefelkrystall geschnitten, und zwar die dritte in der Form eines Paralleltrapezes parallel einer Oktaëderfläche, die vierte

in der Form eines Parallelogramms parallel der Geradendfläche; bei der dritten bedeutet l die halbe Summe der parallelen Seiten, bei der vierten b die Höhe des Parallelogramms.

Von den Glasplatten stammten die beiden ersten von einer Scheibe farblosen, die dritte und vierte von einer Scheibe grünen Glases. Die beiden ersten Bernsteinplatten waren durchsichtig, gelb, die dritte und vierte milchig getrübt.

6. Die beobachteten Maxima der elektrischen Ladung und die Flächendichtigkeiten der Reibungselectricität.

Im Folgenden sind für die einzelnen Platten die Ausschläge, A_∞, zusammengestellt, welche sich bei fortgesetzter Vergrößerung der beim Reiben durchlaufenen Strecke schließlich ergaben; es sind außerdem die elektrischen Dichtigkeiten in cm. g. s. angegeben, welche mit Hülfe der früher angeführten Formel aus den betreffenden Werthen von A_∞ folgen.

		Wolle		Pelz		Seide	
		A_∞	ε_∞	A_∞	ε_∞	A_∞	ε_∞
Bernstein	I	24.5	3.89			22.3	3.55
	II	18.7	4.56	11.9	2.90	18.0	4.39
	III	17.0	3.69				
	IV	17.1	4.00			16.8	3.93
Glas	I					15.4	2.31
	II	11.3	3.21			11.8	3.35
	III	12.0	1.76			10.4	1.53
	IV	9.8	2.84			10.9	3.16
Hartgummi	I	27.7	3.88			23.6	3.30
	II	22.7	4.54	12.7	2.54	20.9	4.18
	III	15.5	6.00			13.8	5.34
	IV	22.9	3.34			20.6	3.01
	V	17.0	3.55	11.0	2.30	17.1	3.57
	VI	12.5	5.21			11.1	4.63
Holz	I	22.4	3.43			13.2	2.02
	II	6.8	1.11				
Nickel	I	10.8	3.45			11.0	3.52
	II					10.9	3.49
Schellack	I	23.0	3.47			22.0	3.32
	II	21.6	6.07	11.6	3.26	19.8	5.56
Schwefel	I	27.2	3.54			25.9	3.37
	II	21.6	5.64	14.0	3.65	21.3	5.56
	III					11.7	3.99
	IV					12.5	4.55
Siegellack	I	25.8	3.66			25.0	3.55
	II	22.0	6.11	13.3	3.70	20.8	5.78

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich zunächst unzweideutig die Thatsache, daß die durch die Reibung erzeugte maximale elektrische Dichtigkeit um so kleiner ist, je größer die Fläche des Reibers. Man kann zunächst vermuthen, daß der Unterschied zwischen den beobachteten Dichtigkeiten nicht sowohl durch die Verschiedenheit der Größe, als durch die der Form bedingt ist; daß aber die Form für die schließlich erreichten elektrischen Dichtigkeiten wenigstens nur von untergeordneter Bedeutung ist, ergiebt sich aus Versuchen, bei welchen Platten von länglicher Form das eine mal der Breite, das andere mal der Länge nach fortgeführt wurden; die hierbei beobachteten Ausschläge A sind im Folgenden zusammengestellt.

		s	Der Breite nach	Der Länge nach
Hartgummi	II	225	20.0	20.4
	III	75	13.2	13.8
	III	150	13.2	12.3
	VI	150	10.6	11.1
Schwefel	IV	75	12.5	11.0

Um eine Vergleichung der bei den verschiedenen Körpern auftretenden elektrischen Dichtigkeiten zu erhalten, kann man die beobachteten Werthe von ε_∞ auf gleichen Inhalt der Reiberflächen reduciren. Es empfiehlt sich zu diesem Zwecke eine Fläche von 5 cm² und mit Bezug auf diese ergaben sich dann die folgenden Werthe.

Maximale elektrische Dichtigkeit bei einer Reiberfläche von 5 cm² Inhalt.

Reibung an Wolle	ε_∞	Reibung an Seide	ε_∞
Siegellack	5.70	Siegellack	5.40
Schellack	5.57	Schwefel	5.39
Schwefel	5.48	Schellack	5.12
Hartgummi I—III	4.82	Hartgummi I—III	4.43
Bernstein I u. II	4.60	Bernstein I u. II	4.40
Bernstein III u. IV	4.18	Bernstein III u. IV	4.11
Hartgummi IV—VI	3.90	Hartgummi IV—VI	3.80
		Glas I u. II	3.18
Glas III u. IV	2.65	Glas III u. IV	2.90

Bei den Holzplatten, den Nickelplatten und den aus einem Schwefelkrystall geschnittenen Platten ist eine Reduktion auf einen Flä-

cheninhalt von 5 cm² nicht ausführbar. Bei einem Flächeninhalt von 7.6 cm² würden die Hartgummiplatten III—VI eine elektrische Dichtigkeit $\varepsilon_\infty = 3.42$ liefern; es würde also die erste Holzplatte eine elektrische Erregung zeigen von derselben Stärke wie die zweite Reihe der Hartgummiplatten. Die bei der Reibung der Nickelplatten an Seide erregte elektrische Dichtigkeit stimmt ebenso überein mit der durch die Reibung einer gleich großen Fläche der ersten Glassorte erzeugten. Die Erregbarkeit der nach der Geradendfläche des Crystalls geschnittenen Schwefelplatte erweist sich als nahezu gleich der Erregbarkeit der zweiten Hartgummisorte; die Erregbarkeit der der Oktaëderfläche parallelen Platte ist geringer. Eine sehr schwache Erregbarkeit zeigt endlich die Holzplatte II.

Aus der Betrachtung der im Vorhergehenden gegebenen Zusammenstellung ergiebt sich Folgendes.

Alle Körper, welche mit Wolle und Seide gerieben egativ elektrisch werden, geben mit Wolle größere elektrische Dichtigkeiten als mit Seide.

Glas, welches bei der Reibung an Wolle und Seide positiv elektrisch wurde, giebt mit Seide eine größere elektrische Dichtigkeit als mit Wolle.

Ordnet man die als Reiber benützten Stoffe nach der bei gleicher reibender Fläche erreichten elektrischen Dichtigkeit, so ist, mit einer einzigen kleinen Ausnahme, die Reihenfolge dieselbe bei Wolle, wie bei Seide.

Besteht für die Spannungen, welche durch Reibung verschiedenartiger Stoffe an ihrer Oberfläche erzeugt werden, ein dem Voltaschen Spannungsgesetze analoges Gesetz, so würde die Differenz der Dichtigkeiten, welche bei der Reibung eines und desselben Körpers an Wolle und Seide auftreten, der Dichtigkeit entsprechen, welche durch Reibung von Seide an Wolle erzeugt wird.

Den in der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Zahlen zufolge schwankt jene Differenz zwischen 0.09 und 0.45; im Mittel ist sie gleich 0.23. Hiernach lassen sich die Resultate, unserer Messungen in der einen Spannungsreihe vereinigen:

Glas I—II	Glas III—IV	Wolle	Seide	Holz II	Nickel
2.95	2.65	0	0.23		
Hartgummi IV—VI		Bernstein III, IV		Bernstein I, II	
Holz I					
3,90		4.18		4.60	

Hartgummi I—III	Schwefel	Schellack	Siegellack
4.82	5.48	5.57	5.70.

Die unter den Stoffen stehenden Zahlen geben die elektrischen Dichtigkeiten in cm, g, sec, welche bei der Reibung von 5 cm² großen Flächen an Wolle erzeugt wurden.

7. Ueber die Zunahme der electrischen Ladung mit wachsender Reibungsstrecke.

Wir haben im vierten Abschnitte die mit den Hartgummiplatten bei der Reibung an Wolle erhaltenen Beobachtungen mit Hülfe der Exponentialformel

$$A = A_\infty\left(1-e^{-\frac{s}{\alpha}}\right)$$

dargestellt. Die Zahl α, welche den Nenner des Exponenten bildet, giebt die Strecke an, über welche der Reiber hinweggeführt werden muß, damit die erreichte Ladung 63 % der schließlichen Ladung beträgt. In diesem Sinne würde die Angabe der Zahl α auch dann zur Charakterisirung der Versuchsergebnisse dienen, wenn das obige Gesetz nur näherungsweise gültig sein würde. Nur bei einem Theile der Beobachtungen lag eine solche Zahl zusammengehörender Werthe von A und s vor, daß eine Berechnung der Wege α versucht werden konnte. Für diese sind im Folgenden die maximalen elektrischen Dichtigkeiten mit den entsprechenden Werthen von α zusammengestellt; die letzteren sind in cm angegeben.

		Wolle		Seide	
		s_∞	α	s_∞	α
Bernstein	I			3.55	39
	III	3.69	41		
Glas	I			2.31	260
	II	3.21	350	3.35	160
	III	1.76	400		
Hartgummi	I	3.88	43	3.30	22
	II	4.54	30	4.18	55
	III	6.00	25	5.34	15
	IV	3.34	37	3.01	25
	V	3.55	33	3.57	37
	VI	5.21	28	4.63	16
Holz	I	3.43	52		
Nickel	I	3.45	32		

		Wolle		Seide	
		ε_∞	α	ε_∞	α
Schellack	I	3.47	46	3.32	35
	II	6.07	63		
Schwefel	I	3.54	83		
	II	5.64	37		
Siegellack	I			3.55	39

Nimmt man von den in dieser Tabelle enthaltenen Werthen die Mittel, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung, welche eine Vergleichung der den einzelnen Stoffen entsprechenden Wege wenigstens der Größen-Ordnung nach gestattet.

	Bernstein	Glas	Hartgummi I—III	Hartgummi IV—VI
α (cm)	40	290	32	29

	Holz	Nickel	Schellack	Schwefel	Siegellack
α (cm)	52	32	51	60	39.

Hiernach ist die Größenordnung von α bei der Mehrzahl der Stoffe dieselbe; nur das Glas zeichnet sich aus durch den großen Betrag, welchen α insbesondere bei der Reibung an Wolle erreicht. Dem entspricht der Umstand, daß bei den Glasplatten die Reibung in der Regel bis zu einer Strecke von 12 m ausgedehnt wurde, um den Maximalbetrag der Ladung zu erhalten, während bei den übrigen Platten eine Strecke von 3 m im Allgemeinen genügend war.

Den von mir früher auf theoretischem Wege abgeleiteten Formeln nach müßte zwischen den Größen ε_∞ und α ein gewisser Zusammenhang bestehen. Bezeichnet man nemlich durch u die Geschwindigkeit, mit welcher der Reiber gegen die geriebene Fläche bewegt wird, durch q den Coëfficienten der Zerstreuung bei der Berührung zwischen Reiber und Reibzeug, durch $\varkappa$ einen Coëfficienten, welcher der elektrischen Spannung zwischen den beiden sich berührenden Flächen proportional ist, so würden die Beziehungen stattfinden

$$\varepsilon_\infty = \varkappa u/q \quad \text{und} \quad \alpha = u/q$$

und es müßte hiernach $\varepsilon_\infty/\alpha$ eine für die Reibung zweier Stoffe charakteristische Constante sein. Man überzeugt sich leicht, daß diese Beziehung durch die in der vorhergehenden Tabelle zusammengestellten Zahlen nicht bestätigt wird. Es mag dieß seine Erklärung zunächst darin finden, daß die Voraussetzungen der Theorie

bei den Versuchen nicht erfüllt sind. Diese letztere beruht auf der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit u. Bei den Versuchen war die Geschwindigkeit am Anfang und Ende der Strecke von 75 cm, welche jeweilig in einem Zuge durchlaufen werden konnte, jedenfalls geringer als in der Mitte derselben. Die Theorie betrachtet ferner die an einander geriebenen Flächen als vollkommen isolirend; sie sieht ab von den Elektricitätsmengen, welche an die Luft und an die nicht berührten Stellen der geriebenen Oberflächen abgegeben werden; sie nimmt endlich keine Rücksicht auf die Aenderung der Ladungen, welche durch diëlektrische Polarisation der Platten bedingt ist. Außerdem muß aber hervorgehoben werden, daß die Werthe von α, wie sie aus den Beobachtungen abgeleitet wurden, mit einer ziemlichen Unsicherheit behaftet sind. Die für Hartgummi mitgetheilten Tabellen zeigen, daß in den einzelnen Beobachtungsreihen zwar die schließlich erreichten Ladungen nahezu dieselben sind, daß aber in der Art des Ansteigens der Ladung große Verschiedenheiten obwalten. Ferner ist die Zahl der zu der Berechnung von α verwendbaren Werthpaare A, s eine sehr kleine, in den meisten Fällen höchstens gleich 3, bei Glas gleich 4—6. Durch diese Umstände wird es bedingt, daß die mitgetheilten Werthe von α im Allgemeinen nur bis auf 10 Einheiten, bei Glas bis auf 50 Einheiten als richtig zu betrachten sind. Die genauere Bestimmung des Zerstreuungskoëfficienten erscheint als eine Aufgabe von großem Interesse. Man kann nemlich vermuthen, daß eine Spannungsreihe existirt für die Constanten $\varkappa$; mit dieser Reihe würden die aus der Beobachtung der maximalen Ladung sich ergebenden nur dann übereinstimmen, wenn die Zerstreuung für alle an einander geriebenen Stoffe die gleiche wäre; Abweichungen verschiedener Reihen können durch die Verschiedenheit der Zerstreuung bedingt sein. Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist mit Sicherheit nachgewiesen, daß der Weg α für Glas wesentlich größer, die Zerstreuung also wesentlich kleiner ist als bei den anderen Stoffen. Würde man also den Uebergang machen von den maximalen Dichtigkeiten ε_∞ zu den Constanten $\varkappa$, so würde zwar die aufgestellte Reihe dieselbe bleiben, aber es würde das Glas der Wolle erheblich näher rücken.

Einfluß der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde.

(Mit 3 Fig.).

Von

P. Drude und W. Nernst.

In den letzten Jahren sind eine Anzahl eigentümlicher Erscheinungen aufgefunden worden, welche in aus metallisch leitendem Materiale gefertigten Platten auftreten, wenn dieselben sich senkrecht zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes befinden und entweder von einem galvanischen oder von einem Wärmestrome durchflossen werden. Es sind dies die von Hall entdeckte Drehung der Aequipotentiallinien eines galvanischen Stromes, die von Righi zuerst beobachtete Widerstandszunahme (Hall'scher Longitudinaleffekt); ferner die thermomagnetischen Transversal- und Longitudinaleffekte, welche in von einem Wärmestrome durchflossenen Platten auftreten (von Ettingshausen und Nernst), sowie die Umkehrungen derselben, nämlich der galvanomagnetische Transversaleffekt (von Ettingshausen) und der galvanomagnetische Longitudinaleffekt (Nernst), welche wiederum in von einem galvanischen Strome durchflossenen Platten beobachtet werden.

Das Interesse, welches den soeben aufgeführten Phänomenen an sich dargebracht werden muß, weil sie einer neuen Wechselwirkung zwischen den magnetischen und elektrischen Kräften sowie der strömenden Wärme ihre Entstehung verdanken, wird noch erhöht dadurch, daß sie allen Anzeichen nach einst eine gewisse Bedeutung erlangen werden, wenn es sich um die Lösung der Frage nach der Natur der galvanischen Stromleitung in den Metallen handelt. So haben wir es denn unternommen, zu dem experimentellen Studium dieser Phänomene einen Beitrag nach einer Seite hin zu bringen, welche bisher nur ganz vereinzelt gestreift wurde, nämlich zu der Frage, wie dieselben, speciell beim Wismuth, von der Temperatur und dem Aggregatzustande beeinflußt werden, und zwar wählten wir unter ihnen die beiden zuerst aufgezählten, weil der Untersuchung der übrigen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nicht unbedeutende Schwierigkeiten im Wege stehen.

Der Elektromagnet, dessen wir uns bei unsern Versuchen bedienten, besitzt aufrechtstehende Schenkel, auf denen zwei Pol-

schuhe horizontal verschoben werden können; dieselbe ist nach den Angaben von Herrn Prof. Riecke gebaut und hat einige Aehnlichkeit mit dem großen Elektromagneten der Berliner Akademie [1]). Der magnetisierende Strom wurde von einer Dynamomaschine geliefert und schwankte bei unsern sämtlichen Versuchen nur wenig um den Mittelwert 10 Ampère; die Intensität des magnetischen Feldes, welche dieser Stromstärke und dem bei unsern Versuchen ebenfalls konstant erhaltenen Abstande der beiden Polschuhe (Länge 20 cm, Breite und Dicke 4 cm) entsprach, betrug etwa 7000 cgs, wie wir aus der Größe des Halleffektes und der Widerstandszunahme des Wismuths schätzten.

Das Galvanometer, an dem der Halleffekt und die Widerstandszunahme gemessen wurde, war eines der bekannten Wiedemann'schen Form; es besitzt zwei dickdrähtige Rollen von zusammen etwa zwei S.E Widerstand und war durch Astasierung auf genügende Empfindlichkeit gebracht. Es befand sich außerdem in hinreichendem Abstande vom Elektromagneten, um nicht von der direkten Fernewirkung desselben in störender Weise beeinflußt zu werden.

Bei messenden Versuchen ist es natürlich unbedingt erforderlich, die zu untersuchenden Platten auf konstanter Temperatur zu erhalten, damit nicht durch Thermoströme und durch die Beeinflussung, welche diese und die in der Platte verlaufenden Wärmeströmungen durch den Magnetismus erfahren, die Beobachtung der betreffenden Wirkungen unmöglich gemacht oder wenigstens sehr gestört würde. Wir erzielten die gewünschten hohen Temperaturen durch Dampfbäder, in welche die Platten direkt eintauchten; als Heizflüssigkeiten verwendeten wir Wasser (Siedepunkt 100°) Benzoesäureamylester (254°) und Diphenylamin (310°).

Der Erhitzungsapparat mußte im Hinblick darauf konstruiert werden, daß der zur Verfügung stehende Raum bei der geringen Ausdehnung, welche man einem magnetischen Felde geben darf, wenn man nicht auf Homogenität und Stärke verzichten will, ein sehr beschränkbar ist. Wir haben schließlich den beistehend (Fig. 1) abgebildeten Apparat als in jeder Hinsicht zweckmäßig gefunden; dieselbe besteht aus einem 7 cm breiten, 23 cm hohen und 1 cm dicken Kasten, welcher aus 0·8 mm dicken Messingblech gefertigt und in allen seinen Theilen hart gelöthet war. Der Kasten wurde zwischen die Polschuhe *PP* des Elektromagnets

1) Man sehe die Zeichnung bei Quincke, Wied. Ann. 24. 359 (1885).

fest eingeklemmt (cf. Fig. 1), an der direkten Berührung jedoch durch Asbestpappe gehindert. Um ein Entweichen der siedenden Dämpfe zu verhüten, waren an sein oberes Ende zwei Messingkästen angelöthet, welche mit Wasser gefüllt nach Art eines Rückflußkühlers in so vollständiger Weise wirkten, daß ein Verschluß des mittleren Kasten überflüssig war, ein Umstand, welcher der bequemen Einführung der zu untersuchenden Platten im hohen Grade förderlich war. In die unmittelbare Nähe der Platten wurde stets die Quecksilberkugel eines Thermometers gebracht. Um einerseits eine intensive Erwärmung des Kastens zu erzielen, andrerseits aber die Rollen des Elektromagnets, welche für die Anbringung der Heizflammen nur einen sehr beschränkten Raum übrig ließen, nicht der Gefahr des Verbrennens auszusetzen, konstruierten wir aus einem einseitig geschlossenen und seitwärts mit fünf Löchern versehenen Messingrohre einen Brenner, der mit einem Gemisch von Leuchtgas und Luft gespeist wurde; letzteres wurde dadurch erzeugt, daß ein vor den Brenner geschaltetes *T*-Rohr mit der Gasleitung und mit einem Wassergebläse kommunizierte. Diese Vorrichtung gefährdete die Umspinnung der Rollen, welche durch Messingbleche vor direkter Strahlung geschützt wurden, nicht im geringsten und lieferte zugleich Wärme genug, um auch die hochsiedenden Flüssigkeiten nach wenigen Minuten in heftiges Kochen zu bringen.

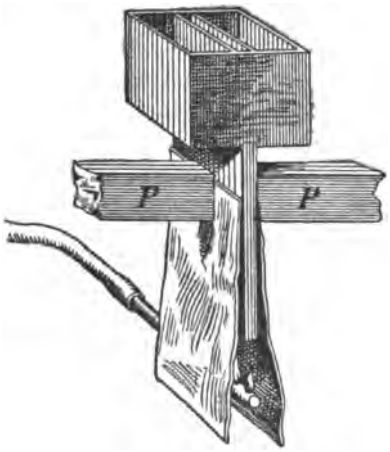


Fig. 1.

Das bei den nachstehend beschriebenen Versuchen benutzte Wismuth schmolz bei 267° und war jedenfalls sehr rein; es ist gleicher Herkunft wie dasjenige, welches das Material zu Platte No. II lieferte, die früher[1]) von mir bezüglich der Hall'schen Wirkung eingehend untersucht worden ist, und hat auch sonst mehrfach zu ähnlichen Versuchen gedient.

Hallphänomen im Wismuth. Eine quadratförmige, 0·5 cm dicke Wismuthplatte war mit vier an den Mitten ihrer

1) von Ettingshausen u. Nernst, Wiener Sitzungeber. 94. 592 (1886). Vgl. auch Nernst, Wied. Ann. 31. 772 (1887).

Seiten angeschmolzenen Kupferdrähten versehen, von denen alternierend zwei zu einem Bunsenelemente, welches den Primärstrom lieferte, und zwei zum Galvanometer führten, an dem der Transversaleffekt beobachtet wurde. Indem so die Anwendung von Loth vermieden war, konnte die Platte bis auf den Schmelzpunkt nahe Temperaturen erhitzt werden, ohne daß die Zuleitungen, welche gleichzeitig der Platte als Träger dienten, sich lösten. Als die letztere in der untenstehenden Reihenfolge auf die Temperaturen t gebracht wurde, beobachteten wir folgende, auf gleichen Primärstrom bezogene elektromotorischer Kräfte e des Hall'schen Stromes, diejenige bei der Anfangstemperatur gleich eins gesetzt.

t	e
20°	1·000
254°	0·418
23°	1·005.

Da nach obigen Zahlen der Halleffekt kurz vor dem Schmelzpunkte, wenn auch erheblich schwächer wie bei gewöhnlicher Temperatur, doch immerhin in mit anderen Metallen verglichen großer Stärke zu konstatieren war, so erschien der Versuch, denselben auch in flüssigem Wismuth zu untersuchen, besonders verlockend, weil man aus dessen Verhalten am ehesten zu schließen geneigt sein wird, ob das Hall'sche Phänomen vorwiegend an den krystallinischen Zustand gebunden ist oder nicht. Der diesbezügliche Versuch ergab, daß bei der zur Verwendung gelangten Probe von geschmolzenen Wismuth das Hall'sche Drehungsvermögen, wenn überhaupt meßbar, so doch sicherlich weniger wie $^1/_{60}$, wahrscheinlich weniger wie $^1/_{100}$ von dem bei Zimmertemperatur beobachteten Werte beträgt.

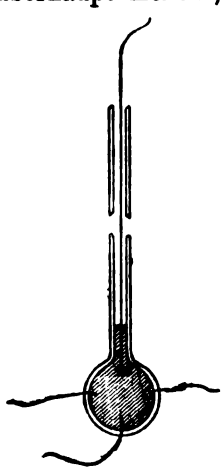


Fig. 2.

Die Untersuchung des geschmolzenen Wismuths gelang in einer unten zugeschmolzenen, aufgeblasenen und hierauf platt gedrückten Glasröhre, welche mit drei eingeschmolzenen Platindrähten versehen war (cf. Fig. 2). Die vierte Zuleitung geschah mittelst eines von oben eingeführten Platindrahtes. Das Rohr wurde leer in den Dampf des siedenden Diphenylamins gebracht, hierauf mit Wismuth beschickt, indem dieses in kleinen Stückchen durch das 0·5 cm weite Glasrohr hineingeworfen wurde, und sodann unter den gleichen Bedingungen wie die erste Platte untersucht. Mit Kommutieren des magnetisierenden Stromes trat allerdings

eine deutliche Ablenkung auf, die jedoch mit der Richtung des Primärstromes nicht die eigne wechselte, also keinesfalls von einer Hall'schen Wirkung herrührte. Worauf dieselbe beruht, müssen wir vorläufig dahingestellt sein lassen; sie verschwand, als man den Primärstrom öffnete, schien jedoch im übrigen mehr sekundären Ursprungs zu sein. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist sie an den flüssigen Zustand gebunden, wie daraus geschlossen werden kann, daß eine ähnliche Wirkung und zwar etwa gleich stark auch dann auftrat, als der Apparat mit Quecksilber anstatt mit flüssigem Wismuth beschickt war (s. u.), und daß sie verschwand, sowie das Wismuth erstarrte.

Unmittelbar nachdem das Wismuth fest geworden und bis auf 50° abgekühlt war, wobei wider Erwarten das Glasgefäß von dem beim Ersteren sich ausdehnenden Wismuth nicht gesprengt wurde, konnten wir den Halleffekt in einer der Dicke der Platte entsprechenden Größe beobachten; bei weiterer Abkühlung bis auf 15° wurde er um etwa 2 % kleiner.

Mit der unveränderten Platte stellten wir hierauf, um uns über die Abhängigkeit des Transversaleffektes von der Temperatur bis in die Nähe des Schmelzpunktes zu orientiren, folgende Messungen an:

t	e
14°	1·00
243°	0·23
100°	1·23
14°	1·16.

Das Wismuth kehrte beim Abkühlen somit nicht ganz in den früheren Zustand zurück, eine bei der vielfach beobachteten Abhängigkeit des Transversaleffektes von der Behandlung, welche man dem Metall hat angedeihen lassen, nicht unerwartete Erscheinung. Auch dieser Versuch zeigt, daß das Hall'sche Drehungsvermögen beim Abkühlen von 100° auf 14° abnimmt, was mit einer älteren Beobachtung in Uebereinstimmung sich befindet[1]); die Abnahme desselben bei höherer Temperatur ist hier nicht unerheblich größer wie bei der ersten Platte. Jedenfalls ist aber die Abnahme in dem Intervall von 243° bis 310°, in welches die Verflüssigung des Wismuths fällt, eine außerordentlich viel stärkere, wie in dem ganzen übrigen untersuchten.

Widerstandszunahme des Wismuths im Magnet-

1) von Ettingshausen und Nernst, Wiener Sitzungsber. 94. 593 (1886). Eine zweite, aus Wismuth anderer Herkunft gefertigte Platte hingegen lieferte bei den Temperaturen 0, 21, 99° für das Drehungsvermögen die Werte 8·1, 7·3, 4·1, zeigte also eine starke Abnahme schon bei gewöhnlicher Temperatur. Vgl. auch Léduc, C.R. 102. 358 (1886).

felde. Wie bekannt[1]) übt der Magnetismus außer dem Halleffekt noch eine zweite Wirkung auf ein von einem galvanischen Strome senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes durchflossene Wismuthplatte aus, welche gewöhnlich als Widerstandsänderung gedeutet wird, aber natürlich mit gleichem Rechte als eine durch den Magnetismus erzeugte elektromotorische Gegenkraft, d. h. als longitudinaler Halleffekt aufgefaßt werden kann[2]).

Ueber den Einfluß der Temperatur auf die Größe dieses Effektes liegen bis jetzt nur einige vereinzelte Angaben vor, welche sich auf ein beschränktes Intervall erstrecken. So konstatierte bereits Righi (l. c.), daß bis 100° die Widerstandsvermehrung infolge Erregung des Magnetfeldes kleiner wird. E. von Aubel[3]) theilte kürzlich einen Versuch mit, wonach dieselbe bei 99·7° nur 0·415 % betrug, während sie unter sonst gleichen Umständen bei 0° 2·9 % war, konstatierte also eine sehr bedeutende Veränderlichkeit mit der Temperatur, was die nun mitzuteilenden eigenen Versuche durchaus bestätigen.

Bei unseren Messungen, welche sich wiederum bis über den Schmelzpunkt hinaus erstrecken, befand sich das Wismuth im Innern einer dünnwandigen Glaskapillare, welche senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes in den Erhitzungsapparat eingeführt wurde (cf. Fig. 3). Die Zuleitungen des Primärstroms und die Ableitungen zum Galvanometer wurden durch je zwei, zur gegenseitigen Isolation mit Glaskapillaren überzogene Platindrähte vermittelt. Der Ausschlag, welchen das Galvanometer bei geschlossenem Primärstrome anzeigt, ist dem Widerstande des Wismuthstäbchens proportional und kann durch ihn die Zunahme dieses bequem gemessen werden. Zur besseren Ausnützung der Skala des Galvanometers wurde gewöhnlich mittelst einer durch Abzweigung von einem Hülfselemente erzeugten elektromotorischen Kraft der Aussschlag kompensiert. Diese Methode hat den großen Vortheil, unabhängig von etwaigen Uebergangswiderständen zu sein, welche an den Zuleitungen zum Wismuth ihren Sitz haben könnten. Auch die Glaskapillaren sprangen nicht, wenn das Wismuth wieder festen Aggregatzustand annahm.

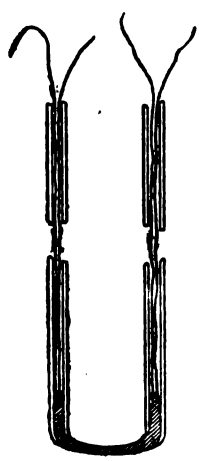


Fig. 3.

1) Righi, Journ. de Phys. [2]. 3. 355 (1884).
2) Nernst, Wied. Ann. 31. 783 (1887).
3) E. von Aubel, Phil. Mag. [5]. 28. 342 (1889).

In der folgenden Tabelle sind die bei den daneben stehenden Temperaturen t beobachteten Werthe für die Widerstandszunahme infolge der Magnetisierung Δw in % verzeichnet; in der dritten Kolumne befindet sich der Widerstand w des Wismuthstäbchens in SE.

t	Δw	w
16°	21·9	0·250
100°	8·0	0·227
223°	0·96	0·250
290°	0·41	0·117
35°	15·1	0·207
18°	18·6	0·208.

Die Zahlen sind in der Reihenfolge mitgetheilt, in der wir sie erhielten; zwischen der vorletzten und letzten Messung lag ein Zeitraum von mehreren Stunden. Sowohl an der Widerstandszunahme wie besonders an seiner absoluten Größe ohne den Einfluß des Magnetismus ist deutlich erkennbar, daß beim Abkühlen sich der frühere Zustand nicht genau wieder herstellte. Möglicherweise wirkte hier eine Auflösung des Platins der Zuleitungsdrähte im geschmolzenen Wismuth mit, welche bei der leichten Legierbarkeit dieser Metalle mindestens spurenweise erfolgen muß.

Bei 290° war das Wismuth geschmolzen; die Erscheinung, daß der specifische Widerstand dieses Metalles beim Schmelzpunkte plötzlich sehr viel kleiner wird, ist bereits wiederholt [1]) beobachtet worden und findet sich auch in den von uns für w gefundenen Werten ganz auffallend wieder. Die Widerstandszunahme des flüssigen Wismuths infolge der Magnetisierung war unzweifelhaft vorhanden, wenn auch außerordentlich viel kleiner, wie die des festen Metalls bei gewöhnlicher Temperatur. Ob dieselbe in beiden Fällen einer gleichen Wirkung entspringt, oder ob vielleicht Strömungen, welche infolge der vom Elektromagneten auf den flüssigen Leiter ausgeübten ponderomotorischen Kraft entstehen können, eine sekundäre Rolle spielen, muß vorläufig dahingestellt werden [2]). Jedenfalls zeigen longitudinaler wie transversaler Hall-

1) Insbesondere sind unsere Resultate im Einklang mit den Beobachtungen von C. L. Weber (Wied. Ann. 27 1886, p. 145), sowohl was die bedeutende Widerstandsabnahme beim Schmelzen, wie den Umstand anlangt, daß beim Abkühlen sich häufig der frühere Zustand nicht wieder herstellt.

2) Für die letztere Annahme spricht ein inzwischen von uns angestellter Versuch, wonach auch Quecksilber bei Zimmertemperatur in gleicher Weise untersucht eine nach einigen ‰ zählende, unzweifelhafte Widerstandszunahme zeigte. (Anm. bei der Correktur.)

effekt beide die Erscheinung, daß sie bei hoher Temperatur an Intensität sehr stark abnehmen; aber der Grad der Abnahme geht keineswegs bei beiden parallel. Während die Widerstandszunahme schon bei erheblich unter dem Schmelzpunkte liegenden Temperaturen einen sehr kleinen Betrag annimmt, liegt beim Halleffekt das Gebiet der rapiden Abnahme entweder sehr nahe beim Schmelzpunkt oder aber er verschwindet plötzlich, wenn das Wismuth den flüssigen Aggregatzustand annimmt. Die Entscheidung zwischen letzteren beiden Möglichkeiten dürfte erhebliches Interesse bieten, war uns zu treffen bisher aber nicht möglich.

Mit einer zweiten von Wismuth gleicher Herkunft beschickten Kapillare fanden wir die Werte:

t	Δw
29°	16 %
310°	0·1 %
254°	1·2 %
32°	20 %
100°	9·1 %
34°	22.0 %

und mit einer dritten:

t	Δw
25°	33·3 %
310°	0·4 %.

Resultate, welche mit dem früheren Ergebnis in Uebereinstimmung sich befinden.

Aus den bisherigen Ergebnissen kann man wohl mit einiger Sicherheit den Schluß ziehen, daß auch die thermomagnetischen Phänomene bei hohen Temperaturen an Stärke bedeutend einbüßen werden; thatsächlich ist denn auch bereits früher von Einem von uns eine Abnahme derselben mit zunehmender Temperatur mehrfach konstatiert worden[1]). Denn wenn auch eine zahlenmäßige Beziehung zwischen den Intensitäten, mit welchen die verschiedenen magnetischen Effekte des Wismuths auftreten, bisher sich nicht hat auffinden lassen, so ist doch ein inniger Zusammenhang durch die Versuche an Wismuth-Zinnlegirungen[2]) wohl außer Zweifel gestellt.

Vielleicht wird einst bei der Beantwortung der Frage, welche Eigenschaften die Aktivität der Metalle im magnetischen Felde bestimmen, die große Veränderlichkeit derselben mit der Tempe-

1) Nernst, l. c. 772 und 781.

2) E. v. Ettinghausen und Nernst, Wied. Ann. 33. 790 (1888).

ratur beim Wismuth, des aktivsten aller Metalle, einen Fingerzeig bieten. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, daß bekanntlich Wismuth bei höherer Temperatur die für dies Metall so charakteristische Sprödigkeit verliert und sich in Drathform pressen [1]), ja sogar bei Temperaturen von 230 bis 260° mit Anwendung einiger Kraft kneten läßt [2]). Es stimmt dies auch mit den sonstigen Erscheinungen überein; denn es läßt sich im Großen und Ganzen nicht verkennen, daß auch außer Wismuth gerade die durch ihre Sprödigkeit ausgezeichneten, metallisch leitenden Stoffe, wie Kohle, Antimon und besonders Tellur, sich besonders aktiv erweisen.

Hallphänomen im Antimon. In der gleichen Weise, wie beim Wismuth, bestimmten wir auch beim Antimon den Einfluß der Temperatur, wobei wir uns einer viereckigen Platte, welche mit vier am Rande als Elektroden mittelst einer Stichflamme angeschmolzenen Platindrähten versehen war und eine Dicke von 0·201 cm besaß, bedienten. Wir erhielten der Reihe nach folgende Werte:

t	e
17°	1
210°	0·78
250°	0·72
30°	0.76
23°	0.91.

Es fällt bei diesen Zahlen auf, wie geringfügig der Einfluß der Temperatur beim Antimon verglichen mit Wismuth ist. Hiermit steht vielleicht wieder der Umstand in Zusammenhang, daß Antimon sich erst bei erheblich höheren Temperaturen als Wismuth und auch da nur mit Anwendung viel größeren Druckes zu Draht pressen läßt [3]).

Hallphänomen im Quecksilber. In dem gleichen Apparate, in welchem geschmolzenes Wismuth zur Untersuchung gelangt war (Fig. 2), wurde Quecksilber der Messung unterworfen. Wir beobachteten, wie schon erwähnt, einen deutlichen Ausschlag bei Kommutieren des magnetisierenden Stromes, welcher jedoch mit der Richtung des das Quecksilber durchfließenden Stromes die eigene nicht wechselte und demgemäß nicht von einer Hall'schen Wirkung herrührte; und zwar betrugen die wegen der direkten Fernewirkung des Elektromagnets auf die Galvanometernadel korrigierten Nadelausweichungeen bei beiden Richtungen des

1) Matthiessen, Pogg. Ann. 100. 177 (1857).
2) Ph. Lenard, Wied. Ann. 39. 641 (1890).
3) Lenard l. c. 639.

Primärstromes 49 bez. 46 Skalentheile. Das Quecksilber hatte Zimmertemperatur. Als das Glasgefäß, in welchem sich jenes befand, zur Verminderung etwaiger durch Peltiereffekte oder Joule'schen Wärme erzeugter Temperaturverschiedenheiten in ein Gefäß mit Wasser gesetzt wurde, betrugen unter sonst gleichen Umständen die bei den Erregungen des Magneten auftretenden Ausschläge 53 bez. 48 Skalentheile. Bei der Größe der störenden Nebenwirkung wäre es gewagt, die halben Differenzen, welche in beiden Fällen mit gleichem Vorzeichen bei Umkehr des Primärstomes auftreten und 1·5 im ersten, 2·5 Skalentheile im zweiten Falle betragen, als Hall'sche Wirkung zu deuten; doch sei der Vollständigkeit halber angeführt, daß dieselben einer Hall'schen Wirkung entsprechen würden, welche in gleicher Richtung aber etwa 300 mal schwächer aufträte, wie beim Wismuth unter sonst gleichen Bedingungen.

Göttingen, Physikal. Inst. Oct. 1890.

Anhang.

Es wurde vor einiger Zeit das Wismuth auf eine eventuelle Aenderung seiner optischen Konstanten im Magnetfelde durch Beobachtung von reflectirtem Lichte untersucht[1]); das einfallende Licht war linear unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisiert. Es wurde eine Wismuthsorte untersucht von großer Reinheit, welche bei den oben angeführten Versuchen eine starke Widerstandsänderung im Magnetfelde zeigte und eine weniger reine Sorte, welche nicht hinsichtlich des letzteren Verhaltens geprüft ist.

Die beiden Pole des Elektromagneten waren stets sehr genähert, zum Theil bis auf 3 mm. Wenn der Gang der Lichtstrahlen es gestattete, waren die Wismuthspiegel in der Mitte zwischen den Polen angebracht, sodaß sie sich in sehr starkem magnetischem Felde befanden.

Es wurden die drei Fälle untersucht: 1) daß die Kraftlinien senkrecht zum Spiegel verliefen, oder 2) parallel dem Spiegel und in der Einfallsebene des Lichtes oder 3) parallel dem Spiegel und senkrecht zur Einfallsebene. In keinem Falle war eine Aenderung der optischen Konstanten zu constatiren weder eine solche, welche sich mit der Magnetisirungs-Richtung umkehrte, noch eine solche, welche von der Richtung unabhängig und die eventuell nur an das Vorhandensein des magnetischen Feldes überhaupt geknüpft

1) Die hier beschriebenen Messungen sind von P. Drude angestellt.

gewesen wäre. Dieser letztere Fall wäre ja denkbar gewesen, wenn die Aenderung der optischen Konstanten des Wismuths ganz parallel verliefe mit der des elektrischen Widerstandes. Dieser ist ja bekanntlich von der Magnetisirungs-Richtung unabhängig, jedoch verschieden parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien. Im letzteren Falle müßte der Wismuthspiegel sich wie ein reflectirender absorbirender Krystall verhalten und diese Erscheinung müßte daran zu erkennen sein, daß die elliptische Polarisation des reflectirten Lichtes durch Erregung des Magnetfeldes geändert und dann von der Lage der Einfallsebene abhängig würde. In keinem Falle war aber eine solche Modifikation deutlich zu bemerken, indem sowohl die relative Phasenverzögerung als auch das Amplitudenverhältniß des reflectirten Lichtes bei unerregtem magnetischen Felde dieselben waren, wie bei erregtem und zwar in allen oben angeführten drei Versuchsanordnungen.

Wenn eine Aenderung der Natur des reflectirten Lichtes eintreten sollte, welche sich mit der Magnetisirungs-Richtung umkehrt, so würde dies ein dem von Kerr entdeckten Verhalten der magnetischen Metalle Eisen, Nickel, Kobalt analoges Phänomen sein. Um eine solche eventuelle Aenderung noch besser entdecken zu können, wurde mit sehr intensivem weißen Lichte beobachtet, welches in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt war. Eine Drehung der Polarisationsebene in dem Betrage von 1′ wäre noch zu constatiren gewesen. Es war aber eine solche nicht vorhanden. Bei einem Stahlspiegel war bei denselben Versuchsanordnungen das Kerr'sche Phänomen sehr deutlich zu beobachten, unter gewissen Bedingungen[1]) ergaben sich Drehungen der reflectirten Polarisationsebene bei commutirtem Magnetfeld bis zum Betrage von 32′.

Das sich aus meinen Beobachtungen ergebende negative Resultat am Wismuth befindet sich im Widerspruch mit Beobachtungen Herrn Hurion's[2]), nach welchem am Wismuth das Kerr'sche Phänomen bei senkrechter Incidenz den Betrage von 18′ erreichen soll. Ich halte indeß dieses Beobachtungsresultat nicht für sicher, da das Licht zweimal eine Glasplatte durchsetzte, welche der Polarisationsebene eine sehr starke elektromagnetische Drehung ertheilte. Bei meiner Versuchsanordnung waren solche Glasplatten vermieden und das Resultat ist aus derselben also jedenfalls in direkterer Weise abgeleitet, als bei Herrn Hurion.

1) Wenn nämlich die magnetische Axe senkrecht zum Spiegel stand, der Einfallswinkel 68° betrug und das einfallende Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt war

2) Hurion, Journal de Physique 1884.

Ueber die Größe der Wirkungssphäre der Molecular-Kräfte und die Constitution von Lamellen der Plateau'schen Glycerin-Seifen-Lösung.

Von

P. Drude.

Die Untersuchung dünner Flüssigkeitslamellen bietet von zwei Gesichtspunkten aus gewisses physikalisches Interesse, insofern als dieselbe

1) zur Beantwortung der Frage dienen kann, an welche Bedingungen das Zustandekommen einer dünnen Lamelle geknüpft ist;

2) einen Beitrag zu der Vorstellung von der Größe der Wirkungssphäre der Molecularkräfte liefern kann.

Hinsichtlich des ersten Punktes geht bekanntlich die Plateau'schen Ansicht dahin[1]), daß eine Flüssigkeit dann im Stande ist, dauerhafte Lamellen zu bilden, wenn sich eine geringe Oberflächenspannung verknüpft mit einer großen Zähigkeit der Oberfläche. Diese Bedingungen sind bei der Glycerin-Seifenlösung erfüllt. Die Oberflächenspannung ist verhältnißmäßig gering und außerdem haben direkte Versuche Plateau's eine bedeutende Reibung in ihrer Oberfläche constatirt, die bei weitem größer ist, als im Innern derselben. Diese Versuche sind später von Herrn Oberbeck[2]) bestätigt.

Es würde demnach die genannte Flüssigkeit nicht im Ganzen homogen sein, sondern sie müßte eine Oberflächenschicht mit bedeutend gegen das Innere gesteigerter Zähigkeit, quasi ein festes Häutchen besitzen. Wie sich dieses bilden kann, mag hier unerörtert bleiben.

Die Ansicht, daß eine Seifenlösung mit einer Oberflächenschicht bedeckt sei, welche zu ihrer Bildung eine endliche Zeit nöthig hat, hat eine Stütze durch Versuche von Dupré[3]) und Lord Rayleigh[4]) gefunden, welche constatirten, daß die Oberflächenspannung von Seifenlösungen nach der Methode der Wellenlängenmessung eines frisch sich aus dem Innern der Lösung gebildeten ca-

1) Plateau, Statique des Liquides.
2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 11, p. 634. 1887.
3) Dupré, Theorie mécanique de la chaleur. § 161.
4) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 28. März 1890.

pillaren Strahles gemessen ungefähr der des reinen Wassers gleich ist, während sie nach den gewöhnlichen statischen Methoden viel kleiner ausfällt.

Um gewisse Anhaltspunkte für die Beurtheilung der Größe der Wirkungssphäre der Molecularkäfte zu gewinnen, hat man die Flüssigkeitslamellen auf Grund folgender Ueberlegungen benutzt:

Falls die Dicke einer Flüssigkeitsschicht kleiner wird, als der doppelte Radius der Wirkungssphäre, so muß ihre Oberflächenspannung abnehmen. Infolge hiervon würde die Lamelle an einer solchen Stelle, deren Dicke unterhalb jener Größe liegt, durch Wirkung der Nachbarstellen mit größerer Oberflächenspannung noch weiter verdünnt werden, d. h. die Lamelle wäre in instabilem Gleichgewicht und würde platzen. Aus der geringsten möglichen Dicke einer Seifenlamelle hat man daher eine obere Grenze für den Radius der Wirkungssphäre der Molecularkräfte abgeleitet, Plateau bestimmt sie so zu 59.10^{-6} mm, indem die kleinste beobachtete Dicke bei Seifenlamellen 118.10^{-6} mm war.

In neuerer Zeit hat Herr Sohncke[1]) eine untere Grenze für den genannten Radius aus Versuchen über die Ausbreitung von Oeltropfen auf Wasser abgeleitet, wobei man von der Ansicht ausgehen muß, daß das Zerplatzen des Tropfens wirklich erst dann stattfindet, wenn die Dicke oder die doppelte Dicke die Größe jenes Radius erreicht. Die gewonnenen Zahlen schließen sich nahe an die Plateau'sche obere Grenze an.

Mit diesen Werthen stimmen überraschend gut die von Herrn Quincke[2]) gegebenen Zahlen über die Größe der Wirkungssphäre in Metallen, welche aus Beobachtungen des Randwinkels von Flüssigkeiten an Metall-Keilen abgeleitet sind.

Wenn man der Vorstellung beipflichtet, daß die Wirkungssphäre der Molecularkräfte ungefähr unabhängig von der Substanz und besonderen Art der physikalischen Erscheinung, bei der sie in Wirksamkeit treten, sind, eine Vorstellung, welche die eben angeführten Versuche zu einer plausiblen machen können, so widersprechen ihr wieder Versuche von Hrn. Oberbeck[3]), welcher aus dem Verhalten der elektrischen Potentialdifferenz zweier Metalle die Wirkungssphäre zu nur 1 bis 2.10^{-6} mm angiebt. Auch konnten die Herren Warburg und Ihmori[4]) Spuren von mole-

1) L. Sohncke, Wied. Ann. 40. p. 345. 1890.
2) Q. Quincke, Pogg. Ann. 137. p. 402. 1869.
3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 31. p. 337. 1887.
4) E. Warburg und T. Ihmori, Wied. Ann. 27. p. 481. 1886.

cularer Attraction des Wassers an Glas noch nicht in einer Entfernung von 2.10^{-6} mm nachweisen.

Ferner lehren neuere Versuche der Herren Röntgen[1]) und Lord Rayleigh[2]), daß sich Fettschichten auf reinem Wasser bis zu einer weit geringeren Dicke (etwas unter 2.10^{-6} mm) ausbreiten, als wie die oben citirten Sohncke'schen Versuche ergeben.

Schließlich können auch die Plateau'schen Zahlen hinsichtlich der geringstmöglichen Dicke von Seifenlamellen noch weit verkleinert werden. Unter geeigneten Versuchsbedingungen zeigen nämlich Seifenlamellen schwarze Flecke, deren Dicke weit unter 118.10^{-6} mm liegen muß. — Ich habe gefunden, daß sie sich am besten ausbilden als horizontale Lamellen an vertikalen Glaswänden. Ich habe so kreisrunde Flecke von 5 cm Durchmesser erhalten. Noch größere erhält man in einer verschlossenen Flasche, welche die Lösung enthält und in welcher durch Schütteln Lamellen gebildet werden.

Eigenthümlich ist das scharfe Absetzen des schwarzen Theiles gegenüber dem farbigen, was auf einen plötzlichen Sprung in der Dicke hindeutet.

Auf die mir denkbare Erklärung dieses Verhaltens will ich nachher eingehen.

Die Dicke dieser schwarzen Flecke ist von den Herren Reinold und Rücker[3]) aus der Beobachtung des elektrischen Leitungswiderstandes zu 12.10^{-6} mm bestimmt.

Hiernach müßte man, auf Grund der Ueberlegung, daß bei einer Lamelle die kleinste mögliche Dicke die doppelte obere Grenze der Wirkungssphäre ihrer Molecularkräfte sein muß, weil sie sonst unstabil wird, letztere zu 6.10^{-6} mm annehmen, also bedeutend kleiner als die oben angeführten Zahlen.

Am besten kann man die Frsge, ob die Molecularkräfte noch auf eine Distanz wirken, welche gleich der halben Dicke der schwarzen Flecke ist, beantworten, wenn man die Oberflächenspannung der schwarzen Flecke direkt vergleicht mit der der farbigen Theile.

Schon vor etlichen Jahren glaubte Hr. Lüdtge[4]) einen Unterschied in der Oberflächenspannung verschieden dicker Seifenlamellen constatirt zu haben. Durch Messung der Dimensionen von

---

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 41. p. 321. 1890.
2) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 28. März 1890.
3) A. W. Reinold and A. W. Rücker, Proc. Roy. Soc. p. 334. 1877.
4) Lüdtge, Pogg. Ann. 139. p. 628. 1844.

Seifenkalotten, die an den beiden Enden ein und desselben Rohres angebracht waren, erhielt er das Resultat, daß an der früher gebildeten, d. h. dünneren Lamelle der Krümmungsradius, d. h. auch die Oberflächenspannung größer sei, als an einer dickeren Lamelle. Dies Resultat würde mit den theoretischen Ansichten in Widerspruch stehen.

Diese Beobachtungen sind später von Hrn. Mensbrugghe[1]) wiederholt und zwar in der That mit ganz anderem Resultate: Es zeigte sich gar kein Unterschied im Krümmungsradius bei dünnen und dicken Lamellen, falls der Ueberdruck auf den Seiten der Lamelle der gleiche war. — Indeß bezogen sich diese Messungen immer nur auf noch gefärbte Lamellen und die Methode der Dimensionsbestimmung der Kugelkalotte gestattete nur einen Mittelwerth des Krümmungsradius im Ganzen, d. h. einen Mittelwerth der Oberflächenspannung der an verschiedenen Stellen verschieden dicken Lamelle zu bestimmen.

Ich habe durch Messung des Krümmungsradius einer über einem Gefäß gebildeten Lamelle, welches dasselbe abschloß und einen geringen Ueberdruck im Innern enthielt, die Oberflächenspannung derselben in verschiedenen Dicken bis zu der der schwarzen Flecke hin verglichen. — Die Methode war die, daß die Größe des virtuellen Bildes, welches die flachkugelförmig aufgeblasene Lamelle von einem Gegenstande entwarf, in einem stark vergrößernden Fernrohr mit einem Okular-Schrauben-Mikrometer gemessen wurde. Es konnte so eine Aenderung der Bildgröße um $^1/_4$ % noch constatirt werden. — Es wurde eine Lamelle von ungefähr 10 cm Krümmungsradius und eine zweite von ungefähr 14 cm Krümmungsradius untersucht. Bei der Versuchsanordnung hätte eine Aenderung der Größe des Bildes um 1 % einer Aenderung der Größe des Krümmungsradius, d. h. auch einer Aenderung der Größe der Oberflächenspannung um 1,11% resp. 1,16% entsprechen.

Durch eine vor das Objektiv des Fernrohrs gesetzte Blende war es möglich, den Krümmungsradius an einer Stelle der Lamelle von einer Ausdehnung von nur $2^1/_2$ mm im Durchmesser zu beobachten, und durch Verschiebung dieser Blende konnte ich in dicht aufeinander folgenden Zeitmomenten den Krümmungsradius an verschieden gefärbten, d. h. verschieden dicken Stellen der Lamelle messen. Hierdurch war ausgeschlossen, daß eine Temperaturschwankung in dem geschlossenen Gefäß und eine dadurch bedingte Druckschwankung das Resultat beeinflussen konnte.

1) v. d. Mensbrugghe, Pogg. Ann. 141. p. 666. 1845.

Durch die Versuche habe ich constatirt daß die Oberflächenspannung der Lamelle von sehr dicken Stellen, d. h. weiß gefärbten, bis zu den schwarzen Stellen hin sich jedenfalls um nicht $^1/_2$ % ändert. Durch eine besondere Anordnung konnte ich mich noch überzeugen, daß bei der Einstellung der Blende auf die schwarzen Stellen wirklich nur Lichtstrahlen ins Fernrohr gelangten, welche allein von dem schwarzen Theile der Lamelle reflectirt wurden. Die schwarzen Theile hatten bei den Versuchen eine Größe von 3 resp. 5 mm im Durchmesser.

Aus diesen Versuchen könnte man geneigt sein, zu schließen, daß die halbe Dicke der schwarzen Flecke, d. h. wenn man die Reinold-Rücker'schen Zahlen benutzt, eine Dicke von 6.10^{-6} mm eine obere Grenze für die Wirkungssphäre der hier auftretenden Molecularkräfte sei, eine Zahl, die weit unter der Plateau'schen oberen Grenze und der Sohncke'schen unteren Grenze liegt. Diese untere Grenze müßte dann also jedenfalls zu groß sein.

Indeß ist dieser Schluß noch nicht einwandsfrei, weil die schwarzen Lamellentheile eine andere Eigenthümlichkeit besitzen, von welcher ich jetzt sprechen werde.

Durch Beobachtung des Polarisationswinkels kann man an einer dünnen Lamelle den Brechungsexponenten ebenso bestimmen, wie an einer Flüssigkeit, bei welcher Reflexion nur an einer Oberfläche stattfindet. Wir wollen eine solche Flüssigkeit im Gegensatz zur lamellar ausgebreiteten eine massive nennen.

Der Polarisationswinkel wurde mit Hülfe eines Spektrometers mit polarisirendem und analysirendem Nickel gemessen. Es wurde mit Sonnenlicht beleuchtet. Es tritt im Gesichtsfeld des Oculars ein schwarzer farbig gesäumter Streifen auf, durch dessen Einstellung auf das Fadenkreuz des Oculars man das Azimut des Analysators sehr bequem und genau bestimmen kann (bis auf 1'). Solange nun das Licht von einer farbigen Stelle einer Seifenlamelle reflectirt wurde, blieb der schwarze Streifen völlig unverrückt, sowie aber die Reflexion an einer schwarzen Stelle stattfand, sprang der Streifen aus dem Fadenkreuz, und das analysirende Nickel mußte um etwa 17' gedreht werden, um den Streifen wieder ins Fadenkreuz zu bringen.

Bei den Versuchen kam es darauf an, daß der Gang der Lichtstrahlen in den verschiedenen Theilen des Spektrometers genau unverändert blieb, weil sonst sich der schwarze Streifen etwas verschob, allein durch veränderten Gang der Lichtstrahlen. Ferner kam es darauf an, möglichst schnell hintereinander die farbigen Stellen vergleichen zu können mit den schwarzen, um sich

von störender Temperatur und eventuell Feuchtigkeitsänderungen der Umgebung frei zu machen. — Es wurde diesen Anforderungen entsprochen, durch eine geeignete Vorrichtung, die ich an anderer Stelle genauer zu beschreiben gedenke.

Es folgt aus diesem Resultat, das unter verschiedenen Umständen und oft wiederholt ist, daß die schwarzen Theile eine andere optische Natur besitzen, als die farbigen. Der Brechungsexponent der ersteren ist um 1 Einheit der zweiten Decimale kleiner, als der letzteren. Für die farbigen Theile war $n = 1{,}430$, für die schwarzen $n = 1{,}420$.

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Dicke dieser schwarzen Stellen unabhängig von jeder willkührlichen Annahme zu bestimmen. Das Reinold-Rücker'sche Verfahren, die Dicke aus der elektrischen Leitungsfähigkeit zu bestimmen, falls man das specif. Leitungsvermögen der Lösung, zu der man ein elektrolytisch leitendes Salz zusetzt, kennt, ist nicht einwandsfrei. Denn man muß dann die Annahme machen, daß die Concentration des Salzes und die Dissociation in der Lamelle und speciell in ihren schwarzen Theilen dieselbe sei, wie in der massiven Lösung und ebenso das specifische Leitungsvermögen. Letztere Annahme trifft aber sehr wahrscheinlich nicht zu, denn sowie die gewöhnliche innere Reibung an den Oberflächentheilen der Seifenlösung bedeutend größer ist, als im Innern, so würden auch die Salz-Jonen in der Oberfläche, d. h. auch in den schwarzen Stellen einer Lamelle größere Reibungswiderstände, als im Innern der Lösung zu überwinden haben, sodaß das spec. Leitungsvermögen der Lamelle geringer ist, als das der massiven Lösung. Sollte dies zutreffen, so müßten Reinold-Rücker die Dicke zu klein bestimmt haben.

Die Resultate indeß, die sie sonst gewonnen haben, daß nämlich die Dicke der schwarzen Stellen längs ihrer ganzen Ausdehnung constant sei, von der seit ihrer Bildung verflossenen Zeit unabhängig sowie von der Farbe, d. h. Dicke der angrenzenden Theile, ferner stets die gleiche bei verschiedenen Lamellen derselben Flüssigkeit, würden von der obigen Annahme nicht beeinflußt werden.

Ich habe nun in der That die letztgenannten Resultate bestätigt gefunden, während ich die Dicke selbst etwas größer fand, nämlich gleich 17.10^{-6} mm. Die Methode ist die, daß man unter schiefem Einfallswinkel (65—75°) linear polarisirtes Licht von den schwarzen Theilen reflectiren läßt. Wenn der Brechungsexponent bekannt ist, so kann man aus der durch die Reflexion herbeigeführte Drehung der Polarisationsebene des Lichtes sowie der El-

lipticität die Dicke berechnen. Der wahrscheinliche Fehler bei der gewonnenen Zahl ist kleiner als 5 %, ein Umstand, der die Methode empfiehlt, wenn es sich um die Bestimmung von Dicken handelt, welche klein gegen die Wellenlänge des Lichtes sind, wo also die sonst üblichen Methoden versagen.

Die gewonnenen Resultate können zu zwei verschiedenen Schlüssen führen, je nachdem man annimmt, daß die Schicht, welche den schwarzen Fleck bildet, denen n also $= 1{,}42$ ist, auch die farbigen Theile der Lamelle als Oberflächenschicht mit einer Dicke von $8^1/_2.10^{-6}$ mm bedeckt, oder daß sie wirklich nur an den Stellen der schwarzen Theile vorhanden ist. Im ersten Falle würde $8^1/_2.10^{-6}$ mm eine obere Grenze der Wirkungssphäre der Molecularkräfte sein, im letzteren eine untere, ja es könnte die untere Grenze des Molekularradius sogar noch größer sein.

Bleiben wir zunächst noch bei der Betrachtung der ersten Annahme stehen, so kann man sich die überall constante Dicke der schwarzen Stellen, welche sich auch mit der Zeit nicht ändert (ich konnte in einem Zeitraum von 3 Stunden diese Konstanz beobachten), so erklären: die Seifenlamellen, ebenso eine massive Seifenlösung bedeckt sich an der Oberfläche mit einer sehr zähen Haut, deren Brechungsexponent etwas niedriger ist, als der des homogenen Innern. Die schwarzen Stellen entstehen dadurch, daß diese auf beiden Seiten einer Lamelle gebildeten Häute zusammenstoßen, indem die Flüssigkeit zwischen ihnen fortgeschoben ist. Infolge der großen Zähigkeit der Häute bleibt die Dicke der schwarzen Stellen der Zeit nach constant. Daß sie längs der ganzen Ausdehnung dieselbe ist, ergiebt sich nach dieser Vorstellung von selbst. — Diese Ansicht würde eine Stütze erfahren durch die von Plateau und Oberbeck beobachtete Zunahme der inneren Reibung an der Oberfläche, sowie durch die Versuche von Dupré und Rayleigh über den Unterschied der Oberflächenspannung frisch gebildeter und alter Oberflächen von Seifenlösung.

Da eine alte Seifenlamelle nach dieser Ansicht aus einer oberflächlich überall gleichen Schicht besteht, so würde aus der Konstanz ihres Krümmungsradius folgen, daß die Dicke des Häutchens, d. h. 8.10^{-6} mm eine obere Grenze für die Wirkungssphäre der Molecular-Kräfte ist, d. h. daß sie weiter jedenfalls nicht wirken.

Die Möglichkeit einer Flüssigkeit, dauerhafte Lamellen zu bilden, wäre danach geknüpft an das Zustandekommen einer zähen Oberflächenschicht.

Ich wende mich jetzt zu der zweiten Annahme, daß nämlich die farbigen Lamellentheile eine homogene Schicht vom Brechungs-

exponenten 1,43 bilden, während die schwarzen Stellen eine davon verschiedene Zusammensetzung und den Brechungsexponenten 1,42 besitzen. — Man könnte dieser Annahme folgende Vorstellungen zu Grunde legen: Angenommen die farbige Lamelle erreicht durch allmähliges Herabrinnen der Flüssigkeitstheile eine Dicke, welche etwas kleiner als die doppelte Wirkungssphäre der Molecularkräfte ist. Die Oberflächenspannung wird dadurch kleiner, und infolge der größeren Oberflächenspannung der Nachbartheile wird die Dicke an der betrachteten Stelle rapide verringert. Falls die Dicke innerhalb des doppelten Wirkungsradius liegt, ist aber jedenfalls auch die Dampfspannung des in der Seifenlösung enthaltenen Wassers eine andere, als in der massiven Lösung, oder in einer dickeren Lamelle. Die Lamelle enthält nun im Gleichgewichtszustande soviel Wasser, daß der Dampfdruck in ihr gleich ist dem Dampfdruck des Wassers in der umgebenden Luft. Wenn der Dampfdruck einer unterhalb der fraglichen Dicke liegenden Lamelle kleiner ist, als der der farbigen, d. h. sehr dicken Lamellentheile, so wird eine solch dünne Stelle daher Wasser aus der umgebenden Luft aufnehmen. Durch einen größeren Wassergehalt wird die Oberflächenspannung zunehmen. Die Lamelle wird daher bis auf eine solche Dünne herabsinken, daß durch das aufgenommene Wasser die dünnen Stellen eine Oberflächenspannung besitzen, welche gleich ist der Oberflächenspannung der dickeren, weniger Wasser enthaltenden angrenzenden Lamellen-Theile. Dann ist nämlich der Zustand wieder ein stabiler, denn ein weiteres Abnehmen der Dicke würde eine Zunahme von Wasserdampf und ein Wachsen der Oberflächenspannung hervorrufen; infolge davon würde sich die betreffende Stelle wieder zu verdickern streben, da sie eine größere Oberflächenspannung besitzt, als die Nachbarschaft, — ein Wachsen der Dicke würde aber eine Abnahme von Wasser, d. h. eine Abnahme der Oberflächenspannung hervorrufen, und daher wurde eine solche Stelle durch Wirkung der Nachbarschaft mit größerer Oberflächenspannung gedehnt, d. h. die Dicke würde wieder abnehmen.

Diese Auffassung würde nicht nur die längs ihrer ganzen Ausdehnung und im Laufe der Zeit constante Dicke der schwarzen Stellen, sondern auch besonders natürlich den plötzlichen Sprung in der Dicke einer Lamelle, der sich in der Nachbarschaft einer schwarzen Stelle vollzieht, erklären. Die doppelte Wirkungssphäre der Molecularkräfte würde demnach schon merkbar sein für die geringste Dicke, welche in der Lamelle an die schwarzen Theile angrenzen kann und noch den höheren Brechungsexponenten be-

sitzt. Es ist dies das Weiß 1. Ordnung, ich habe diese Decke zu ungefähr 120.10^{-6} mm gemessen. Es würde demnach 60.10^{-6} mm eine untere Grenze für die Wirkungsspsäre der Molecularkräfte sein.

Experimentell würde zwischen beiden auseinander gesetzten Ansichten entschieden werden können, wenn man durch Beobachtung nachweisen kann, ob auf einer massiven Seifenlösung oder auf einer farbigen Lamelle derselben eine Oberflächenschicht vom Brechungsexponenten gleich dem der schwarzen Theile und von deren halber Dicke existirt oder nicht. — Bei der Kleinheit des Unterschiedes der Brechungsexponenten der schwarzen und farbigen Lamellentheile hat indeß ein solcher experimenteller Nachweis mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen.

Indeß ist auf Grund theoretischer Ueberlegungen die zweite Ansicht nicht zulässig. Dieselbe stützt sich auf die Annahme, daß der Druck des gesättigten Dampfes einer Lamelle, falls ihre Dicke unterhalb der doppelten Wirkungssphäre der Molekularkräfte sinkt, kleiner ist, als der Dampfdruck einer dickeren Lamelle. Jedoch hat Hr. Warburg[1]) durch Betrachtung eines gewissen Kreisprocesses nachgewiesen, daß das Umgekehrte der Fall sein muß.

Es bleibt daher nur die erste Ansicht übrig und es können die Resultate wie folgt zusammengefaßt werden:

Resultate:

1) Die schwarzen Theile einer aus Plateau'scher Flüssigkeit gebildeten Lamelle besitzen einen Brechungsexponenten, welcher um eine Einheit der zweiten Decimale kleiner ist, als der Brechungsexponent der farbigen Theile.

2) Die Dicke der schwarzen Theile ist constant und gleich 17.10^{-6} mm.

3) Die Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte liegt unterhalb $8{,}5.10^{-6}$ mm.

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. 28. p. 399. 1886.

Göttingen, Phys. Inst. Sommer-Semester 1890.

Nachträge

zu dem Aufsatze über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer in den Nachr. vom 9. October 1890, No. 11, S. 385 fg.

Von

Friedrich Wieseler.

Die zuvorkommende Gefälligkeit der Herrn R. v. Schneider zu Wien und Th. Schreiber zu Leipzig hat mich in den Stand gesetzt, schon jetzt folgende Nachträge mittheilen zu können. Indem ich ihnen dafür den verbindlichsten Dank sage, bitte ich auch andere competente Gelehrte mir ähnliche Zusätze zukommen lassen zu wollen.

Zu S. 388, Z. 27 fg Hr. Schreiber bemerkt mir: „Die beiden mantuaner Reliefs Dütschke nr. 858 u. 860, von denen Sie das letztere auf S. 388 anführen, sind sicher modern, obgleich sie wiederholt neuerdings untersucht und nicht bezweifelt worden sind, z. B. ersteres nicht von Brunn.

Ueber diese Stücke notierte ich mir vor den Originalen:

Beide Reliefs sind modern und von Anfang an war nicht mehr gearbeitet, als vorhanden ist. Bei Vervollständigung der Reliefplatten würden in der Composition große, nicht auszufüllende Lücken entstehen. In nr. 858 bleibt zwischen dem Silen links und Faun rechts ein großer freier Platz auf der Platte. Die linke untere Ecke ist von dem Fälscher des Reliefs selbst angesetzt, ebenso die rechte obere Ecke des anderen Reliefs nr. 860. Die Komposition beidemale durchaus gegen griechische Gesetze. Die Proportionen zum Theil verfehlt. Die Arbeit nicht ungeschickt, aber der flotte Stil verräth die moderne Erfindung. Nicht antik ist der Gesichtstypus des jungen Fauns in nr. 858 und des Pans in 860."

Zu S. 391, Z. 9 fg. (wo in Z. 9 für „von" zu schreiben ist „zu" und in Z. 10 „hier zuvörderst eine") bemerkt Hr. Schreiber: „Das von Ihnen S. 391 erwähnte Monument Ann. d. Inst. 1846 tav. N. 1. 2 ist ein gutes Specimen alexandrinischer Plastik und wird durch eine große Reihe mehr oder weniger verwandter Bildwerke gestützt. Mit am nächsten steht die von Michaelis Arch. Z. 1879 Taf. 13 publicirte Gruppe Eros in der Weinlaube". Den

jetzigen Aufbewahrungsort des Monuments erwähnt Hr. Schreiber nicht.

Zu S. 392. Z. 14 fg. Das Relief zu Venedig erklärt sowohl Hr. Schreiber als Hr. von Schneider für modern. Dieser verweist auf G. Frizzoni: Notizia d'opere di disegno pubbl. da D. Jac. Morelli, 2ª edizione riv. ed aum. Bologna: Zanichelli 1884, p. 37, 247 sq.: indem er hinzufügt: „Ich halte das Relief nämlich für eine italienische Arbeit aus dem Ende des 15. Jahrhunderts oder dem Anfange des 16. Auch darf ich versichern, daß das liegende weibliche Wesen wirklich eine Kentaurin ist. Die Vorderbeine sind nur in Folge der Verkürzung nicht sichtbar, aber vor dem Originale sieht man deutlich, daß der Frauenrücken als Pferdeleib endigt."

Zu S. 392. unten. Ueber ein Relief mit einer Panin bemerkt Hr. Schreiber: „Leider habe ich bisher noch nichts genaueres über das merkwürdige Hochrelief nr. 183 des Museums in Toulouse erfahren, auch noch keine Photographie erlangen können. Stark, Städteleben in Frankreich p. 607 beschreibt es als Panin mit Kind an der Brust und ruhender Pan unter einem Palmbaum."

Zu S. 393, nach Z. 23. Hr. Schreiber berichtet: „Eine prächtige kleine Bronze mit Büste eines Satyrmädchens skizzierte ich mir im Museo di Antichità zu Turin, Sala dei bronzi, Wandschrank G, comp. I. Rundes Köpfchen mit Stumpfnäschen und Grübchen im Kinn. Rechte Hand an die rechte entblößte Brust gelegt, linke Schulter mit Hasenfell bedeckt. Blätterwerk als Büstenabschluß."

Inhalt von No. 14.

Eduard Riecke, das thermische Potential für verdünnte Lösungen. — *Derselbe*, über elektrische Ladung durch gleitende Reibung. — *P. Drude* und *W. Nernst*, Einfluss der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde. — *P. Drude*, über die Grösse der Wirkungssphäre der Molecular-Kräfte und die Constitution von Lamellen der Plateau'schen Glycerin-Seifen-Lösung. — *Friedrich Wieseler*, Nachträge zu dem Aufsatze über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer in den Nachr. vom 9. October 1880, No. 11, S. 385 fg.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Struppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

ROYAL COLLEGE OF SURGEONS OF ENGLAND 17 MAR 91 LIBRARY

17. December. **№ 15.** 1890.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 8. November.

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Dritte Mittheilung[1]).

Vorgelegt von F. Klein.

Die in der voraufgegangenen Note mitgetheilten Principien reichen aus, um die für Curven R_n^3 und R_n^4 angegebenen sechs Zerlegungsgleichungen allgemein für Curven R_n^d aufzustellen.

Was die Bezeichnungen angeht, so sei die rationale, punktallgemeine Curve R_n^d — im linearen Raume M_d von d Dimensionen — in Punktcoordinaten x dargestellt durch:

$$\begin{cases} x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_d = f_0(\lambda) : f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : \ldots : f_d(\lambda) \\ f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{in}. \end{cases}$$

Die aus irgend $d+1$ Verticalreihen der a gebildeten Determinante $| a_{k_0} a_{k_1} \ldots a_{k_d} |$ möge wiederum durch $\delta_{k_0, k_1, \ldots k_d} = \delta$ bezeichnet werden; wir legen ihr das Gewicht $\Sigma k - \frac{d(d+1)}{2}$ bei.

1) Vgl. Göttinger Nachrichten. 1888 No. 5 und 1890 No. 10.

Innerhalb des Raumes M_d gelegene Linearräume von $d-1$, $d-2$, $d-3$ Ausdehnungen (solche kommen allein hier in Betracht) erhalten die Zeichen M_{d-1}, M_{d-2}, M_{d-3}. Schnitt- und Berührungseigenschaften derselben, in ihrem Verhalten zur Curve R_n^d sollen resp. durch keine, eine, zwei runde Klammern angedeutet werden, endlich darauf bezügliche binäre Darstellungsformen, oder auch Invariantencriterien allgemein durch eine eckige Klammer.

Dann sind die unmittelbaren Analoga der in Ebene und Raum bereits betrachteten Singularitäten:

1. M_{d-1} „α^{d+1}“, welche mit der Curve R_n^d an einer Stelle α $d+1$ consecutive Punkte gemein haben,

2. M_{d-1} „$\alpha^d\beta^2$“, für welche an einer ersten Stelle α d Punkte, an einer zweiten (von α verschiedenen) Stelle β zwei Punkte der Curve coincidiren,

3. M_{d-2} „$(\alpha^{d-1}\beta)$“, welche der Curve in $d-1$ benachbarten Punkten α begegnen, und sie außerdem noch einmal, in β treffen.

Die Argumente α, und damit die Gesammtheit der jeweiligen singulären Mannigfaltigkeiten M werden durch drei binäre Formen $[\alpha^{d+1}]$, $[\alpha^d\beta^2]$, $[(\alpha^{d-1}\beta)]$ repräsentirt. Die Grade derselben, einmal in α, andererseits in den δ giebt die Zusammenstellung (A) an:

A. Singularitätenformen.

		Grad in α.	Grad in den δ.
1.	$[\alpha^{d+1}]$	$(d+1)(n-d)$	1
2.	$[\alpha^d\beta^2]$	$2d(n-d)(n-d-1)$	$2(n-d-1)$
3.	$[(\alpha^{d-1}\beta)]$	$(d-1)(n-d+1)(n-d)$	$n-d+1$.

Die Discriminanten und Resultanten dieser drei binären Formen lassen sich in „Elementarfactoren“ — welche bez. der δ irreducibel sind — zerlegen, wie folgt:

B. Zerlegungen der Discriminanten und Resultanten.

(1) $D[\alpha^{d+1}] = [(\alpha^d)]\cdot[\alpha^{d+2}]$

(2) $D[\alpha^d\beta^2] = [(\alpha^d)]^{2(n-d-1)(2n-2d-3)}.[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\beta)].[\alpha^d\beta^2\gamma^2]^2[\alpha^{d+2}][\alpha^{d+1}\beta^2][\alpha^d\beta^2]^\delta$

(3) $D[(\alpha^{d-1}\beta)] = [(\alpha^d)].\quad[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\beta)].[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]^2.[((\alpha^{d-2}\beta))]$

(1.2) $R\{[\alpha^{d+1}],[\alpha^d\beta^2]\} = [(\alpha^d)]^{2(n-d-1)}.[\alpha^{d+2}]^2.[\alpha^{d+1}\beta^2]$

(2.3) $R\{[\alpha^d\beta^2],[(\alpha^{d-1}\beta)\}] = [(\alpha^d)]^{2(n-d-1)}.[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\beta)]^2.[\alpha^d\beta^2,(\alpha^{d-1}\gamma)]$

(1.3) $R\{[\alpha^{d+1}],[(\alpha^{d-1}\beta)]\} = [(\alpha^d)]^2.\quad[\alpha^{d+1},(\alpha^{d-1}\beta)]$.

Die geometrische Bedeutung der einzelnen Elementarfactoren geht aus ihrer Bezeichnung hervor: es sind die linken Seiten der invarianten Kriterien, welche aussagen, daß das innerhalb einer eckigen Klammer characterisirte singuläre Vorkommniß, resp. die beiden singulären Vorkommnisse gleichzeitig eintreten.

Endlich sind die Grade, wie Gewichte (in den δ) dieser zehn Invarianten, geordnet nach der Anzahl der darin auftretenden Argumente α, β, γ, in der Tabelle (C) niedergelegt:

C. Grad und Gewicht der 10 Elementarfactoren in den δ.

		Grad
(a_1)	$[\alpha^{d+2}]$	$(d+2)(n-d-1)$
(a_2)	$[(\alpha^d)]$	$d(n-d+1)$
(b_1)	$[\alpha^{d+1}\beta^2]$	$2(d+1)(n-d-1)(n-d-2)$
(b_2)	$[\alpha^d\beta^2]$	$3d(n-d-1)(n-d-2)$
(b_3)	$[\alpha^{d+1}, (\alpha^{d-1}\beta)]$	$2d(n-d+1)(n-d-1)$
(b_4)	$[\alpha^d\beta^2, (\alpha^{d-1}\beta)]$	$(3d-2)(n-d+1)(n-d-1)$
(b_5)	$[((\alpha^{d-2}\beta))]$	$(d-2)(n-d+2)(n-d+1)$
(c_1)	$[\alpha^d\beta^2\gamma^2]$	$2d(n-d-1)(n-d-2)(n-d-3)$
(c_2)	$[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]$	$(d-1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)$
(c_3)	$[\alpha^d\beta^2, (\alpha^{d-1}\gamma)]$	$2(2d-1)(n-d+1)(n-d-1)(n-d-2)$

Gewicht
$\frac{1}{2}(d+1)(d+2)(n-d)(n-d-1)$
$\frac{1}{2}d(d+1)(n-d+1)(n-d)$
$(d+1)^2(n-d)(n-d-1)(n-d-2)$
$\frac{3}{2}d(d+1)(n-d)(n-d-1)(n-d-2)$
$d(d+1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)$
$\frac{1}{2}(3d-2)(d+1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)$
$\frac{1}{2}(d-2)(d+1)(n-d+2)(n-d+1)(n-d)$
$d(d+1)(n-d)(n-d-1)(n-d-2)(n-d-3)$
$\frac{1}{2}(d-1)(d+1)(n-d+1)(n-d)^2(n-d-1)$
$(2d-1)(d+1)(n-d+1)(n-d)(n-d-1)(n-d-2)$.

Die Gradzahlen gehen durch einfache Multiplication mit $\frac{1}{2}(d+1)(n-d)$ in die betr. Gewichtszahlen über: die letzteren sind nur im Hinblick auf ihre größere Durchsichtigkeit explicite hinzugefügt worden. Im Uebrigen lassen sich die bei Gelegenheit des Falles $d = 3$ gemachten Bemerkungen fast wörtlich auf den Fall eines beliebigen d übertragen.

Die soeben unter (B) notirten allgemeinen Zerlegungsformeln können vor Allem dazu dienen, einige auffällige Besonderheiten und Verschiedenheiten der früher behandelten Fälle $d = 2$ und $d = 3$ aufzuklären.

Für $d = 3$ wird zuvörderst der Factor $[\alpha^d\beta^3]$ wegen alsdann eintretender Symmetrie in α, β das Quadrat eines irreducibeln Ausdrucks: der letztere, damals selbst mit $[\alpha^3\beta^3]$ bezeichnet, kommt demnach unter den Elementarfactoren von $D[\alpha^3\beta^3]$ nicht drei- sondern sechsfach vor.

Genau das Entsprechende gilt für die Invariante $[((\alpha^{d-2}\beta))]$, sodaß bei der Zerfällung von $D[(\alpha^3\beta)]$ der unter $[(\alpha\beta)]$ aufgeführte Elementarfactor auf die zweite (statt der ersten) Potenz zu erheben ist.

Für $d = 2$ dagegen kann der gemeinte Factor überhaupt noch nicht erscheinen, was damit übereinstimmt, daß in der Gradzahl von $[(\alpha^{d-2}\beta)]$ $d-2$ als Factor enthalten ist.

Für $d = 2$ ist weiterhin zu bemerken, daß alsdann die beiden Invarianten $[\alpha^{d+1}\beta^2]$ und $[\alpha^d\beta^3]$ in ein- und dieselbe $[\alpha^3\beta^2] = [\alpha^2\beta^3]$ coincidiren. Somit vereinigen sich die in der allgemeinen Formel für $D[\alpha^d\beta^3]$ figurirenden Exponenten 1 und 3 jener beiden Factoren nunmehr zum Gesammtexponenten $1+3 = 4$.

Ferner wird der Ausdruck $[\alpha^d\beta^3, (\alpha^{d-1}\beta)]$ für $d = 2$ wiederum symmetrisch in α, β, also das Quadrat des damals als Selbstberührungsfactor $[\Delta_3 T_3]$ verzeichneten Ausdrucks. Demnach erhöhen sich die in den allgemeinen Formeln stehenden Exponenten 1 resp. 2 der in Rede stehenden Invariante jetzt zu 2 resp. 4.

Endlich weisen die beiden Factoren $[\alpha^d\beta^2\gamma^3]$ und $[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]$ im Falle $d = 2$ eine dreifache Symmetrie auf, werden also dann zu Cuben irreducibler Größen, insofern jetzt jedes der drei Argumente α, β, γ die Rolle von α übernehmen kann. Jene beiden Elementarfactoren, damals mit den Zeichen $[T_3]$, $[\Delta_3]$ versehen, zeigen somit den Exponenten 6 statt 2.

Nachdem so die formale Untersuchung der drei Singularitäten (A) einen Abschluß erreicht hat, kann man nunmehr der zu Beginn der vorigen Mittheilung aufgeworfenen Frage näher treten, in welcher Art und Weise sich das Zusammenrücken zweier einfacher Singularitäten in eine nächst höhere vollzieht. Es soll dazu ein Verfahren eingeschlagen werden, welches in einfacheren Fällen einen neuen, anschaulichen Beweis für die Vielfachheit der bezüglichen Elementarfactoren in den Zerlegungsformeln liefert, für welches indessen umgekehrt die letzteren in allen Fällen eine vollständige Controlle bieten, sodaß erst durch die vereinigte Wir-

kung beider Hülfsmittel eine ausreichende Einsicht in die gemeinten Vorgänge ermöglicht wird.

Der Deutlichkeit halber legen wir der Untersuchung zunächst wiederum den Fall $d = 2$ [1]) unter.

Anstatt nun z. B. den „Cuspidalfactor“ $[(\alpha^2)]$ allgemein zu berechnen, also das Kriterium für Eintreten einer Spitze überhaupt bei einer R_n^2, lege man dem Argument α den canonischen Werth Null (oder auch Unendlich) bei, und frage nach den Bedingungen dafür, daß die Curve gerade an der Stelle Null eine Spitze erhält. Dieselben sind offenbar durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen $\delta_{n,n-1,k} = 0$ $(k = 0, 1, 2 \ldots n-2)$ ausgedrückt. Man setze demnach

$$\delta_{n,n-1,k} = \varepsilon \tau_{n,n-1,k}, \quad \lim \varepsilon = 0,$$

wo die Größen τ nicht zugleich mit ε verschwinden sollen. Dadurch wird die Invariante $[(\alpha^2)]$ sicher mit ε proportional; wie man leicht erkennt, ist aber auch nur die erste Potenz von ε in $[(\alpha^2)]$ als Factor enthalten.

Folglich muß sich aus den Discriminanten und Resultanten der drei Singularitätenformen der Factor ε in genau der nemlichen Vielfachheit abscheiden lassen, als der Exponent von $[(\alpha^2)]$ in den einzelnen Zerlegungsformeln angiebt. Andererseits erweist sich bei directer Berechnung das Bild für die Entwickelung der drei Singularitätenformen bei Anordnung nach steigenden Potenzen des Parameters α als das folgende:

$$\begin{cases} [\alpha^3] \equiv \Omega = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \ldots \\ [\alpha^3\beta^3] \equiv M = \varepsilon^{2(n-3)}\mu_0 + \varepsilon^{2(n-3)-1}\mu_1\alpha + \ldots + \varepsilon\mu_{2(n-3)-1}\alpha^{2(n-3)-1} + \mu_{2(n-3)}\alpha^{2(n-3)} + \ldots \\ [(\alpha\beta)] \equiv \Lambda = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha^2 + \ldots \end{cases}$$

wo die Coefficienten ω, μ, λ nicht weiter durch ε theilbar sind. Aus der Bézout'schen Determinantenform der Discriminanten und Resultanten jener drei binären Formen liest man ab, daß die Größe ε in ihnen zum Mindesten in folgenden Potenzen vorkommt:

$$\begin{aligned} &D[\alpha^3]: \varepsilon^1 \quad ; R\{[\alpha^3], [\alpha^3\beta^3]\} : \varepsilon^{2(n-3)} \\ &D[\alpha^3\beta^3]: \varepsilon^{(2n-6)(2n-7)}; R\{[\alpha^3\beta^3], [(\alpha\beta\}] : \varepsilon^{2(n-3)} \\ &D[(\alpha\beta)]: \varepsilon^1 \quad ; R\{[\alpha^3], [(\alpha\beta)]\} : \varepsilon^3 \quad . \end{aligned}$$

Es könnte in Folge der besonderen Natur der Größen ω, μ, λ aller-

1) Vgl. Brill „Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies“. Math. Ann. XVI.

dings geschehen (und ein derartiger Ausnahmefall wird uns in der That weiterhin begegnen), daß der mit einer der angegebenen Potenzen von ε multiplicirte Entwickelungscoefficient (und eventuell noch einige nächstfolgende) verschwinden, und daß sich dadurch die heraustretende Potenz von ε erhöht.

Aber die dazu erforderliche, oft sehr mühsame Specialuntersuchung jener Anfangscoefficienten wird eben hier, wie in den meisten Fällen, durch Vergleichung mit den uns bereits bekannten Zerlegungsformeln von vornherein überflüssig: denn diese Vergleichung zeigt sofort, daß die obigen Potenzen von ε die genau richtigen sind.

Vermöge der Entwickelungsformen von $[\alpha^3]$, $[\alpha^3\beta^3]$, $[(\alpha\beta)]$ ist jetzt die gegenseitige Geschwindigkeit[1]) der zu einer Spitze sich vereinigenden Wendepunkts-, Doppeltangenten- und Doppelpunktselemente ohne Weiteres statuirbar. Denn während jedes der $2(n-3)$ Argnmente von Doppeltangentenelementen mit ε selbst proportional wird, wenn man ε hinreichend klein werden läßt, so werden die der beiden Wendepunkte, wie auch der beiden Doppelpunktsschnittelemente mit $\sqrt{\varepsilon}$ vergleichbar. Die Geschwindigkeit, mit der die letztern zwei Punktepaare sich der schließlichen Spitze nähern, ist somit eine unendlich langsamere, als die jener erstgenannten $2(n-3)$ Punkte.

Dieses Sachverhältniß bleibt im Wesentlichen für ein beliebiges d bestehen, nur daß an Stelle der Zahl $n-3$ die Zahl $n-d-1$ tritt, also die Entwickelung der Form $[\alpha^d\beta^2]$ mit der $2(n-d-1)^{\text{ten}}$ Potenz von ε beginnt, gemäß den $2(n-d-1)$ Stellen α von $M_{\delta-1}$: $[\alpha^d\beta^2]$, welche im Grenzfalle in die Singularität $[(\alpha^d)]$ hineinrücken.

Weit einfacher läßt sich der Einfluß des Factors $[\alpha^{d+2}]$ verfolgen. Greift man wiederum auf $d = 2$ zurück, so hat man als Bedingung für eine „Undulation" an der Stelle 0 das simultane Verschwinden der aus der Matrix $\| a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ a_{n-3} \|$ zu bildenden Determinanten δ. Macht man demnach die letzteren wieder mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional, so lauten die Anfangsglieder der Formen Ω und M:

$$\Omega \equiv [\alpha^3] = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\alpha + \omega_2\alpha^2 + \ldots$$
$$M \equiv [\alpha^3\beta^2] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \mu_2\alpha^2 + \ldots$$

Die beiden Discriminanten werden mit ε, die Resultante aber mit ε^3 vergleichbar, was mit den Exponenten des Elementarfactors $[\alpha^4]$ in den zugehörigen Zerlegungen völlig concordirt.

1) Als Maß der Geschwindigkeit wird dabei der Grad des Unendlichkleinwerdens von ε angesehen.

Das ist auf den Fall eines beliebigen d fast wörtlich übertragbar.

Der Kürze halber soll für die weiteren Singularitäten nur noch das Fortschreitungsgesetz der je zu berücksichtigenden Singularitätenformen nach Potenzen von ε angezeigt werden.

Bei einer Selbstberührung $[\Delta_3 T_3] = [\alpha^3\beta^3, (\alpha\beta)]$ ist es zweckmäßig, das Argument α an die Stelle 0, das Argument β an die Stelle ∞ zu verlegen. Es wird:

$$M \equiv [\alpha^3\beta^3] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \ldots + \varepsilon\alpha^{4(n-2)(n-3)-1}\mu_{4(n-2)(n-3)-1} + \varepsilon\alpha^{4(n-2)(n-3)}\mu_{4(n-2)(n-3)}$$
$$\Delta \equiv [(\alpha\beta)] = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \ldots + \varepsilon\alpha^{(n-1)(n-2)-1}\lambda_{(n-1)(n-2)-1} + \varepsilon\alpha^{(n-1)(n-2)}\lambda_{(n-1)(n-2)}.$$

Die Discriminanten enthalten ε zur zweiten, die Resultante zur vierten Potenz.

Für $d > 2$ tritt die Aenderung ein, daß nur noch die Anfangsglieder von $[\alpha^d\beta^3]$ und $[(\alpha^{d-1}\beta)]$ denselben Character beibehalten, während die Endglieder nicht mehr zugleich mit ε verschwinden. Folglich werden nunmehr die beiden Discriminanten nur noch mit ε, die Resultante mit ε^3 vergleichbar.

In ähnlicher Weise erledigt sich für $d = 2$ der „Trinodal"- und der „Tritangentenfactor". Läßt man mit Uebergehung der Zwischenbetrachtung nur noch das eine Argument α einen canonischen Werth, nemlich Null, annehmen, so hat man für $\Delta_3 = [(0\beta\gamma)]$:

$$\Delta \equiv [(\alpha\beta)] = \varepsilon^3\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \ldots$$

und für $T_3 = [0^3\beta^3\gamma^3]$:

$$M \equiv [\alpha^3\beta^3] = \varepsilon^3\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \ldots$$

Die Discriminante erhält also beidemal vom Argument $\alpha = 0$ her den Factor ε^3; da aber alle drei Argumente α, β, γ einen gleichmäßigen Einfluß ausüben, so tritt jener Factor ε^3 dreimal i. e. ε in der sechsten Potenz auf.

Für $d > 2$ kommt die letztere Bemerkung in Wegfall, der zweiten Potenz von ε correspondirt dann die zweite Potenz von $[(\alpha^{d-1}\beta\gamma)]$ resp. $[\alpha^d\beta^3\gamma^3]$.

Der Factor $[\Omega\Delta] = [\alpha^3, (\alpha\beta)]$ führt zu den Entwickelungen:

$$\Omega \equiv [\alpha^3] = \varepsilon\omega_0 + \ldots, \quad \Delta \equiv [(\alpha\beta)] = \varepsilon\lambda_0 + \ldots,$$

sodaß die Resultante mit ε selbst vergleichbar wird.

Der Fall eines beliebigen d verursacht hier keine Aenderung. Dieselbe Erscheinung bietet sich bezüglich $(\Delta M) = [\alpha^3\beta^3, (\alpha\gamma)]$

bei den beiden in Betracht kommenden Formen Δ und M, und desgleichen im allgemeinen Falle.

Eigenartig wirkt der Factor $[\Omega M] = [\alpha^3\beta^3]$. Für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ gestalten sich die Formen Ω und M, wie folgt:

$$\Omega \equiv [\alpha^3] = \varepsilon\omega_0 + \ldots$$

$$M \equiv [\alpha^3\beta^3] = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \ldots + \varepsilon\alpha^{4(n-2)(n-3)-1}\mu_{4(n-2)(n-3)-1} + \varepsilon^2\alpha^{4(n-2)(n-3)}\mu_{4(n-2)(n-3)}.$$

Die Resultante wird nur mit der ersten Potenz von ε vergleichbar, wie denn auch $]\Omega M]$ unter den Factoren von $R\{\Omega, M\}$ nur einmal vorkommt.

Der Beitrag von $[\Omega M]$ zur Discriminante von M setzt sich wiederum aus zwei Theilen zusammen. Von $\alpha = 0$ rührt die erste Potenz von ε als Factor her, während $\beta = \infty$ die zweite Potenz zu liefern scheint. Hier tritt indessen der Ausnahmefall wirklich ein, daß der Coefficient von $\varepsilon \cdot \varepsilon^3 = \varepsilon^4$ in der Entwickelung der Discriminante von M (nicht aber der nächstfolgende) verschwindet, und zwar eben durch die Kraft der in $\beta = \infty$ gelegenen Singularität.

Um sich davon zu überzeugen, gehe man in der Canonisirung noch einen Schritt weiter. Man lege nemlich je einem Doppeltangentenberührpunkt α, β von vornherein das Argument $0, \infty$ bei, und fordere demgemäß die Bedingungen dafür, daß die Tangente der Curve R_n^2 in $\beta = \infty$ an einer weiteren Stelle $\alpha = 0$ osculire. Dazu müssen sämmtliche Determinanten der Matrix $| a_0, a_1, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n |$ verschwinden, während zugleich noch die Gleichung $M = 0$ eine Wurzel ∞, sowie eine Wurzel 0 besitzen soll.

Hält man sodann nur an der letztgenannten Bedingung[1]) fest, und macht vorderhand wiederum jene Determinanten soweit sie nicht schon verschwinden, einer beliebig kleinen Größe ε proportional, so resultirt zuvörderst, daß sich aus der Invariante $[\Omega M] = [\alpha^3\beta^3]$ die zweite Potenz von ε ausscheidet.

Die Form M nimmt aber jetzt folgende Gestalt an:

$$M \equiv [\alpha^3\beta^3] = 0 + \varepsilon\mu_1\alpha + \ldots + \varepsilon^3\alpha^{4(n-2)(n-3)-1}\mu_{4(n-2)(n-3)-1} + 0 \cdot \alpha^{4(n-2)(n-3)}.$$

Die Folge ist, daß nunmehr in die Discriminante von M die Factoren ε^3 und ε^6 also im Ganzen der Factor ε^9 eintreten. Damit ist der gewünschte Beweis erbracht, denn dem letzteren Factor ε^6

1) Dieselbe ist ersichtlich dadurch fixirt, daß die Determinanten der Matrix $| a_0, a_1, a_{n-1}, a_n |$ fest gleich Null gesetzt werden.

muß bei der früheren Constellation, wo $[\Omega M]$ mit ε selbst vergleichbar war, die dritte Potenz von ε correspondiren.

Wie schon weiter oben bemerkt, treten die beiden, soeben für $d = 2$ erörterten Vorkommnisse völlig auseinander, sobald $d > 2$ wird. Man hat daher nur die angegebenen Entwickelungen in zwei Theile zu spalten: bezüglich des Factors $[\alpha^{d+1}\beta^2] = [0^{d+1}\beta^2]$ bewahren die Anfangsglieder ihren Character, während die Endglieder den Factor ε nicht mehr aufweisen, und genau umgekehrt verhält es sich bezüglich der Invariante $[\alpha^d\beta^2] = [\alpha^d\infty^2]$, wo übrigens nur die Form $[\alpha^d\beta^2]$ in Betracht kommt.

So erklärt es sich, weßhalb die Resultante der Singularitätenformen $[\alpha^{d+1}]$ und $[\alpha^d\beta^2]$ den Factor $[\alpha^{d+1}\beta^2]$ nur einfach, und die Discriminante von $[\alpha^d\beta^2]$ denselben Factor ebenfalls nur einfach, dagegen den Factor $[\alpha^d\beta^2]$ dreifach zuläßt.

Um in dem vornehmlich interessanten Falle $d = 2$ die letzten Ergebnisse noch einmal zusammenzufassen, so hat man sich die Singularität $[\alpha^3\beta^2]$ so entstanden zu denken, daß eine Wendetangente $\alpha + \varepsilon$ mit zwei Doppeltangenten vom Typus: $(\lim \varepsilon = 0)$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha + d_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \beta + d_2\varepsilon + d_3\varepsilon^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix}\alpha + d_1'\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \beta + d_2\varepsilon - d_3\varepsilon^{\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\}$$

coincidirt, wo die d mit ε nicht verschwindende Größen bedeuten Der Unterschied der beiden in die Stelle β rückenden Doppeltangentenberührungspunkte ist mit $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ vergleichbar. Man kann leicht eine Figur entwerfen, welche diese Verhältnisse wiederspiegelt.

Was endlich noch die Invariante $[((\alpha^{d-2}\beta))]$ angeht, so wird für $\lim \alpha = 0$:

$$[(\alpha^{d-1}\beta)] = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\alpha + \ldots$$

und somit die Discriminante der Form mit ε selbst proportional. Für $d = 3$ liefert das Argument β den Factor ε noch einmal.

Damit hat die Erörterung der verschiedenen, nur eine Bedingung erfordernden Vereinigungen von Singularitäten α^{d+1}, $\alpha^d\beta^2$, $(\alpha^{d-1}\beta)$ auf „allgemeinen“ R_n^d einen gewissen Abschluß erhalten. Die auf Raumcurven R_n^3 sich weiter noch darbietenden Singularitäten $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ zu berücksichtigen, möge einer weiteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Clausthal 2. September 1890.

Zur Theorie der Schwingungen gestrichner Saiten.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. August 1890.)

Herr von Helmholtz hat bekanntlich eine Theorie für die Bewegung einer mit einem Bogen gestrichenen Saite durch geistvolle Combination der Beobachtung mit der Berechnung entwickelt[1]). Diese Theorie ist vielfach acceptirt worden[2]), sie enthält aber einige Fehler, welche sie in der gegenwärtigen Form unhaltbar erscheinen lassen. Ich werde zunächst diese Behauptung nachweisen und sodann diejenige Aenderung resp. Verallgemeinerung der Grundannahmen des Herrn von Helmholtz, welche den von ihm angegebenen Weg der Entwickelung einwurfsfrei durchzuführen gestattet, mittheilen und in ihren Folgerungen untersuchen.

Herr von Helmholtz hat durch die Beobachtung mit dem Vibrationsmikroscop festgestellt, daß ein jeder Punkt der angestrichenen Saite eine Bewegung ausführt, gegeben durch das folgende Gesetz für die Elongation y innerhalb einer Periode T:

$$1) \qquad \begin{aligned} 0 < t < \mathfrak{T} \quad & y = ft + h, \\ \mathfrak{T} < t < T \quad & y = g(T-t) + h, \end{aligned}$$

wobei

$$2) \qquad f\mathfrak{T} = g(T-\mathfrak{T})$$

sein muß.

Die Entwickelung dieses Gesetzes in eine Fourier'sche Reihe ergiebt

$$3) \qquad y = \frac{(f+g)T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi n \mathfrak{T}}{T} \sin\frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right).$$

Diese Formel vergleicht Herr von Helmholtz mit dem allge-

---

1) H. v. Helmholtz, Phil. Mag. (4) 21, 393—396. 1860. Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1870, p. 595, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1882, p. 410.

2) S. z. B. Rayleigh, Theorie des Schalles, deutsch v. Neesen, Braunschweig 1880, Bd. I, p. 225.

meinen Gesetz für die Bewegungen einer beiderseits befestigten Saite von der Länge L

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\frac{2\pi n}{T}\left(t-\frac{\mathfrak{T}}{2}\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\frac{2\pi n}{T}\left(t-\frac{\mathfrak{T}}{2}\right)\right\} \quad 4)$$

und gelangt zu dem Schlusse, daß zur Uebereinstimmung

$$D_n = 0, \quad \frac{\mathfrak{T}}{T} = \frac{x}{L}, \quad C_n = \frac{(f+g)T}{\pi^2 n^2}, \quad 5)$$

also $f+g$ von x unabhängig sein muß. Durch Einführung der Amplitude p an der Stelle x und der Amplitude P in der Mitte der Saite erhält er noch die Beziehungen

$$p = \frac{4Px(L-x)}{L^2}, \quad f = \frac{8P(L-x)}{LT}, \quad g = \frac{8Px}{LT}. \quad 6)$$

Die Discussion dieser Formeln liefert ihm die an der citirten Stelle mitgetheilten Gesetze für die Schwingungen gestrichner Saiten.

Allein diese Gesetze können schon deshalb nicht richtig sein, weil der Ansatz (4) keine Lösung der allgemeinen Differentialgleichung ist, sobald $\mathfrak{T}$ nicht constant sondern $= xT/L$ ist, und demnach ist unter Beibehaltung des von Helmholtz'schen Ansatzes (1) die Durchführung seines Weges überhaupt unmöglich. Der Grund ist leicht ersichtlich, — jener Ansatz ist so speciell, daß das Problem überbestimmt ist; denn es enthält die stillschweigende Annahme, daß alle Punkte der Saite mit gleicher Phase schwingen. Läßt man diese Annahme fallen, so bietet die Durchführung der Theorie keine Schwierigkeit.

Ich setze demgemäß

$$\begin{aligned} t_0 < t < \mathfrak{T}+t_0, \quad & y = f(t-t_0)+h, \\ \mathfrak{T}+t_0 < t < T+t_0, \quad & y = g(T-t+t_0)+h, \end{aligned} \quad 7)$$

wo nun t_0 die Verschiedenheit der Phase an verschiedenen Stellen mißt und h und t_0 Functionen von x sein können. Entwickelt man diesen Ansatz in eine Fourier'sche Reihe, so erhält man

$$y = \frac{(f+g)T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{\pi n \mathfrak{T}}{T} \sin\frac{2\pi n}{T}\left(t-t_0-\frac{\mathfrak{T}}{2}\right). \quad 8)$$

Hieraus kann man ebenso wie Herr von Helmholtz durch Vergleich mit (4) schließen, daß

$$9) \qquad \mathfrak{T}/T = x/L$$

sein muß, außerdem folgt aber, daß

$$t_0 + \frac{\mathfrak{T}}{2} = \text{Const}(x)$$

also

$$10) \qquad t_0 = a - \frac{xT}{2L}$$

sein muß, falls a eine Constante bezeichnet, welche durch die Wahl des Anfangspunktes für t jederzeit zu Null gemacht werden kann.

Nunmehr sind die Folgerungen (6) berechtigt, aber die Gleichungen (1) werden durch ihr Einsetzen zunächst nicht lineär, sondern geben

$$11) \qquad \begin{aligned} 0<t<\mathfrak{T}, \quad y &= \frac{8P(L-x)}{LT}\left(t+\frac{xT}{2L}\right)+h, \\ \mathfrak{T}<t<T, \quad y &= \frac{8Px}{LT}\left(T-t-\frac{xT}{2L}\right)+h. \end{aligned}$$

Diese Resultate stehen aber mit der Formel

$$12) \qquad y = \frac{8P}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n x}{T}\sin\frac{2\pi n t}{T}$$

im Widerspruch, so lange man h constant nimmt, denn diese Formel verglichen mit der bekannten Reihe

$$y_1 = \frac{2bL^2}{\pi^2 a(L-a)}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi a}{L},$$

welche

$$13) \qquad \begin{aligned} \text{für} \quad 0<x<a \qquad y_1 &= \frac{bx}{a} \\ \text{für} \quad a<x<L \qquad y_1 &= b\frac{L-x}{L-a} \end{aligned}$$

giebt, zeigt, daß y für jedes t durch zwei lineäre Functionen von x gegeben sein muß. Für $0<t<T/2$ muß die Abscisse $a = 2tL/T$, die Amplitude

$$b = \frac{4Pa(L-a)}{L^2} = \frac{8Pt}{T^2}(T-2t) \qquad 14)$$

sein; es läuft hiernach der Schnittpunkt der beiden Geraden in der Zeit $t = T/2$ über die ganze Länge der Saite und es wächst zugleich die Amplitude b von 0 bis P und nimmt wieder bis 0 ab.

Für $T/2 < t < T$ muß $a = 2L(T-t)/T$ sein und

$$b = -\frac{4Pa(L-a)}{L^2} = -\frac{8P}{T^2}(T-t)(2t-T); \qquad 15)$$

der Schnittpunkt läuft also mit derselben Geschwindigkeit zum Anfangspunkt zurück, während die Amplituden die entsprechenden negativen Werthe annehmen.

Da der Ansatz (12) hiernach eine lineäre Relation zwischen x und y ergiebt, so muß h eine Function zweiten Grades in x sein.

Die Vergleichung von (12) und (13) ergiebt unter Rücksicht auf (14) und (15)

$$h = -p = -\frac{4Px(L-x)}{L^2},$$

wie dies auch der unmittelbaren Anschauung entspricht. Der Ansatz (7) ist hiernach in allen Theilen bestimmt und liefert für

$$-\frac{xT}{2L} < t < +\frac{xT}{2L} \qquad y = \frac{8P(L-x)t}{LT}$$

$$+\frac{xT}{2L} < t < \frac{(2L-x)T}{2L} \qquad y = \frac{8Px}{LT}\frac{(T-2t)}{2};$$

zur Zeit $t = xT/2L$ geben beide Ausdrücke für y denselben Werth p.

Göttingen, d. 1. August 1890.

Bemerkung. Nach Einreichung der vorstehenden Notiz ist mir die Arbeit von Herrn Lindemann[1]) über dasselbe Problem bekannt geworden. In derselben sind die richtigen Formeln für die Schwingungen der gestrichenen Saite auf einem andern als dem Helmholtz'schen Wege abgeleitet, die eigentliche Ursache der Abweichung des neuen Resultates von dem früheren ist aber nicht aufgedeckt. Die obige Notiz bildet somit eine Art Ergänzung jener Untersuchung.

1) F. Lindemann, Ber. d. naturf. Ges. in Freiburg i. B. VII, 500, 1880.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juli 1890.

(Fortsetzung.)

Verhandlungen der neunten allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung (in Paris) und deren permanente Commission. Redigirt von A. Hirsch. Berlin und Neuchatel 1890.

Mitteilungen der Pollichia. XLVIII. Jahresbericht. N. 3. 1889. Neustadt a. d. Hart 1889.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. N. 6—9. 1890. Wien 1890.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrgang 1890. (XL. Band.) Quartal 1 und 2. Wien 1890.

Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1890. Juni. Krakau 1890.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 3. Laibach 1890.

Mittheilungen des Vereines der Aerzte in Steiermark. XXVI. Vereinsjahr. 1889. Graz 1890.

Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag für 1888. Prag 1889.

Archiv des Vereines für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Band 23. Heft 1. Hermannstadt 1890.

Programm des evangelischen Gymnasiums A. B. etc. zu Hermannstadt für 1889/90. Hermannstadt 1890.

Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. LXXVI. Juni 1890. (Zürich 1890.)

Nature. Vol. 42. N. 1079—1082.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. XXI. N. 377—380.

Proceedings of the Royal Society. Vol. XLVII. N. 291. London 1890.

Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. L. N. 8. (London.) 1890.

Geometry in religion and the exact dates in biblical history after the monuments; etc. London 1890.

Proceedings of the R. Irish Academy. Third series. Vol. I. N. 3. Dublin 1890.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto. April 1890. Vol. XXV. N. 153. Toronto 1890.

Notes on the peare and chank fisheries and marine fauna of the golf of Manoar by Edgar Thurston. Madras 1890.

Catalogue of the Batrachia Salientia and Apoda of Southern India by Edgar Thurston. Madras 1888.

Records of the geological urvey of India. Vol. XXIII. Part 2. Mai 1890. (Calcutta 1890.)

Second systematic census of Australian plants by Baron F. v. Mueller. Part 1. Vasculares. Melbourne 1889.

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique de l'université d'Upsal. Vol. XXI. Année 1889. Upsal 1889—90.

Regiae societatis scientiarum Upsalensis:
a. Nova Acta: Seriei tertiae. Vol. XIV. Fasc. 1. Upsaliae 1890.
b. Catalogue méthodique des Acta et Nova Acta ... 1744—1889. Upsala (1889).

Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Geodätische Arbeiten. Heft VI und VII je zwei Exemplare. Christiania 1888—1890.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. volgreeks. 5. deel. (Deel XXXIX der geheele reeks.) Derde Aflev. s'Gravenhage 1890.

Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome V. 1890. 3me et 4me livr. Leide 1890.

Archives Neerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. 2me et 3me livr. Harlem 1890.

Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 60. année. 3. série. Tome 19. N. 6. Bruxelles 1890.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. N. 5. Coimbra 1889.

Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Publiées par l'Academie des sciences etc. IIe série. Tome VII, VIII. Paris 1889/90.

Journal de l'Ecole Polytechnique. 59ième cahier. Paris 1889.

Mémoires de la Société académique Indo-chinoise de France. Tome I. Années 1877—1878. Paris 1879.

Annales du Musée Guimet.
a. Revue de l'histoire des religions. Dixième année. Tome XX. N. 1. 2. 3. 1889. Onzième année. Tome XXI. N. 1. 1890. Paris 1889/90.
b. Annales. Tome XV, XVI, 1. 2, XVII. Paris 1889.

Société des Antiquaires de Picardie.
a. Mémoires. 3ème série. Tome VII. Paris et Amiens 1882.
b. Bulletin. Tome IX (1865/67), XI (1871/73), XIV (1880/82). — 1887. N. 2. 3., Amiens (et Paris) 1867—89.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3e série. Tome IV, V. 1er cahier. Paris (et Bordeaux) 1888/89.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1887 à Mai 1888, Juin 1888 à Mai 1889. Bordeaux 1888/89.

Reale Accademia dei Lincei.
a. Atti. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie IV. Rendiconti. Vol. VI. 1o semestre. Fasc. 8—10. Roma 1890.
b. Contribuzioni allo studio dei graniti della Bassa Valcesia di Gio. Struever. Roma 1890.

Reale Accademia delle scienze di Torino.
a. Atti. Vol. XXV. Disp. 11a, 12a. 1889/90. Torino.
b. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1889 all' osservatorio delle R. Università di Torino calcolate dal Dott. G. B. Rizzo. Torino 1890.

Atti della fondazione scientifica cagnola dalla sua istituzione in poi. Volume 8. 1882—88. Milano 1888.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendi conti. Serie II. Vol. XXI. Milano, Pisa, Napoli 1888.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricev. per diritto di stampa della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. 1890. N. 109. Firenze 1890.

Mémoirs of the National Academy of sciences. Vol. IV. Part 2. Washington 1889.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Part III. Oct.—Dec. 1889. Philadelphia 1890.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society, 1889. Vol. VI. Part. 2. Raleigh N. C. 1890.

Bulletin of the American geographical Society Vol. XXII. N. 2. June 30. 1890. New York 1890.

United states coast and geodetic survey. Bulletin N. 18. 18. Febr. 1890. (Washington 1890.)

Bulletin of the Museum of comparative zoölogy. Vol. XX. N. 1. Cambridge U. S. A. 1890.

Johns Hopkins University circulars. Vol. IX. N. 82. Baltimore 1890.

Proceedings of the California Academy of sciences. Second series. Vol. II. 1889. San Francisco 1890.

Anales de la Sociedad científica Argentina. 1890. Entrega V, VI. Tomo XXIX. Buenos Aires 1890.

Nachträge.

Meteorologische Beobachtungen am meteorologischen Observatorium der Landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. Jahr 1889. Erste Hälfte. Moskau 1889.

Notulen van de algemeene en Bestuurs - Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXVII. 1889. Aflev. IV. Batavia 1890.

Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIII. Aflev. 5 en 6. Batavia, 'sHage 1890.

Kgl. Bayerische Akademie der Wissenschaften:
a. Abhandlungen der histor. Classe. Band 19. Abth. 2. München 1890.
b. Almanach f. d. J. 1890. München.
c. Griechische Münzen. Neue Beiträge und Untersuchungen von F. Imhoof-Blumer. (Abhhandl. d. k. Bayr. Ak. d. W. 1. Cl. XVIII. Bd. III. Abth.) München 1890.

August, September und Oktober 1890.

Kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
a. Sitzungsberichte. 1890. XXXVIII.
b. Abhandlungen. 1889. Berlin 1890.

Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. 18. Bd. 1. Hälfte. (Jan. bis Juni 1759.) Berlin 1890.

Leopoldina. Heft XXVI. No. 13/14. 15/16. 17/18. Juli—Sept. 1890. Halle.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Ohrtmann. Bd. XIX. Jahrg. 1887. Heft 3. Berlin 1890.

Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1889 nebst Abhdl. VIII. Bd. Bogen 8—13. Nürnberg 1890.

67. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft f. vaterländ. Cultur 1889. Breslau 1890.

Zeitschrift der Deutschen morgenländ. Gesellschaft. 44. Bd. 2. u. 3. Heft. Leipzig 1890.

Physikal.-medic. Gesellschaft zu Würzburg.
a. Verhandlungen. N. F. XXIV. Bd. No. 5. Würzburg 1890.
b. Sitzungsberichte. Jahrgang 1890. No. 6. 7.

Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. München 1890.
a. Sitzungsberichte. 1. Philos.-philol. u. hist. Classe. 1890. Bd. I. Heft III. Bd. II. Heft I.
2. Mathem.-physik. Classe. 1890. Heft 1/2. 3.
b. Bericht des Sekretariats über die 31. Plenarversammlung der histor. Kommission.

Kölliker, A.: Ueber die erste Entwicklung der Nervi olfactorii. (Aus d. Sitzgsber. d. physik.-medic. Gesellsch. zu Würzburg. 1890. XIV. Sitzung.)

Zeitschrift für Naturwissenschaften hrsg. v. O. Luedecke. 63. Bd. 2. u. 3. Heft. Halle 1890.

Mitteilungen der Pollichia. XLVII. Jahresber. 1888. No. 1. 2. Dürkheim a. H.

Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Institutes. Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde. 2. Mittheil. (v. Prof. Dr. Wilh. Seibt.) Berlin 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 16.

Franz Meyer, über Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen. — *W. Voigt*, zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten. —

Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stoppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

31. December. **№ 16.** 1890.

LIBRARY

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. December.

Riecke legt einen Aufsatz vor: Molekulartheorie der Diffusion und elektrolytischen Leitung.

Voigt legt a) von Herrn Prof. **Auerbach** in Jena eine Abhandlung vor: über absolute Härtemessung, und b) von sich und P. **Drude**, Privatdocenten. Bestimmung von den Elasticitätskonstanten einiger dichten Mineralien (2. Reihe)

Klein legt eine Abhandlung von Prof. **Hurwitz** in Königsberg i. Pr.: über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe vor.

Jahresbericht des beständigen Sekretärs.

Moleculartheorie der Diffusion und electrolytischen Leitung.

Von

Eduard Riecke.

Wie man in der allgemeinen Mechanik zuerst gelernt hat, Aufgaben des Gleichgewichtes der Körper unter der Wirkung verschiedenartiger Kräfte zu behandeln und erst sehr viel später in den Besitz der Mittel gekommen ist, welche die Vorausbestimmung der durch Kräfte erzeugten Bewegungen ermöglichen, so ist man auch in der Lehre von der molekularen Constitution der Körper ausgegangen von statischen Vorstellungen, bei welchen man von den Bewegungen, in welchen die kleinsten Theilchen der Körper ohne Zweifel begriffen sind, abgesehen hat. Bis jetzt ist

es nur für die gasförmigen Körper gelungen, eine Theorie zu entwerfen, welche die Bewegungen der Molekeln nicht allein in Rechnung zieht, sondern zur Grundlage der ganzen Entwicklung macht.

Eine Ausdehnung der auf dem Boden der Gastheorie gewonnenen Anschauungen auf ein neues Gebiet von Erscheinungen verdanken wir einem überraschenden und glücklichen Gedanken von van t'Hoff, welcher nach verschiedenen Richtungen hin als fruchtbar und anregend sich erwiesen hat. In seiner im Jahre 1884 erschienenen Abhandlung „die Rolle des osmotischen Druckes in der Analogie zwischen Lösungen und Gasen" hat van t'Hoff gezeigt, daß der osmotische Druck in einer verdünnten Lösung durch dasselbe Gesetz bestimmt wird, wie der Druck eines Gases, und daß ebenso wie dieser letztere auch der osmotische Druck erklärt werden kann durch Stöße der Molekeln gegen die umschließende Wand. Um die Ideen, welche der Theorie von van t'Hoff zu Grunde liegen, verständlich zu machen, möge erinnert werden an den Grundversuch der Osmose. Wir füllen eine unten mit einer thierischen Blase verschlossene Röhre mit Salzlösung und setzen dieselbe in ein größeres mit Wasser gefülltes Gefäß, so daß das Niveau der Flüssigkeit in der Röhre ebenso hoch steht, wie in dem Gefäße. Es geht dann sofort Wasser durch die Membran hindurch zu der Salzlösung hinüber und die Folge hievon ist das bekannte Ansteigen der Flüssigkeit in der Röhre; hat die in der Röhre befindliche Flüssigkeitssäule ihre größte Höhe erreicht, so herrscht in ihr ein gewisser Ueberdruck, welcher durch das Gewicht der über das freie Niveau des Wassers gehobenen Säule gemessen wird. Diesen Druck nennen wir den osmotischen Druck; van t'Hoff hat nun nachgewiesen, daß dieser Druck genau derjenige ist, welchen die Molekeln des gelösten Salzes ausüben würden, falls sie im Gaszustande den von der Lösung eingenommenen Raum erfüllten. Dadurch wird nun eine von der früheren wesentlich verschiedene Auffassung der osmotischen Erscheinungen nahegelegt. Man pflegte die osmotischen Vorgänge aufzufassen als Diffusionserscheinungen, welche zunächst in einem wechselseitigen Uebergang von Molekeln der Salzlösung einerseits, des Wassers andererseits durch die Membran hindurch bestehen würden. Es sei nun die Diffusionsgeschwindigkeit des reinen Wassers eine sehr viel größere als die der Salzlösung; dann wird in Folge des überwiegenden Eintritts von Wasser die Flüssigkeit in der Röhre steigen; gleichzeitig wird aber ein Ueberdruck in derselben entstehen, welcher einen Rückstrom der Flüssigkeit durch die Poren der Membran hindurch veranlaßt; die Stärke desselben wird

durch das Gesetz von Poiseuille zu bestimmen sein. Wenn die Einwanderung der Wassermolekeln mit diesem Rückstrom sich im Gleichgewicht befindet, so ist die maximale Steighöhe der Flüssigkeit erreicht; der osmotische Druck ist hiernach derjenige Druck, welcher den Diffusionsstrom zu kompensiren vermag. Zu einer vollständigen Erklärung der osmotischen Erscheinungen reichen diese Annahmen nicht aus, weil die Natur der trennenden Membran einen wesentlichen Einfluß auf den Verlauf der Erscheinungen ausübt; es muß also noch die Vorstellung von specifischen Affinitäten der Membran auf die Molekeln des Salzes einerseits, die Molekeln des Wassers andererseits hinzugenommen werden.

Demgegenüber würde nun nach van t'Hoff in dem Falle einer halbdurchlässigen Membran, welche nur den Molekeln des Wassers, aber nicht den Molekeln des Salzes den Durchgang gestattet, die Theorie der Osmose in folgender Weise zu entwickeln sein. In der Lösung befinden sich die Molekeln des Salzes in einer Bewegung, welche ihrer Bewegung im gasförmigen Zustand durchaus ähnlich ist, d. h. sie gehen in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit so lange fort, bis sie entweder mit einer Wassermolekel oder mit einer anderen Salzmolekel zusammenstoßen. Bei jedem Zusammenstoße erleiden sie eine Ablenkung aus der bisherigen Bewegungsrichtung, und es besteht daher die Bahn der Salzmolekeln in Lösung ebenso wie im Gaszustande aus lauter kleinen, geradlinigen, zickzackförmig unter den verschiedensten Winkeln aneinandergereihten Strecken. Wenn nun eine Molekel des Salzes im Verlauf ihrer Bewegung an die freie Oberfläche der Flüssigkeit kommt, so muß sie an dieser verhindert werden, aus dem Innern der Flüssigkeit herauszufliegen; wir werden also gezwungen sein, anziehende Kräfte zwischen den Molekeln des Salzes und denen des Wassers anzunehmen, welche sich in einer gegen den Molekularabstand großen Entfernung von der Oberfläche zu einer gegen diese senkrecht gerichteten Resultante vereinigen werden. Umgekehrt aber werden die Molekeln des Salzes, welche an die freie Oberfläche der Flüssigkeit gelangen, auf diese einen Druck ausüben, der von ihrer Masse, Geschwindigkeit und Anzahl in derselben Weise abhängt, wie der Druck eines Gases gegen die begrenzende Wand. Ganz ebenso erleidet auch die Membran durch die gegen sie stoßenden und von ihr zurückgeworfenen Molekeln einen Druck, dessen Größe gleich $\frac{1}{3} N m u^2$ ist, wo N die Zahl der in der Volumeinheit befindlichen Salzmolekeln, m ihre Masse, u ihre mittlere Geschwindigkeit. Die Membran wird durch diesen Druck in Spannung versetzt; die freie

Oberfläche der Salzlösung aber ist beweglich, da ja die Membran dem unterhalb befindlichen Wasser den freien Durchgang gestattet, sie wird also durch den gegen sie gerichteten Druck der Salzmolekeln gehoben, bis das Gewicht der gehobenen Säule, der osmotische Druck, gleich dem nach oben gerichteten Molekulardrucke ist. Der Satz, daß der osmotische Druck gleich dem entsprechenden Drucke gasförmiger Molekeln ist, steht mit den experimentellen Thatsachen in guter Uebereinstimmung. Bezeichnen wir nun das Volumen der in einem cm^3 enthaltenen Wassermolekeln durch ω, durch $\mathfrak{N}$ die Zahl der Salzmolekeln, welche in 1 cm^3 der Lösung sich befinden, so ist der von diesen wirklich eingenommene Raum gleich $1-\omega$; die Zahl der in einem cm^3 enthaltenen Molekeln also thatsächlich $N = \frac{\mathfrak{N}}{1-\omega}$. Denken wir uns das Wasser entfernt und die zurückbleibenden Molekeln des Salzes im Gaszustande den Raum der Flüssigkeit erfüllend, so ist der von ihnen ausgeübte Druck gleich $\frac{1}{3}\mathfrak{N}mv^2$, wenn v die mittlere Geschwindigkeit der gasförmigen Molekeln bezeichnet; Gleichheit des osmotischen Druckes mit dem Gasdruck ist vorhanden, wenn $Nu^2 = \mathfrak{N}v^2$, $u = v\sqrt{1-\omega}$. Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten, welche die Molekeln des Salzes in Lösung und im Gaszustande besitzen, ist vorhanden, wenn das Volumen der in 1 cm^3 enthaltenen Wassermolekeln vernachlässigt werden kann gegen 1. Diese Voraussetzung wird im Folgenden der Einfachheit halber festgehalten werden.

Wir werden nun die im Vorhergehenden entwickelten Principien zunächst in Anwendung bringen auf die Diffusion eines in wässeriger Lösung nicht dissociirten Körpers, etwa des Rohrzuckers. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Molekeln des gelösten Körpers sich bewegen, betrachten wir als konstant und als gleich der Geschwindigkeit, welche die Molekeln im Gaszustand besitzen würden. Wir setzen ferner voraus, daß die Concentration der Lösung allenthalben eine so geringe sei, daß die Zusammenstöße zwischen zwei Molekeln des gelösten Körpers an Zahl verschwinden gegenüber den Zusammenstößen mit Molekeln des Lösungsmittels; jede einzelne Molekel des gelösten Körpers wird sich dann so bewegen, als ob sie allein in dem Lösungsmittel enthalten wäre; die mittlere Länge der geradlinigen Stücke, aus welchen die Zickzackbahnen der Molekeln sich zusammensetzen, wird lediglich bedingt durch die Anstöße der gelösten Molekeln an die Molekeln des Lösungsmittels; die mittlere molekulare Weglänge ist also unabhängig von der Concentration.

Gleiches gilt natürlich auch von der Zeit T, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anstößen vergeht oder von der Anzahl der Anstöße in der Zeiteinheit. Es möge nun die Lösung eingeschlossen sein in einem cylindrischen Gefäß; in jeder zu der Axe des Cylinders senkrechten Ebene sei die Concentration dieselbe, dagegen nehme die Concentration in der Richtung der Cylinderaxe nach einem gegebenen Gesetze ab. Betrachten wir irgend eine zu der Cylinderaxe senkrechte Ebene und in dieser eine Fläche von 1 cm² Inhalt, so werden von beiden Seiten her Molekeln des gelößten Körpers durch dieselbe hindurch gehen; es wird aber offenbar die Zahl der Molekeln, welche von der Seite größerer Concentration herkommen, größer sein, als die Zahl der von der Seite geringerer Concentration kommenden. Im Ganzen bleibt also ein Ueberschuß von Molekeln, welche von der Seite größerer nach der Seite kleinerer Concentration übergehen und dieser stellt den Diffusionsstrom dar. Bezeichnen wir die Concentration, d. h. die Zahl der Grammmolekeln, welche in 1 cm³ der Lösung enthalten sind, durch N, die molekulare Geschwindigkeit der gelößten Molekeln durch u, die molekulare Weglänge, d. h. die mittlere Länge der geradlinigen Stücke der Zickzackwege, durch l, endlich durch z die Richtung der Cylinderaxe, so ergiebt sich für die Zahl der von der Seite größerer Concentration kommenden Grammmolekeln der Ausdruck

$$Q = \tfrac{1}{4} Nu + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial N}{\partial z} lu .$$

Für die Zahl der von Seiten kleinerer Concentration kommenden

$$Q' = \tfrac{1}{4} Nu - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{\partial N}{\partial z} lu.$$

Hiernach wird der Diffusionsstrom gegeben sein durch

$$Q - Q' = \tfrac{1}{3} lu \frac{\partial N}{\partial z}$$

und der Diffusionskoëfficient für den Tag als Zeiteinheit:

$$k = 8{,}64 \times 10^4 \frac{lu}{3}.$$

Setzt man für u die aus dem Gasgesetze zu berechnende Geschwindigkeit, so ergiebt sich beispielsweise für Rohrzucker

$$l = 0{,}077 \times 10^{-6} \text{ cm},$$

Wir gehen über zu dem Problem der elektrolytischen Leitung. Wir setzen dabei voraus, daß die Lösung des Elektrolyten so verdünnt sei, daß derselbe vollständig in die beiden Jonen gespalten ist. Wir können dann bei der Berechnung der Bewegungen die positiven und negativen Jonen vollständig unabhängig von einander behandeln und bestimmen schließlich die Stromstärke durch eine Superposition der gefundenen Einzel-Bewegungen. Die Zahl der positiven Jonen, welche in 1 cm³ der Lösung sich befinden, sei N; die Masse eines Jons sei μ_p, die mit derselben verbundene Menge von positiver Elektricität ε. Wir denken uns den Elektrolyten eingeschlossen in einem Cylinder; die elektromotorische Kraft wirke längs seiner Axe, und besitze, bezogen auf die elektrostatische Einheit der positiven Elektricität, die Stärke Z.

Betrachten wir ein Volumelement $d\tau$ im Inneren des Elektrolyten, so wird von diesem in 1 sec eine Zahl von $Nd\tau/T$ Jonen nach allen Seiten des Raumes ausgeschleudert werden, entsprechend der Zahl der Anstöße, welche die in dem Volumelement enthaltenen Jonen in 1 sec erhalten. Ein großer Theil der letzteren wird schon nach kurzer Zeit von benachbarten Molekeln des Lösungsmittels aufgefangen und von der ursprünglichen Wurfrichtung abgelenkt werden, andere Jonen werden sich weiter entfernen, aber schließlich werden alle der ablenkenden Wirkung von Molekeln des Lösungsmittels unterliegen. Verfolgen wir die von $d\tau$ ausgehenden Jonen nur bis zu den Endpunkten ihrer geraden Wurfrichtungen, so werden dieselben über eine um $d\tau$ beschriebene Kugel in concentrischen Schichten sich vertheilen, deren Dichte nach außen hin rasch abnehmen wird. Die elektromotorische Kraft Z wirkt auf die von $d\tau$ ausgesandten Jonen ganz ebenso, wie die Schwerkraft auf einen geworfenen Stein, sie ertheilt allen Jonen eine Ablenkung von der geradlinigen Wurfrichtung, welche sich nach dem Fallgesetze berechnen läßt; dieselbe wächst mit dem Abstand bis zu dem sich die Jonen von dem Elemente $d\tau$ entfernen, sie ist größer für die äußeren, kleiner für die inneren Schichten der erwähnten Kugel. Mit Rücksicht hierauf wie auf die verschiedene Dichtigkeit der Jonen in den aufeinanderfolgenden koncentrischen Kugelschalen ergiebt sich der Mittelwerth ζ der Verschiebung, welche die in 1 sec von dem Volumelement $d\tau$ ausgesandten Jonen durch die elektromotorische Kraft erleiden,

$$\zeta = \frac{\varepsilon l_p^2}{\mu_p u_p^2} Z$$

wo l_p die Weglänge, u_p die molekulare Geschwindigkeit; multipli-

ciren wir die Verschiebung ξ mit der Zahl N/T der Jonen, welche in der Volumeinheit während 1 sec neue Wege beginnen, so erhalten wir die Menge positiver Jonen, Q_p, welche in 1 sec durch die Querschnittseinheit des Leiters hindurchgehen

$$Q_p = \frac{N}{T_p} \frac{\varepsilon l_p^2}{\mu_p u_p^2} Z = N\varepsilon \frac{l_p}{\mu_p u_p} Z.$$

Ebenso findet man die entsprechende Menge negativer Jonen

$$Q_n = N\varepsilon \frac{l_n}{\mu_n u_n} Z.$$

Es wird somit die Ueberführungszahl

$$n = \frac{l_n/\mu_n u_n}{l_p/\mu_p u_p + l_n/\mu_n u_n}$$

oder mit Rücksicht auf die zwischen Molekulargewicht und molekularer Geschwindigkeit bestehende Beziehung

$$n = \frac{l_n u_n}{l_p u_p + l_n u_n}$$

und die elektrische Leitfähigkeit

$$k = N\varepsilon^2 \left(\frac{l_p}{\mu_p u_p} + \frac{l_n}{\mu_n u_n} \right).$$

Wir werden nun N auch betrachten können als die Zahl der Grammionen in 1 cm³ der Lösung; bezeichnen wir außerdem durch $\mathbf{A}$ die Anzahl der g Wasserstoff, welche in 1 sec durch einen Strom abgeschieden werden, der nach elektromagnetischem Maaße die Stärke 1 besitzt. ($\mathbf{A} = 0{,}0001047\ g$), so stellt der Bruch $N/\mathbf{A}$ die Anzahl der elektrolytischen Aequivalente dar, welche in 1 cm³ der Lösung enthalten sind. Drücken wir nun die Leitfähigkeit der Lösung aus in elektromagnetischem Maaße, dividiren wir dieselbe durch die in elektrolytischen Aequivalenten gemessene Concentration, so ergiebt sich die Größe, welche F. Kohlrausch als molekulare Leitfähigkeit bezeichnet hat. Wir finden

$$L = \frac{1}{\mathbf{A}} \left(\frac{l_p}{\mu_p u_p} + \frac{l_n}{\mu_n u_n} \right) = U + V.$$

Hier sind U und V die von F. Kohlrausch berechneten absoluten Beweglichkeiten der Jonen; für die letzteren ergeben sich somit aus unserer kinetischen Theorie die Werthe

$$U = \frac{l_p}{A\mu_p u_p}, \qquad V = \frac{l_n}{A\mu_n u_n}.$$

Bezeichnet man durch ω die Geschwindigkeit einer Wasserstoffmolekel bei der Temperatur unseres Elektrolyten, so ist

$$\mu_p u_p^2 = \mu_n u_n^2 = 2\omega^2.$$

Somit ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{l_p}{\mu_p u_p} = \frac{l_p u_p}{2\omega^2}, \quad \frac{l_n}{\mu_n u_n} = \frac{l_n u_n}{2\omega^2}$$

und

$$U = \frac{l_p u_p}{2A\omega^2}, \qquad V = \frac{l_n u_n}{2A\omega^2}.$$

Setzt man für u_p und u_n die dem Gaszustand entsprechenden Geschwindigkeiten, so ergeben sich beispielsweise die folgenden Werthe der molekularen Weglängen:

	Li	*Na*	*K*	*F*	*Cl*	*Br*	*J*
$l \times 10^8$ (cm)	0,16	0,44	0,88	0,12	0,86	1,39	1,76.

Die Anwendung der kinetischen Theorie auf die Theorie der elektrolytischen Leitung ist von Interesse deßhalb, weil hier eine Prüfung der Resultate durch die entsprechende Theorie der Diffusion des Elektrolyten ermöglicht wird. Wir denken uns den Elektrolyten wieder eingeschlossen in ein cylindrisches Gefäß; die Concentration nehme in der Richtung der Axe ab, sie sei aber überall so klein, daß die Molekeln des Elektrolyten vollständig in die beiden Jonen zerfallen sind. Wir könnten zunächst die Diffusion der beiden Arten von Jonen von einander unabhängig in der zu Anfang angegebenen Weise berechnen; wenn aber z. B. die Diffusionsgeschwindigkeit des negativen Jons eine größere ist, als die des positiven, so wird in Folge der Diffusion eine positive elektrische Ladung auf der einen, eine negative auf der anderen Seite des Cylinders sich einstellen und diese würde die Diffusionsgeschwindigkeit der negativen Jonen vermindern, die der positiven vermehren. Der Bewegungszustand ist ein stationärer offenbar nur dann, wenn der durch die Potentialdifferenz bedingte elektrische Strom sich zu dem Diffusionsstrom in ein solches Verhältniß gesetzt hat, daß durch den Querschnitt des Diffusionscylinders jederzeit ebenso viel positive wie negative Jonen hindurchgehen. Bezeichnen wir die hiezu nothwendige elektromotorische Kraft mit Z, so giebt die Verbindung der Formeln, welche wir im Vorhergehenden für Diffusion und Elektrolyse entwickelt haben, für

die Anzahl der Grammmolekeln des positiven Jons, welche in 1 sec durch eine Fläche von 1 cm² hindurchgehen,

$$S_p = \frac{l_p u_p}{3} \frac{dN}{dz} + N\varepsilon \frac{l_p}{\mu_p u_p} Z.$$

Ebenso für das negative Jon

$$S_n = \frac{l_n u_n}{3} \frac{dN}{dz} - N\varepsilon \frac{l_n}{\mu_n u_n} Z.$$

Bestimmen wir den Werth von $N\varepsilon Z$ durch die Bedingung $S_p = S_n$ so ergiebt sich:

$$S_p = \tfrac{1}{3} l_p u_p \times 2n \frac{dN}{dz}$$

wo n die Ueberführungszahl bezeichnet. Der Diffusionskoëfficient bezogen auf die sec. als Zeiteinheit ist somit:

$$k' = 2n \frac{l_p u_p}{3}.$$

Drückt man n und $l_p u_p$ durch die absoluten Beweglichkeiten U und V aus, so ergiebt sich die Formel

$$k' = \tfrac{1}{3} \mathbf{A} \omega^2 \frac{2UV}{U+V}$$

welche mit der von Nernst auf anderem Wege gefundenen übereinstimmt; für die numerische Rechnung ist es am bequemsten, die Formel in der Form

$$k' = \tfrac{4}{3} \mathbf{A} \omega^2 n U$$

zu schreiben. Setzt man für $\mathbf{A}$ und ω ihre Werthe und berechnet man den Diffusionskoëfficienten für den Tag als Zeiteinheit, so ergiebt sich

$$k = 40{,}1\, n U \times 10^{10}.$$

Beispielsweise ist für HCl $n = 0{,}19$ und $U = 300 \times 10^{-13}$, somit

$$k = 2{,}44$$

während der beobachtete Werth 2,30 ist.

Man würde eine Prüfung der Formel natürlich auch in der Weise ausführen können, daß man mit Hülfe der Werthe von k, n und u die molekulare Weglänge berechnete. Die so aus der Diffusionskonstanten sich ergebenden Weglängen würden mit den aus der Leitfähigkeit berechneten in vollkommen befriedigender Uebereinstimmung stehen.

Absolute Härtemessung.

Von

F. Auerbach in Jena.

Einleitung.

In Anbetracht des Umstandes, daß die Härte eine der auffälligsten und wichtigsten Eigenschaften der festen Körper ist, muß es Wunder nehmen, daß das in ihr liegende Problem bis zum heutigen Tage ohne eine wissenschaftlich befriedigende Lösung geblieben ist. Zwar ist die Zahl der einschlägigen Bemühungen eine überaus große, aber der Erfolg steht hierzu in einem sehr ungünstigen Verhältnisse. Das Problem, das eine physikalische Eigenschaft der Körper darbietet, kann ganz allgemein in drei Theilprobleme zerlegt werden, nämlich erstens: die wissenschaftliche Definition des betreffenden Begriffs als einer mathematischen Größe; zweitens: die Angabe einer Methode und die Construktion eines Apparates zur Bestimmung dieser Größe; drittens: die wirkliche Ausführung derartiger Messungen. Dabei kommt es zunächst durchaus nicht auf die Einfachheit und praktische Brauchbarkeit des Verfahrens an — diese Frage gehört vielmehr einem viel späteren Stadium der Untersuchung an —, sondern lediglich auf die wissenschaftliche Exaktheit der Definition, der Methode, des Apparates und der Messungen.

Historisch-Kritisches.

Ein kurzer Blick auf die bisherigen Härtemessungen zeigt, daß sie begründeten Anspruch auf wissenschaftliche Exaktheit nicht erheben können. Der erste Versuch, die Härte zu definiren, liegt in dem bekannten Ausspruche: Ein Körper ist härter als ein andrer, wenn eine ebne Fläche des ersteren von dem in Form einer Spitze angewandten letzteren nicht geritzt wird; wird sie dagegen geritzt, so ist er weicher. Diese Definition würde, wenn sie überhaupt eine solche wäre, den fundamentalen Fehler haben, eine Spitze des einen Materials mit einer ebenen Fläche des andern zu vergleichen, also eine Vergleichung unter gar nicht vergleichbaren Umständen zu versuchen; und diesem Fehler reihen sich zahlreiche andre an. Aber der Ausspruch enthält gar keine mathematische Definition, er sowohl, wie die auf ihn gegründeten,

allgemein verbreiteten Härteskalen, liefern keine Härtezahlen, sondern nur Härtenummern, und selbst diese haben aus den obigen Gründen oft einen zweifelhaften Werth.

Um wirkliche Härtezahlen zu erhalten, hat man dann an die Thatsache angeknüpft, daß das Auftreten eines Ritzes von dem Drucke abhängt, unter welchem die Spitze während ihrer Bewegung steht, und man hat geradezu diesen, in Gewichten ausgedrückten Druck als Maaß der Härte bezeichnet. Von äußeren Schwierigkeiten abgesehen ist dieser Definition ihre sehr spezielle Bedeutung vorzuwerfen; speziell ist dabei 1) das Material der Spitze, 2) ihre Form, also im wesentlichen der Grad ihrer Spitzigkeit, der sich überdies der exakten Angabe meist entzieht, endlich 3) ein fast völlig unbeachtet gebliebener Umstand, nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher, und die Neigung, unter welcher die Spitze fortbewegt wird; auf die Größe des zu messenden normal zur Ebene wirkenden Druckes müssen beide Umstände von Einfluß sein. Diese Betrachtung führt zugleich auf einen den bisher genannten Methoden gemeinsamen principiellen Fehler, der darin liegt, daß man einen statischen Begriff, wie die Härte, durch einen Bewegungsvorgang, wie das Ritzen, messen wollte — ein Abweg, auf den man jedenfalls nur aus dem praktischen Grunde gerathen ist, daß ein linienförmiger Eindruck sich besser beobachten läßt, als ein punktförmiger. Am deutlichsten zeigt sich die Fehlerhaftigkeit dieser Auffassung in dem Umstande, daß die so definirte Härte für eine und dieselbe Krystallfläche in verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe annimmt, was mit der wahren Härte nichts zu thun hat, und nur daher rührt, daß der ausgeübte schiefe Druck außer der normalen auch eine laterale, in verschiedenen Richtungen verschiedene Componente hat.

Es ist daher als ein Fortschritt zu bezeichnen, daß die statische Methode, die übrigens älter als die dynamische ist, in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten wieder aufgenommen worden ist, wobei freilich hinzugefügt werden muß, daß diese Methoden statisch nur insoweit sind, als laterale Bewegungen dabei nicht auftreten. Man schlägt, bohrt oder preßt eine Spitze in eine ebene Fläche des zu untersuchenden Materials ein und definirt die Härte entweder als das zur Erreichung einer bestimmten Tiefe des Eindringens erforderliche Belastungsgewicht, oder als die Tiefe dieses Eindringens bei gegebner Belastung, oder auch als die Zeit, welche bei gegebner Belastung nothwendig ist, um bei gleichmäßigem Eindringen eine bestimmte Tiefe zu er-

reichen. Man ersieht aber schon aus dieser Zusammenstellung, daß hier verschiedene Momente ineinandergreifen, und zwar in einer nicht allgemein anzugebenden Weise. Dazu kommt als weiterer Uebelstand, daß hier das betreffende Material nicht nur sehr stark beansprucht, sondern an der zu untersuchenden Stelle geradezu zerstört wird, daß man also in dem Augenblicke, wo man die Härte mißt, gar nicht mehr den ursprünglichen Körper vor sich hat. Aus diesen Gründen ergiebt sich, daß auch die so erhaltene Größe ein die Härte in ausreichendem und nothwendigem Grade charakterisirendes Maaß nicht sein wird.

Das Verdienst, die principiellen Fehler, von denen hier die Rede war, richtig erkannt und durch eine neue Definition der Härte im wesentlichen vermieden zu haben, gebührt Hertz[1]). Erstens ersetzt er die Spitze durch eine kugelförmige Endfläche oder, richtiger gesagt — da doch die Spitze nichts anderes als eine derartige Kugelfläche mit sehr kleinem Radius ist — er giebt ihr eine beliebige, aber genau meßbare Krümmung; zweitens läßt er dahingestellt, aus welchem Material die Spitze bestehe, derart daß man hierfür, wenn man es für wünschenswerth erachtet, auch denjenigen Stoff wählen kann, aus welchem der zu untersuchende Körper besteht; das Ergebniß hängt alsdann überhaupt von keinem fremden Material ab; drittens endlich bringt er dem zu untersuchenden Körper keine Verletzung von bestimmtem Grade bei, sondern läßt ihn nur eben seine Elasticitätsgrenze erreichen. Hiernach lautet die Definition der Härte folgendermaßen: Die Härte ist die Elasticitätsgrenze eines Körpers bei Berührung einer ebenen Fläche desselben mit einer kugelförmigen Fläche eines andern Körpers. Damit ist zugleich der Begriff der Härte eingereiht unter die übrigen analogen Begriffe, welche sich auf die Vorgänge des Zuges, der Biegung u. s. w. beziehen. Während es Hertz gelang durch eine höchst scharfsinnige, exakte Entwickelung des Berührungsproblems[2]) die theoretische Grundlage des Härte-Problems zu sichern und somit das erste der eingangs genannten drei Theilprobleme vollständig zu lösen, war er bei seinen Versuchen, eine geeignete Methode festzustellen und wirkliche Härtemessungen vorzunehmen, weniger erfolgreich, sodaß er nach den ersten Vorversuchen die Angelegenheit fallen ließ. Ich will hier auf eine Untersuchung der Umstände, die dabei maaßgebend waren, nicht eingehen. Dagegen glaube ich, daß es mir gelungen

1) H. Hertz, Verh. Berl. physik. Ges. 1882, p. 67.
2) Hertz, Crelle's J. 92, p. 156. (1882).

ist, eine durchaus brauchbare und einer genügenden, zum Theil sogar überraschenden Genauigkeit fähige Methode aufzufinden, und will diese, ihre Theorie, den darauf gegründeten Apparat und einige Messungen hier mittheilen, bemerke aber, daß diese letzteren zunächst nur den Zweck haben, zu zeigen, daß die Methode und die Resultate, die sie liefert, als eine befriedigende Lösung des zweiten und dritten Theilproblems zu betrachten sind.

Theorie.

Wenn eine ebene Fläche eines Körpers und eine kugelförmige Fläche eines andern Körpers sich ohne Druck berühren, so thun sie dies in einem Punkte. Wird jetzt ein bestimmter, gegen die Ebene normaler Druck ausgeübt, so verändern sich beide Flächen, die Ebene krümmt sich, die Kugelfläche plattet sich bis zu einem gewissen Grade ab, und damit geht der Berührungspunkt in eine beiden Körpern gemeinsame Fläche über. Diese Fläche heißt die Druckfläche; sie ist weder eben, noch von der Krümmung der Kugelfläche, ihre Krümmung liegt vielmehr zwischen beiden Werthen; wie groß sie ist, hängt nicht nur von der Krümmung der Kugelfläche, sondern auch von den Elasticitätsverhältnissen der beiden Körper ab; begrenzt endlich ist die Druckfläche durch eine Kreislinie.

Wird der ausgeübte Druck gesteigert, so nimmt die Druckfläche an Größe zu, und der gesteigerte Druck vertheilt sich somit auf eine größere Fläche. Nun hängt die Beanspruchung des Materials offenbar nicht von dem ausgeübten Gesammtdruck, sondern von dem Druck auf die Flächeneinheit ab; es kommt daher darauf an, wie sich diese letztere Größe bei Steigerung des Gesammtdruckes verhält, resp. nach welchem Gesetze sie selbst wächst — denn daß auch der Druck pro Flächeneinheit wächst, folgt schon aus den bekanntesten Erfahrungsthatsachen. Nach welchem Gesetze der Einheitsdruck mit dem Gesammtdrucke zunehmen wird, hängt von dem Gesetze ab, nach welchem die Druckfläche mit dem Gesammtdrucke wächst. Die Theorie zeigt nun, daß der Radius der Druckfläche (genauer: der Radius der sie begrenzenden Kreislinie) wie die Kubikwurzel aus dem Gesammtdruck wächst, also die Druckfläche selbst wie die 2/3. Potenz desselben; so viel also geht durch Vertheilung verloren, und der Einheitsdruck steigt nur wie die Kubikwurzel aus dem Gesammtdruck. Auch die Frage, wie sich der Gesammtdruck auf die Fläche vertheilt, wird von der Theorie beantwortet, und zwar dahin, daß der Druck zu einer

bestimmten Zeit vom Mittelpunkte der Druckfläche aus, wo er am größten ist, nach dem Rande hin, wo er null ist, allmälich abnimmt; der oben schlechthin als solcher bezeichnete Einheitsdruck hat also nur die Bedeutung eines Durchschnittswerthes, der im Mittelpunkt stattfindende Maximalwerth verhält sich zu ihm wie 3 : 2. Wächst nun der Gesammtdruck mehr und mehr, so wird auch der letztgenannte Maximaldruck immer größer, und bei einem bestimmten Werthe desselben wird der Eine der beiden Körper oder werden beide, falls sie aus demselben Stoffe bestehen, die Elasticitätsgrenze erreichen, was sich darin zeigen wird, daß, bei einem plastischen Körper, eine dauernde Deformation eintritt, also eine Doformation, die auch nach Aufhebung des Drucks bestehen bleibt, daß dagegen, bei einem spröden Körper, der Zusammenhang der Theile an gewissen Stellen, also durch einen Sprung, aufgehoben wird. Dieser Grenzwerth des im Mittelpunkte der Druckfläche herrschenden Einheitsdrucks ist nach der Definition von Hertz die Härte des betreffenden Körpers.

Bisher wurde ein bestimmtes System zweier sich berührenden Körper angenommen. Es entsteht jetzt die Frage, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn es durch ein andres, in irgend einer Weise von jenem abweichendes, ersetzt wird. Die Abweichung kann im Wesentlichen nur zwei Punkte betreffen; es kann nämlich 1) die Kugelfläche eine andre Krümmung haben, und es können 2) die Körper aus Stoffen andrer Elasticität bestehen. Was den ersten Punkt betrifft, so zeigt die Theorie, daß, bei sonst gleichen Umständen, der Radius der Druckfläche der Kubikwurzel aus dem Krümmungsradius der Kugelfläche, also die Druckfläche selbst seiner 2/3. Potenz direkt proportional ist. Bei gleichem Gesammtdruck ist also der Einheitsdruck und folglich auch der Maximaldruck der Kubikwurzel aus dem Krümmungsradius proportional. Ist nun dieser Maximaldruck die maaßgebende Größe, so muß sein der Elasticitätsgrenze entsprechender Grenzwerth unabhängig vom Krümmungsradius sein. Es muß also der Grenzwerth des Gesammtdruckes dem Quadrate des Grenzradius der Druckfläche proportional sein, oder, wenn man hierin mit Hilfe der obigen Beziehungen den Radius der Druckfläche durch Gesammtdruck und Krümmungsradius ausdrückt, es muß der Grenzwerth des Gesammtdrucks mit dem Quadrate des Krümmungsradius wachsen. Auf den zweiten Punkt soll hier zunächst nicht näher eingegangen werden, es sei nur bemerkt, daß unter sonst gleichen Umständen die Größe der Druckfläche von einer Combination der Elasticitätsconstanten der Stoffe abhängt; in dem hier vorerst ausschließlich

zu betrachtenden Falle, daß die beiden Körper aus dem gleichen Stoffe bestehen, wird diese Abhängigkeit natürlich eine besonders einfache.

Um die angeführten Gesetze in Formeln zu bringen, sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Es sei:

ϱ der Krümmungsradius der Kugelfläche in mm.
p der ausgeübte Druck in kgr.
P sein Grenzwerth, d. h. sein Werth im Augenblicke des Eintritts einer bleibenden Deformation.
p_1 der Einheitsdruck im Mittelpunkte der Druckfläche, also der Maximaldruck, in kgr pro qmm.
P_1 sein Grenzwerth, also die „theoretische Härte".
d der Durchmesser der Druckfläche in mm (da er in den Beobachtungen unmittelbar auftritt, ist er dem oben stets betrachteten Radius vorzuziehen).
D sein Grenzwerth in mm.
H die wahre Härte, die, wie sich zeigen wird, von der theoretischen in einer gewissen Hinsicht verschieden ist.
q zur Abkürzung der Quotient p/d^2.
Q sein Grenzwerth.
f die Größe der Druckfläche in qmm.
F ihr Grenzwerth.
E der Elasticitätsmodul des Materials in kgr. pro qmm.
μ seine Elasticitätszahl d. h. das Verhältniß der Quercontraktion zur Längsdilatation.
E′ zur Abkürzung der Quotient $E/(1-\mu^2)$.

Schließlich sollen eckige Klammern bedeuten, daß die eingeschlossene Größe nicht in obigen absoluten Maaßen, sondern in den zufälligen Beobachtungsmaaßen ausgedrückt ist.

Hiernach ergeben sich folgende Formeln:

$$f = \frac{\pi}{4} d^2, \qquad F = \frac{\pi}{4} D^2$$

$$p_1 = \frac{3}{2}\frac{p}{f} = \frac{6}{\pi}\frac{p}{d^2}, \qquad P_1 = \frac{3}{2}\frac{P}{F} = \frac{6}{\pi}\frac{P}{D^2}$$

für ein und daselbe ϱ und E': $\frac{d}{\sqrt[3]{p}} = \text{const}$, also $\frac{d^3}{p} = \text{const.}$ also

$$q = \text{const}, \tag{1}$$

ein constanter Werth, mit dem also auch der Grenzwerth Q über-

einstimmt. Folglich für gleiches ϱ und E': $\frac{p_1}{\sqrt[3]{p}} = \text{const}$. Für verschiedene ϱ, aber ein und dasselbe E': $\frac{d}{\sqrt[3]{p\varrho}} = \text{const}$, also

$$\varrho q = \text{const}; \tag{2}$$

für verschiedene ϱ und E': $d = \sqrt[3]{\frac{12p\varrho}{E'}}$, $D = \sqrt[3]{\frac{12P\varrho}{E'}}$; für verschiedene ϱ, aber gleiches E':

$$P_1 = \text{const, also } \left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{D^2} = \text{const} \\ \frac{P}{\varrho^2} = \text{const} \\ \frac{D}{\varrho} = \text{const}; \end{array} \right\} \tag{3}$$

drei Gleichungen, welche nur verschiedene Ausdrucksweisen einer und derselben Beziehung sind. Endlich für ein bestimmtes ϱ und E' die theoretische Härte:

$$P_1 = \frac{6}{\pi}\frac{P}{D^2} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{E'^2P}{\varrho^2}} = \frac{6}{\pi}\sqrt[3]{Pq^2} \tag{4}$$

und nebenbei die Elasticitätsconstante E':

$$E' = 12\varrho q. \tag{5}$$

Methode.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, daß man, um aus den Erscheinungen bei der Berührung einer ebenen und einer kugelförmigen Fläche gleichen Materials die Härte desselben ableiten zu können, den Druck, unter welchem die Berührung stattfindet, bis zur Elasticitätsgrenze steigern, den Augenblick, in welchem diese erreicht ist, genau feststellen und in diesem Augenblicke zwei Größen: den Gesammtdruck und den Durchmesser der Druckfläche, messen muß. Die erste der Formeln (4) giebt dann die theoretische Härte. Für die Genauigkeit des Ergebnisses ist es offenbar mißlich, daß man jede der beiden Größen P und D nur einmal messen kann, und es erscheint wünschenswerth, wenigstens

für die Größe D — denn für P ist es augenscheinlich nicht möglich — hierin Wandel zu schaffen; dazu können die beiden andern Formeln (4) Anwendung finden. Die eine von ihnen erfordert, außer der Messung von P noch die Kenntniß von ϱ und E'; während man nun ϱ als aus der Herstellung der Kugelfläche bekannt annehmen kann, würde man gezwungen sein, E', also E und μ entweder aus den für den betreffenden Stoff vorliegenden Messungen zu entlehnen, oder diese Messung an andern Stücken desselben Materials selbst vorzunehmen, beides wenig empfehlenswerthe Auskunftsmittel, da die Elasticitätsverhältnisse bekanntlich mit der kleinsten Verschiedenheit des Stoffs und selbst von individuellem Stück zu Stück oft nicht unerheblich variiren. Dagegen ist die letzte der Formeln (4) in jeder dieser Hinsichten durchaus brauchbar; sie setzt nämlich außer der Messung von P lediglich die Kenntniß von q voraus, die man sich, da bei zunehmendem Gesammtdruck q constant bleibt, aus einer größeren Zahl von Messungen bei wachsenden p verschaffen kann, für die man also nicht auf die Messung des einzigen Grenzwerthes beschränkt ist. Im Gegentheil, es kann sogar nur vortheilhaft sein, diesen Grenzwerth Q, falls er von den übrigen Werthen abweichen sollte, nicht mit zur Bildung des Mittelwerthes von q zu benutzen, da in dem Augenblicke, wo man ihn beobachten kann, der Körper schon eine bleibende Deformation erfahren hat. Daß man auf diese Weise gezwungen wird, die Drucksteigerung nach und nach vorzunehmen, kommt nicht in Betracht, da ein solches Verfahren ohnehin geboten ist, wenn man nicht für den Grenzdruck einen falschen Werth zu finden Gefahr laufen will.

Der Eintritt der Elasticitätsgrenze ist am einfachsten bei sog. spröden Körpern mit Genauigkeit festzustellen, und zwar durch das plötzliche Auftreten eines Sprunges, von welchem gleich hier angeführt werden möge, daß er z. B. bei Glas genau kreisförmig, mit der Druckfläche concentrisch und sehr klein im Verhältniß zum Krümmungsradius der Kugelfläche ist. Demgemäß ist in dieser Mittheilung nur von spröden Körpern die Rede. Die meisten spröden Körper sind zugleich mehr oder weniger durchsichtig, und auf durchsichtige Körper allein ist die Methode in ihrer hier zu beschreibenden Form unmittelbar anwendbar. Diese Methode aber besteht in folgendem.

Der Körper mit kugelförmiger Fläche wird in Form einer Linse von 1 bis 30 mm Krümmungsradius, der Körper mit ebener Fläche in Form einer planparallelen Platte von rund 11,6 mm freiem Durchmesser und 8 mm Dicke angewendet, also von einer

im Vergleich zur Breite hinreichenden Dicke, um eine Durchbiegung der Platte als solcher auszuschließen. Die Platte ist fest, die Linse frei aufgestellt; der Druck wird, durch Vermittelung eines Hebels, durch Gewichte erzeugt. Die Druckfläche und das Auftreten des Sprunges werden, um naheliegenden Einwänden zu begegnen, in unveränderter Drucklage von Platte und Linsen beobachtet, und zwar, da es sich um sehr kleine Größen handelt, mit einem Mikroskop, normal durch die Platte hindurch. Die Druckfläche erscheint dabei als ein dunkler, kreisförmiger Fleck, der ebenso wie die ihn umgebenden Ringe als Interferenzerscheinung aufzufassen ist; übrigens finden auch die Durchmesser dieser Ringe, wie sich zeigen wird, bei den Beobachtungen Verwerthung. Die Einzelheiten der Methode müssen an der Hand des Apparates besprochen werden.

Apparat.

Der durch freundliche Vermittelung von Herrn Abbe in dem hiesigen optischen Institute von Zeiss ausgeführte Apparat, bei dessen Construction meine hiesigen Fachgenossen, insbesondere aber Herr Abbe selbst, mir mit werthvollen Rathschlägen zur Hand gingen, ist in der Figur in einem schematischen Schnitt mit Fortlassung nebensächlicher Dinge dargestellt. Er ist so gebaut, daß er genügende Festigkeit besitzt, um den großen Drucken, denen er auszusetzen ist, gewachsen zu sein; zugleich ist er zur möglichsten Vermeidung von Erschütterungen an einem Pfeiler eines Kellerzimmers mittelst starker Bänder montirt. Die gußeiserne Grundplatte $G\ G'$ hat T-förmigen Querschnitt, 730 mm Länge, 75 mm Breite und der Länge nach einen centralen Schlitz. Der auf ihr aufgeschraubte Träger T enthält die Lager t für die Schneiden D, welche den Drehpunkt für den schmiedeeisernen zweiarmigen Hebel $H\,H'$ bilden. Der kürzere linke Schenkel H hat in 50 mm horizontalem Abstand von der Drehaxe eine ringförmige Erweiterung $l\,l'$, deren konische Hohlung zur Aufnahme des die Linse L tragenden Zapfens Z dient. Von dem etwa zehnmal so langen rechten Hebelarm H', der in der Schneide c endet, ist in der Figur ein längeres Stück weggelassen. Die Platte P aus dem zu untersuchenden Material befindet sich in der centralen Durchbohrung der oberen Platte $o\,o'$ eines Trägers, welcher aus der untern Platte u und einem Paar sie verbindender starker Säulen besteht, von denen in der Figur, da sie mit dem Linsenzapfen in einer Linie liegen, nur ein Stumpf s angedeutet ist.

Die Platte $o\,o'$ ist 16 mm stark, mit ihrer unteren Fläche schließt diejenige der zu untersuchenden Platte P in einer Linie ab. Der ganze Kasten läßt sich in dem Schlitz der Grundplatte verschieben und mittelst der kräftigen Flügelschraube S_1 derart feststellen, daß ein gewünschter Punkt der Platte P genau über den höchsten Punkt der Linse L kommt. In ähnlicher Weise läßt sich das Mikroskop M verschieben und mittelst der Flügelschraube S_2, sowie auf Grund der Form des Stativs ebenfalls genau vertikal über den höchsten Punkt der Linse aufstellen. Die Linse L ist in den Zapfen Z eingekittet, die Platte P in die Platte $o\,o'$ einfach eingesetzt, am Herausfallen wird sie durch zwei über ihren Rand geschobene Scharniere verhindert. Das Mikroskop enthält ein Okularmikrometer m und empfängt seine Beleuchtung, da sie von unten wegen Behinderung durch Platte und Linse nicht möglich ist, von der Seite, und zwar durch eine Gasflamme F, deren Strahlen durch eine Oeffnung im Rohr auf ein rechtwinkeliges, nur dessen eine Hälfte einnehmendes, Prisma n fallen, von hier nach unten und von dort wieder nach oben reflektirt werden, um endlich in der freien Hälfte des Rohres zum Auge des Beobachters zu gelangen. Der rechte Hebelarm H' kann mittelst der Schraube A in so hoher, und folglich der kurze Hebelarm H in so tiefer Stellung festgelegt werden, daß eine vorzeitige Berührung zwischen Linse und Platte ausgeschlossen ist. Wird A herabgelassen, so würde der lange Hebelarm bei weitem das Uebergewicht gewinnen, wenn dieses nicht durch den schmiedeeisernen Arm W mit dem Laufgewicht w ausgeglichen werden könnte; die Form von W war durch die Umstände geboten, ihre nachtheilige Wirkung auf die Empfindlichkeit des Hebels ist aber durch Hochlegung des letzten Armgliedes mit dem Laufgewicht w wieder aufgehoben. Letzteres wird so gestellt, daß zwischen Linse und Platte noch ein kleiner Zwischenraum bleibt, und alsdann durch Aufsetzen kleiner Ringe r auf den Stift q die Berührung eben hergestellt, was sich an der Verwandlung des bunten Interferenzcentrums in ein schwarzes zu erkennen giebt. Zur Wiederherstellung dieses Zustandes in jedem gewünschten Augenblicke und gleichzeitig zur Präcisirung des Verlaufes der Versuche dient der am Ende der Grundplatte mittelst des Trägers U aufgeschraubte Hebel $K\,K'$. Das Gehänge R, an dessen Haken verschieden große Waagschalen angehängt werden können, hat nämlich die Form eines Rahmens, in dessen Innerem, in gewissem Abstande übereinander, das Lager e und die Schneide c' angebracht sind; wird nun durch Senkung der Schraube B der Hebelarm K ge-

senkt, also K' gehoben, so nimmt das an diesem Hebel angebrachte Lager e' die Schneide c' des Gehänges auf, hebt dieses somit in die Höhe und entlastet dadurch den Haupthebel HH'; wird umgekehrt B hochgeschraubt, so senkt sich das Gehänge, die Schneide c nimmt e auf, und der Haupthebel wird belastet. Durch alle diese Einrichtungen wird es erreicht, daß im Laufe einer ganzen Versuchsreihe alle Stöße und plötzlichen Aenderungen ausgeschlossen bleiben, und es erfolgt die Belastung durch hinzugefügte Gewichte, durch Drehen der Schraube B und unter Mitwirkung der Federung des Hebelarms, in beliebig langsamer und allmählicher Weise. Im allgemeinen wurde hiernach vor jeder Steigerung des Druckes durch vollständige Entlastung die drucklose Berührung zwischen Linse und Platte wiederhergestellt; es wurde aber zur Controlle mehrfach auch umgekehrt verfahren, dabei aber, bei Annäherung an die Elasticitätsgrenze die Vorsicht gebraucht, das letzte Zusatzgewicht in der Gestalt von Sand auf die Waagschale aufzulegen.

Constanten und Fehlerquellen.

Die zunächst zu ermittelnden Constanten des Apparats sind der Werth eines Theiles des Okularmikrometers und das Verhältniß der Hebelarme. Jener wurde durch Vergleichung mit einem Objektmaaßstab ermittelt und zwar am genauesten schließlich in der Weise, daß eine Glasplatte, in deren Unterseite zehntel mm eingeritzt waren, in der Lage P beobachtet wurde. Es fand sich:

$$27 \text{ sc.} = 1 \text{ mm},$$

mit einer gleich zu besprechenden Abweichung am Rande. Das Verhältniß der Hebelarme hätte bei der Gestalt des Hebels auf direktem Wege nur ungenau ermittelt werden können; es wurde daher an die Stelle des Linsenzapfens Z ein Zapfen mit einer Spitze gebracht, auf diese eine kräftige Waagschale, die unter die Grundplatte herunterhing, gebracht und mit den aufgelegten Gewichten in's Gleichgewicht mit einer kleineren an das Gehänge R gehängten Waagschale nebst Gewichten gebracht. Es ergab sich auf diese Weise die Verhältnißzahl

$$v = 9{,}8$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,01, d. h. etwa $^1/_{1000}$

des Werthes. Hiernach sind alle im Mikroskop gemessenen Längen mit 27 zu dividiren, und aus dem beobachteten Gewicht, in dem natürlich das Gewicht von Gehänge und Waagschale mit enthalten ist, ergiebt sich der wirkliche Druck zwischen Linse und Platte durch Multiplikation mit 9,8.

Eine wichtige Frage ist ferner die, ob der im Mikroskop beobachtete schwarze Fleck seiner Größe nach die Druckfläche unmittelbar wiedergiebt, oder ob, und eventuell welche Correktionen vorerst noch vorzunehmen sind. Es sind hier vier Correktionen denkbar:

1) Wegen des Umstandes, daß eine fast vollständige Auslöschung des Lichts bekanntlich nicht nur in der Berührungsfläche von Platte und Linse, sondern noch darüber hinaus bis zu der Stelle stattfindet, wo der vertikale Abstand beider etwa $^1/_6$ Wellenlänge beträgt, der Fleck also um so viel größer erscheint als die wirkliche Druckfläche. Man könnte diese Correktion aus der durch die Drucktheorie gegebnen Gestalt der Linse berechnen; einfacher und sicherer gelangt man zum Ziele, wenn man erwägt, daß der erste, den Fleck umgebende dunkle Ring, sich da befindet, wo der vertikale Abstand von Linse und Platte $^1/_2$ Wellenlänge beträgt. Auf Grund der Messung dieses Ringdurchmessers und einer Rechnung, die hier übergangen werden möge, kann man sich dann eine kleine Tabelle verschaffen, welche die gesuchte Correktion in Skalentheilen als Funktion der Linsenkrümmung und des scheinbaren Fleckdurchmessers angiebt. Hier sei nur angeführt, daß sie zwischen 0,0 und 0,8 sc. variirt, also in vielen Fällen nicht unberücksichtigt bleiben darf und in diesen thatsächlich berücksichtigt worden ist.

2) Wegen der astigmatischen Verzerrung des durch die Planplatte beobachteten Bildes. Es genüge hier die Bemerkung, daß bei der Kleinheit des Gesichtswinkels der betreffende Fehler über $^1/_{1000}$ des Werthes nicht hinausgeht, außer wenn, was nie geschehen ist, an der äußersten Peripherie des Gesichtsfeldes beobachtet wird.

3) Wegen des Umstandes, daß der Fleck nicht die gekrümmte Druckfläche selbst, sondern ihre ebene Projektion wiedergiebt; auch dieser Fehler ist verschwindend klein, da selbst bei den kleinsten zur Anwendung gelangten Linsen und den stärksten Drucken der Größenunterschied beider Flächen unter $^2/_{1000}$ bleibt.

4) Wegen der etwaigen Wirkung der durch den Druck deformirten Platte als Planconcavlinse. Eine solche Wirkung würde

sttattfinden, wenn das beobachtete Objekt um eine in Betracht kommende Strecke hinter der Concavfläche läge, was denkbar wäre, da dieses Objekt, d. h. die Peripherie des Flecks, nach dem obigen an einer Stelle liegt, wo Platte und Linse sicht nicht mehr berühren, und da keine Angaben darüber vorliegen, wo eigentlich in einem Falle, wie der vorliegende, die Interferenzerscheinung ihren Sitz hat. Durch verschiedene Beobachtungen, sowie durch eine Grenzrechnung, stellte sich nun aber heraus, daß diese Fehlerquelle die vorerwähnten an Einfluß nicht oder doch nicht wesentlich übertrifft.

Prüfung der Theorie.

Messung der Elasticität und der Härte.

Als Material für die Versuche dienten drei von der hiesigen Glasschmelze Schott u. Gen. herrührende Glassorten, von denen Sorte I als ziemlich weich, II als normal, III als ziemlich hart bezeichnet wurde; grade in Anbetracht des Umstandes, daß es sich hierbei um drei Sorten eines und desselben Materials handelte, also nur geringe Härteunterschiede zu erwarten waren, mußten diese Versuche zugleich auch über die Empfindlichkeit der Methode entscheiden. Als viertes Material diente senkrecht zur Axe geschnittener Bergkrystall (Quarz), und zwar ebenso wie bei den Glassorten in der Weise, daß Linse und Platte von einem einzigen Stück des Materials herrührten. Auf optischem Wege überzeugte man sich davon, daß die Abweichung der schließlich benutzten Gläser von der Isotropie, sowie die Abweichung der Quarzplatten von der gewünschten Richtung nur eine sehr geringfügige war; wäre es nicht der Fall gewesen, so hätte sich das übrigens auch in der Lage und Gestalt der Sprünge offenbaren müssen, wie dies bei einigen, eigens zu diesem Zweck angestellten, hier aber nicht näher zu besprechenden Versuchen in der That der Fall war. Auch eine andere interessante Erscheinung soll an dieser Stelle nur eben erwähnt werden, nämlich die, daß der Sprung zwar mit der Druckfläche concentrisch ist, mit ihrem Rande aber nicht zusammenfällt, sondern ihn in einem meßbaren und bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterworfenen Abstande umschließt. Noch muß eine Frage beantwortet werden, die dem Leser sich unwillkürlich aufgedrängt haben wird, die Frage, wie es denn erlaubt sei, ein krystallisches Material zu wählen, während doch die Theorie nur für isotrope Körper gilt. Letzteres ist richtig; jedoch ist zu beachten, daß z. B. in der ersten

der Formeln (4) lediglich der Zahlenfaktor unrichtig sein könnte; erweisen sich nun die Beziehungen (1) und (2) empirisch als für die betreffenden Krystallkörper erfüllt, so wird auch in der letzten Formel (4) nur der Zahlenfaktor zweifelhaft sein können, und auch diese Unsicherheit wird man durch Prüfung der Beziehungen (3) und der zweiten Formel (4), sowie unter Zuhilfenahme bekannter Werthe von E' auf ein sehr geringes Maaß zurückführen können, zumal schon aus der Bedeutung dieses Zahlenfaktors sich ergiebt, daß er in enge Grenzen eingeschlossen ist. Immerhin wird man zugeben müssen, daß die Genauigkeit der Resultate für Krystalle vielleicht nicht ganz so groß sein wird, wie für isotrope Stoffe. In qualitativer Hinsicht zeigt sich der Gegensatz zwischen isotropen Stoffen und Krystallen in sehr auffälliger Weise; während nämlich bei ersteren Druckfläche wie Sprung kreisförmig sind, ist beim Bergkrystall zwar die Druckfläche ebenfalls ein Kreis, der Sprung aber hat für senkrecht gegen die Axe geschnittene Platten eine Form, welche zwischen derjenigen eines Kreises und der eines regulären Sechseckes liegt, eine Erscheinung, deren Verfolgung einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben muß. Schließlich sei angeführt, daß die Linsen aus dem Glase II die Krümmungsradien $\varrho = 3, 5, 10, 15$ mm, die Linsen aus den übrigen Stoffen dagegen zunächst solche von $\varrho = 4$ und 12 mm hatten, und zwar bis auf 1%, meist aber kleinere Beträge, genau; von noch stärker gekrümmten Linsen wird später die Rede sein.

Die ersten Messungen mußten den Zweck haben, die Theorie zu prüfen, also im wesentlichen zu untersuchen, ob und in wie weit die obigen Formeln (1), (2) und (3) Bestätigung finden. Erst dann konnte dazu übergegangen werden, mittelst der Formeln (4) und (5) die Größen P_1 und E' zu messen.

1) Zur Prüfung der Formel (1) $q = \text{const}$, also $p/d^3 = \text{const}$ wurden mit jedem Material zahlreiche Versuchsreihen unter wachsender Belastung ausgeführt. Hier genüge die Angabe einiger, weder besonders günstig, noch besonders ungünstig ausgewählter Beispiele:

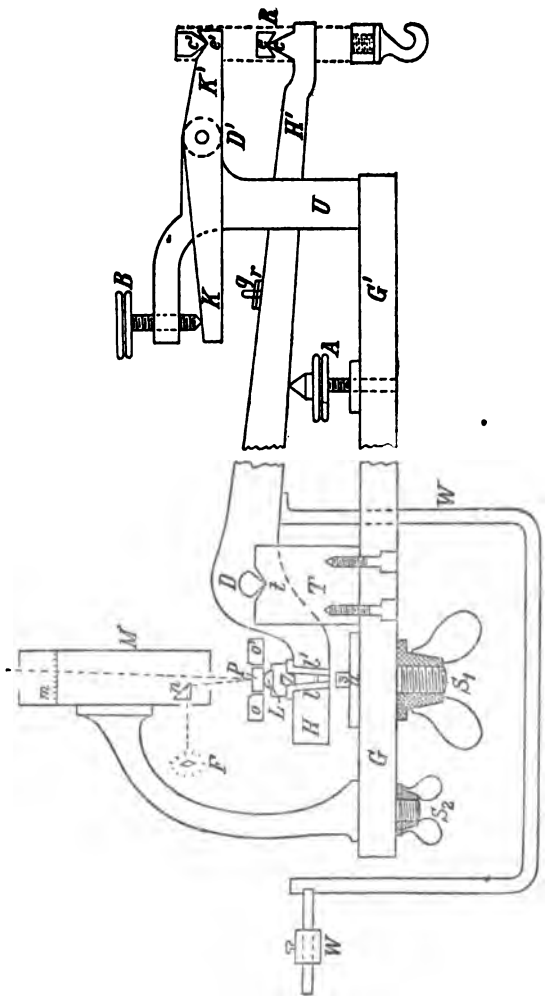
Glas II $\varrho = 10$			Quarz $\varrho = 12$		
$[p]$	$[d]$	$1000\,[q]$	$[p]$	$[d]$	$1000\,[q]$
227	8,9	321	754	12,4	396
354	10,5	306	1254	15,0	371
554	12,1	313	1677	17,0	342
754	13,5	307	2677	19,6	356
954	14,6	306	3177	20,5	369
1354	16,4	307	3677	21,6	368
1554	17,1	311	4390	23,0	359
1677	18,0	288	4800	23,7	361
1925	18,7	294	4887	23,9	357
3177	22,1	294			
3225	22,2	295			
3725	23,4	291			
4547	24,6	306			

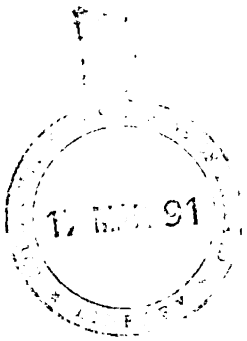
Wie man sieht, ist q in beiden Reihen in erster Annäherung constant; bei genauerem Zusehen zeigt sich, von den unregelmäßigen Schwankungen abgesehen, eine geringfügige Abnahme, welche sich z. B. darin ausspricht, daß in der einen Tabelle das Mittel der 7 ersten Zahlen 310, das der 6 letzten 295, in der andern Tabelle das Mittel der 5 ersten Zahlen 367, das der 4 letzten 361 ist, eine Abnahme, welche nach Formel (5) auf eine Abnahme des Elasticitätsmoduls mit wachsendem Drucke hinweist, also durchaus plausibel ist. Da sie meist sehr unbeträchtlich ist, in vielen Reihen aber sogar überhaupt nicht auftritt, soll sie hier nicht weiter verfolgt, sondern, der Theorie entsprechend, q als constant betrachtet werden. Faßt man demgemäß sämmtliche Schwankungen von q in einer Reihe als unregelmäßige auf und berechnet hiernach Mittelwerth und wahrscheinlichen Fehler, so findet man in den beiden obigen Beispielen:

$$[q] = 0{,}3028 \pm 0{,}0016 \qquad [q] = 0{,}3643 \pm 0{,}0031;$$

der wahrscheinliche Fehler beträgt also in der auf Glas bezüglichen Reihe nur etwa $^1/_2$ Proc., in der auf Quarz bezüglichen immer noch weniger als 1 Proc.

Um diesen Fehler noch weiter zu verringern, wurde jede Versuchsreihe mehrmals wiederholt; die Linse durfte dabei, da sie eine Verletzung nur ausnahmsweise aufwies, immer wieder benutzt werden, die gesprungene Plattenstelle natürlich nicht; da aber die Sprünge außerordentlich klein waren, konnten nach ein-


B
K
K'
D'
H'
U
G'
A
W
D
T
M
P
L
H
G
F
S1
S2
W



ander 20 bis 30 verschiedene Stellen derselben Platte benutzt werden, und es zeigte sich dabei, daß durch jeden Sprung der Zustand der Platte nur in einer sehr beschränkten Umgebung desselben verändert worden war, so daß man selbst ziemlich benachbarte Stellen verwerthen konnte; nur wenn die Sprungkreise sich geradezu berühren oder gar schneiden, treten veränderte Resultate ein, die verwickelt genug sind, um den Gegenstand einer Untersuchung für sich zu bilden. Die für verschiedene Plattenstellen sich ergebenden Werthe von q weichen nun zwar von einander ab, und es ist daher zu schließen, daß diese Stellen wirklich etwas verschiedene Elasticität besitzen; die Differenzen und die wahrscheinlichen Fehler der Hauptmittel sind jedoch, wie die folgenden Beispiele zeigen,

a) Glas II ($\varrho = 10$)

$q =$ 58,5
57,2
58,5
59,7
59,3
59,7
56,6
55,3
56,0

$q = 58{,}3 \pm 0{,}4$

b) Glas I ($\varrho = 12$)

$q =$ 39,4
38,3
38,7
40,0

$q = 39{,}1 \pm 0{,}25$

c) Quarz ($\varrho = 4$)

$q =$ 208,3
208,4
214,7
210,5
209,9

$q = 209{,}9 \pm 0{,}9$

immer noch klein genug, um weiter benutzt zu werden.

2) Daß auch die Gl. (2) der Theorie erfüllt ist, also $\varrho q =$ const, zeigen folgende Angaben:

a) Glas II.

$\varrho =$	3	5	10	15
$q =$	195,4	114,9	58,3	38,3
$\varrho q =$	586	575	583	575

$\varrho q = 580 \pm 2.$

b) Quarz.

$\varrho =$	1	4	12	$\varrho q = 839 \pm 0{,}5.$
$q =$	838	210	69,8	
$\varrho q =$	838	840	838	

Man kann hiernach, was gleich hier eingeschaltet werden möge, die Elasticitätsconstante E' ohne weiteres aus Gl. (5) berechnen.

Es ergeben sich dabei folgende Zahlen:

Material	E'
Glas I	5617 ± 39
„ II	6960 ± 24
„ III	7701 ± 45
Bergkrystall	10072 ± 46.

Die Constante E' setzt sich nun freilich aus den beiden üblichen Elasticitätsconstanten E und μ zusammen, und diese kann man für sich bekanntlich immer erst durch Combination der Messung zweier verschiedenartiger Deformationen ermitteln; es läßt sich aber zeigen, daß die hier benutzte Methode auch für sich allein schon mindestens ungefähre, in Wahrheit aber sogar ziemlich genaue Werthe von E liefert. Es ist dies dem Umstande zu verdanken, daß μ in der Formel $(1 - \mu^2)$ in E' enthalten ist, diese Größe aber nur sehr wenig sich ändert, wenn für μ selbst die äußersten Werthe eingesetzt werden. Nach den Versuchen von Cornu, Everett, Voigt und Cantone liegt nämlich für Glas μ zwischen den extremen Werthen 0,208 und 0,264; und wenn man die Zahlen dieser Beobachter ihrem Gewichte gemäß combinirt, so findet man als Mittelwerth und wahrscheinlichen Fehler $\mu = 0{,}225 \pm 0{,}008$. Jenen Extremen entsprechen nun für $1 - \mu^2$ die Werthe 0,957 und 0,93; und nimmt man den dem obigen Mittelwerth von μ entsprechenden Mittelwerth

$$1 - \mu^2 = 0{,}95 \pm 0{,}003,$$

so wird man wahrscheinlich nur einen Fehler von $^1/_3$ Proc. begehen. Der obige Werth von μ gilt nun freilich nur für kleine Deformationen, und es folgt aus den Betrachtungen von Röntgen

u. A., daß μ nicht constant ist, sondern mit zunehmender Deformation abnimmt; bei incompressiblen Körpern, also solchen, bei denen für kleine Deformationen $\mu = 0{,}5$ ist, ist diese Abnahme sogar sehr beträchtlich; in unserem Falle wird sie viel unbedeutender sein, nach der Analogie kann man annehmen, daß man zu setzen hat:

$$1 - \mu^2 = 0{,}97 \pm 0{,}01,$$

wodurch der wahrscheinliche Fehler allerdings auf 1 Proc. gestiegen ist. Hiernach erhält man den Elasticitätsmodul E, indem man E' um 3 Proc. verkleinert; es wird also:

Material	E
Glas I	5449
„ II	6751
„ III	7470.

Eine eingehende Vergleichung mit den für verschiedene Glassorten von anderen Beobachtern gefundenen Werthen lassen diese Zahlen wegen der Unbestimmtheit der Charakteristik der meisten Glassorten nicht zu; sie halten sich aber mit jenen zwischen denselben Grenzen[1]). Es wird beabsichtigt, demnächst für eine größere Anzahl genau charakterisirter Glassorten die Bestimmung der Elasticitätsmoduln (im Zusammenhange mit der der Härten) systematisch durchzuführen.

Für Bergkrystall hat die Größe μ selbst keine Bedeutung; der Faktor aber, mit dem man E' multipliciren muß, um den Werth des Elasticitätsmoduls in der Axe E_0 zu erhalten, ist hier jedenfalls noch näher an 1 gelegen, sodaß man keinen wesentlichen Fehler begehen wird, wenn man ihn geradezu gleich 1 setzt. Es wird dann

$$\text{für Bergkrystall: } E_0 = 10072.$$

Gegenüber dem Voigt'schen Werthe 10304 ist dieser um reichlich 2% kleiner, eine Differenz, welche in Anbetracht der so verschiedenen Ableitung schon an sich nicht sonderlich groß erscheinen wird, zum Theil aber vermuthlich sich noch dadurch er-

1) Voigt fand z. B. für „grünliches" Glas 6480, für „weisses rheinisches Spiegelglas" 7358.

klärt, daß die Beanspruchung des Materials hier eine viel größere ist, als bei Voigt.

3) Es bleibt nun noch übrig, die Gleichungen (3) zu prüfen und im Anschluß daran absolute Härtezahlen zu erhalten. Hier zeigt sich nun ein völlig unerwartetes Resultat: die Gleichungen (3) sind nicht erfüllt, und zwar auch nicht näherungsweise; wohl aber lassen sich andre Beziehungen aufstellen, und zwar mit befriedigender Genauigkeit.

So ergab beispielsweise die Glassorte II:

$\varrho =$	3	5	10	15
$P:D^2$	81,7	67,0	56,6	49,8
$P:\varrho^2$	1,64	0,96	0,50	0,32
$D:\varrho$	0,142	0,119	0,094	0,080.

Alle drei Verhältnisse nehmen also, statt constant zu sein, mit wachsendem ϱ ganz beträchtlich ab, das will sagen: der Druck auf die Flächeneinheit, bei welchem ein Sprung in der Platte eintritt, ist bei gleichem Material nicht unter allen Umständen derselbe, sondern er ist desto größer, je gekrümmter die drückende Linse ist. Eine andre Formulirung ist die, daß der Gesammtdruck, bei welchem der Sprung eintritt, nicht dem Quadrat des Krümmungsradius proportional ist, eine dritte die, daß der Durchmeser der Druckfläche beim Eintritt des Sprunges nicht dem Krümmungsradius selbst proportional ist, sondern daß beide Größen langsamer wachsen. Ein Blick auf die obige Tabelle zeigt nun sofort, daß die Zahlen der zweiten Horizontalreihe fallen, wie die ϱ wachsen, und ähnlich einfache Wahrnehmungen lassen die andere Reihen zu. Hiernach ergiebt sich, daß die von der Theorie geforderten drei Beziehungen durch die folgenden der Beobachtung entprechenden zu ersetzen sind:

1) P proportional nicht mit D^2, sondern mit $D^3/_2$
2) P „ „ „ „ ϱ^2, „ „ ϱ
3) Nicht D, sondern $D^3/_2$ proportional mit ϱ.

In wie weit dies der Fall ist, zeigt die folgende Zusammenstellung

ϱ	3	5	10	15	Mittel
$P : D^{3}/_{2}$	53,4	52,0	54,8	54,5	53,7 ± 0,4
$P : \varrho$	4,93	4,78	5,04	4,80	4,89 ± 0,04
$D^{3}/_{2} : \varrho$	0,092	0,092	0,092	0,088	0,091 ± 0,001.

Die wahrscheinlichen Fehler betragen also sämmtlich nur 1%.

Für die drei anderen Stoffe fanden sich die Beziehungen zwar ebenfalls erfüllt, jedoch, da hier nur je zwei Werthe von ϱ (4 und 12 mm) vorlagen, mit geringerer beweisender Kraft. Es wurde daher aus zweien dieser Stoffe, dem weichsten Glase (I) und dem Bergkrystall, noch je eine Linse mit einem dritten Radius hergestellt, für dessen Wahl einmal der Wunsch maßgebend war, dem Begriff der Spitze näher zu kommen, also einen recht kleinen Radius zu nehmen, andrerseits die Erwägung, daß, wenn der Grenzwerth des Einheitsdrucks vom Linsenradius abhängt, derjenige Werth eine besondere absolute Bedeutung haben wird, welcher dem Werthe $\varrho = 1$ entspricht. Bei den Versuchen mit diesen stark gekrümmten Linsen traten nun zwar, wie zu erwarten war, etwas größere Unregelmäßigkeiten als bei den andern auf, das Gesammtergebniß aber war die volle Bestätigung der obigen Beziehung. Es genüge hier, noch die Zahlen für Bergkrystall anzuführen.

Theoretisch constante Verhältnisse.

ϱ	1	4	12
$P : D^{2}$	149,8	91,7	66,9
$P : \varrho^{2}$	5,05	1,31	0,42
$D : \varrho$	0,183	0,120	0,079

In Wahrheit constante Verhältnisse.

ϱ	1	4	12	Mittel
$P:D^3/_2$	64,3	63,4	65,2	64,3 ± 0,4
$P:\varrho$	5,05	5,22	5,05	5,11 ± 0,04
$D^3/_2:\varrho$	0,079	0,082	0,077	0,079 ± 0,001

Auch hier betragen die wahrscheinlichen Fehler rund 1%.

Somit ist die Thatsache constatiert, daß die Erfahrung zwar in allen übrigen Punkten die Theorie mit überraschender Genauigkeit bestätigt, in dem letzten und wichtigsten Punkte aber von ihr ganz erheblich, und zwar nach bestimmtem Gesetze abweicht. Diese Thatsache fordert zu erneuter Betrachtung der Voraussetzungen jener Theorie auf.

1) Es kann nämlich zweifelhaft erscheinen, ob die Forderung der Theorie, daß die Druckfläche nur ein kleiner Theil der Oberfläche sei, erfüllt ist. Nun steigt allerdings das Verhältniß R (Grenzradius der Druckfläche): ϱ (Linsenradius) bei obigen Versuchen bis zum Werthe 1:11, also zu einem Verhältnisse, welches an sich gewiß nicht mehr als sehr klein zu betrachten ist; aber schließlich kommt es lediglich darauf an, ob dieses Verhältniß so groß ist, daß die in der Theorie darauf basirten Annahmen, betreffend Druckrichtung, Druckcomponenten, Krümmung und Größe der Druckfläche, nicht mehr erfüllt sind. Das ist aber, wie zum Theil schon aus den obigen Andeutungen hervorgeht, und sich noch eingehender zeigen ließe, nicht der Fall; die Abweichungen liegen vielmehr innerhalb der Fehlergrenzen der Versuche oder fallen höchstens ein klein wenig aus ihnen heraus.

2) Nach der Theorie kann es ferner — obwohl eine nähere Betrachtung hierfür Anhaltspunkte giebt — befremden, daß der Sprung die Druckfläche in einem gewissen Abstande umgiebt, und man könnte den Vorschlag machen, bei der Berechnung der H statt der D einmal die Sprungdurchmesser zu benutzen; das gefundene empirische Gesetz bleibt dann aber unverändert bestehen.

3) Daß es nicht die relativ zu beträchtliche Größe der Druckfläche ist, welche die Abweichungen hervorbringt, ergiebt sich am besten daraus, daß alsdann die Abweichungen desto kleiner werden müßten, je günstiger d. h. je kleiner das Verhältniß $R:\varrho$ wird; das ist aber nicht der Fall, sie sind vielmehr einheitlich durch

die obigen Beziehungen bestimmt; und z. B. für Glas III werden die Verhältnisse $P:D^2$ noch für $\varrho = 4$ und $\varrho = 12$ kolossal verschieden, nämlich 83,9 und 56,4, obgleich hier das Verhältniß $R:\varrho$ nur noch 1 : 16, resp. 1 : 23 ist. Um es aber noch weiter zu verkleinern, wurde von diesem Glase eine Linse von $\varrho = 30$ mm hergestellt; für sie fand sich $R:\varrho$ wie 1 : 38, und es müßte sich daher für $P:D^2$ ein mit dem für $\varrho = 12$ gefundenen übereinstimmender oder höchstens wenig von ihm abweichender Werth ergeben, wenn jener Standpunkt richtig wäre; es findet sich aber 39,6 gegen 56,4, also ein wiederum ganz wesentlich kleinerer Werth, während das Verhältniß $P:D^3/_2$ wieder denselben Werth annimmt.

4) Uebrigens ist zu beachten, daß die Endzahlen für verschiedene Stoffe in einem von ϱ ganz unabhängigen Verhältnisse zu einander stehen, nämlich für die untersuchten Stoffe in dem Verhältniß

Glas I		Glas II		Glas III		Bergkrystall
100	:	105	:	113	:	135.

Die Gewinnung von relativen Härtezahlen ist also von den berührten Verhältnissen gänzlich unabhängig, und für die praktische Anwendung ist hiermit schon ein wesentlicher Fortschritt erzielt.

5) Wie es kommt, daß die absoluten Werthe der Härte eine so starke Abhängigkeit vom Krümmungsradius zeigen, dafür kann ich Beweisendes vorläufig nicht anführen, und ich gebe zu, daß dies eine principielle Lücke in der Lösung des Problemes läßt. Ich möchte aber eine auf die Ausfüllung derselben bezügliche Vermuthung nicht unerwähnt lassen.

In Anbetracht der experimentell gefundenen Beziehungen liefert die letzte der Formeln (4) bei Benutzung verschiedener Linsen sehr verschiedene Werthe für P_1, also, wenn P_1 die Härte ist, für die Härte der betreffenden Platte. Da dies keinen Sinn hat, ist entweder die Definition der Härte zu verwerfen, oder es muß eine der Voraussetzungen, unter denen die Formel (4) anwendbar ist, nicht erfüllt sein. Dazu gehört namentlich die, daß Platte und Linse aus gleichem Stoff bestehen, also insbesondere auch gleich hart sind; ist dies nicht der Fall, so muß man entweder nach einer complicirteren Formel aus der bekannten Härte des einen Körpers die des andern auf Grund der Beobachtungen berechnen, oder man erhält, wenn man sich mit der Formel (4)

begnügt, nur eine gewisse mittlere Härte von Platte und Linse. Nun bestanden zwar bei den hier behandelten Messungen Platte und Linse stets aus demselben Stoff, aber es ist sehr wohl denkbar, daß die Härte eines Körpers, außer von seinem Material, auch von seiner Oberflächenkrümmung abhänge, und zwar offenbar in dem Sinne, daß die Härte desto größer ist, je stärker die Krümmung ist. Eine experimentelle Bestätigung dieser Auffassung giebt der Umstand, daß bei richtiger und exacter Versuchsanordnung es immer die Platte ist, welche springt, und nicht die Linse. Je gekrümmter also die benutzte Linse ist, desto härter würde sie hiernach sein, und desto größer würde auch die nach (4) gefundene mittlere Härte von Platte und Linse sich ergeben, wie es thatsächlich der Fall ist. Die Härte einer Linse würde sich hiernach etwa durch eine Formel von der Gestalt

$$H = a + \frac{b}{\varrho}$$

darstellen, a würde hierin die Härte einer ebenen Fläche desselben Materials, also gewissermaßen die „Eigenhärte“ des Materials, b dagegen die von der Krümmung abhängige „Oberflächenhärte“ sein, also genau dem entsprechen, was man bei Flüssigkeiten „Oberflächenspannung“ nennt[1]).

Bis diese Gedanken fester begründet sind, muß es genügen, die vorliegende Untersuchung in begrenzterem Sinne zu Ende zu führen. Hierzu genügt die Bemerkung, daß, gemäß den gefundenen Beziehungen, die bei Anwendung verschiedener Linsen gefundenen Werthe von P_1 einander gleich werden, wenn man sie mit $\sqrt[3]{\varrho}$ multiplicirt, und daß man demzufolge die so erhaltene, auf die Einheit des Linsenradius bezogene Zahl als absolute Härte bezeichnen kann. Die Größe derselben für die untersuchten Stoffe läßt sich aus folgender Tabelle ersehen.

---

1) Eine andre Analogie ist die mit der Zugfestigkeit von Eisendrähten, welche nach Baumeister (Wied. Ann. 18, p. 578, 1883) desto größer ist, je kleiner die Dicke des Drahtes ist, und zwar, wie ich finde, nach dem, dem hier gefundenen gleichen Gesetze $F = \text{const.}/\sqrt[3]{d}$.

Stoff	1	3	4	5	10	12	15	Mittel
Glas I	210	—	216	—	—	215	—	214 ± 3
„ II	—	227	—	225	227	—	222	225 ± 2
„ III	—	—	245	—	—	237	—	241 ± 3
Bergkrystall	287	—	292	—	—	288	—	289 ± 1.

Diese Zahlen weisen zunächst die Reihenfolge auf, weche zu erwarten war. Sie zeigen ferner eine, für ein bisher noch garnicht quantitativ bearbeitetes Gebiet, sehr befriedigende Genauigkeit; es liegen z. B. selbst die extremsten, für benachbarte Glassorten gefundenen Werthe noch weit genug auseinander. Manchen wird es vielleicht Wunder nehmen, daß die Zahlen nicht noch verschiedener sind; aber man hat zu erwägen, daß die vier hier untersuchten Stoffe einander in Bezug auf die Härte nahe stehen, und daß die Ausdehnung der Methode auf besonders weiche und besonders harte Körper jedenfalls bedeutend größere Differenzen liefern wird.

Von Interesse ist schließlich noch eine Vergleichung der Härten mit den Elasticitätsmoduln (p. 535). Wie man sieht, ist von den untersuchten Stoffen der elastischere zwar auch der härtere, aber die Härte nimmt weniger stark zu als die Elasticität; drückt man nämlich H in Procenten von E aus, so erhält man die abnehmenden Zahlen:

Glas I	Glas II	Glas III	Bergkrystall
3,9	3,3	3,2	2,9.

Es macht sich das gleich bei den ersten Beobachtungen in charakteristischer und überraschender Weise geltend; während man nämlich hätte erwarten sollen, daß man bei dem härteren Stoffe einen stärkeren Gesammtdruck würde ausüben müssen, muß man dies meist grade bei dem weicheren thun, weil hier die Druckfläche sehr groß wird, also ein hoher Gesammtdruck erforderlich ist, um selbst einen mäßigen Einheitsdruck zu erzielen.

Jena, 19. November 1890.

Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien.

Von

W. Voigt und **P. Drude.**

Mitgetheilt von W. Voigt.

2. Reihe.

Während die Beobachtungen der ersten Reihe[1]) sich auf Mineralien bezogen, welche sowohl in dichten Varietäten als auch in für die Beobachtung ausreichenden regelmäßigen Krystallen vorkommen, sind die Messungen der folgenden Reihe an solchen, hauptsächlich glasartigen, Körpern angestellt, für welche eine krystallisirte Varietät nicht bekannt ist. Das Interesse der erhaltenen Resultate liegt daher zunächst nur darin, daß sie für Substanzen gelten, die in sehr großen Massen, langsam und gleichmäßig gebildet sind und demgemäß wahrscheinlich an Homogenität und Isotropie die künstlich hergestellten Gläser und Metalle übertreffen. Die bei ihnen gefundenen Werthe für das Verhältniß der beiden Elasticitätsconstanten a und b derselben Substanz gewinnen dadurch ein besonderes Gewicht und die theilweise ganz ungeheuerlichen Abweichungen von der Poisson'schen Relation $a = 3b$, welche sie zeigen, dürften wohl Jeden, der noch zweifelte, überzeugen, daß die Differenz zwischen der Poisson'schen Theorie und der Beobachtung durch Fehlerquellen irgend welcher Art nicht erklärbar ist.

Insofern stützen diese Resultate indirect die von mir früher für unkrystallinische Medien überhaupt und speciell für dichte Mineralien gegebene Elasticitätstheorie; in einigen Fällen gestatten sie aber auch eine directere Verwendung zu diesem Zwecke.

---

1) W. Voigt und P. Drude, Gött. Nachr. 1889, p. 519.

Die Beobachtungstafeln sind wiederum nur auszugsweise mitgetheilt, und zwar in derselben Anordnung und Bezeichnung wie diejenigen der ersten Reihe; ihre Erläuterung findet sich an dem oben angegebenen Orte. Die Herstellung der Stäbchen ist wie früher in der Werkstatt von Dr. W. Steeg und Reuter in Bad Homburg geschehen und die Präparate sind zum größten Theil vortrefflich ausgefallen.

1. Feuerstein

von der Insel Rügen; von Herrn Prof. Cohen in Greifswald mir freundlichst überlassen. Im ganzen Stück ziemlich dunkelgrau, zu Stäbchen geschnitten im durchgehenden Licht hellgelbbraun; darin einzelne lose schwärzliche Flocken von Markasit. Die Herstellung der Stäbchen hat in Folge der Zähigkeit des Materiales große Schwierigkeiten verursacht.

A I. $D = 1200 + \delta$ $B = 6200 + \beta$

δ = 25,4 23,0 24,2 26,0 29,3 34,2 42,4 β = 149 143 130 117 100 82 54

ber. 25,0 23,6 23,9 25,9 29,5 34,8 41,8

$\delta_0 = 25{,}9,\ \delta_1 = 2{,}8,\ \delta_2 = 0{,}83.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6312,\ D = 1226{,}7,\ P = 110,\ \vartheta = 14.$

η = 4,8 5,2.

$L = 70{,}07,$

η = 352,3, 354,4, $\eta' = 2{,}1,$ $E = 7598000.$

Drillung. $L = 57{,}11,\ B = 6318,\ D = 1227{,}3,\ P = 50,\ \vartheta = 14{,}5.$

σ = 88,1, 87,5, $T = 3510000$

A II. $D = 1200 + \delta$ $B = 6300 + \beta$

δ = 19,1 18,4 19,3 21,3 25,3 32,7 42,1 $\beta = -8 + 9\ 23\ 36\ 48\ 67\ 100$

ber. 19,9 18,3 18,7 21,3 25,9 32,7 41,5

$\delta_0 = 21{,}3,\ \delta_1 = 3{,}6,\ \delta_2 = 1{,}04.$

Biegung. $L = 66{,}07,\ B = 6338,\ D = 1222{,}2,\ P = 110,\ \vartheta = 15.$

η = 300,2, 297,2, $\eta' = 2{,}1,$ $E = 7596000.$

Drillung. $L = 52{,}23,\ B = 6337,\ D = 1223{,}4,\ P = 50,\ \vartheta = 16.$

σ = 80,6, 80,4, $T = 3522000.$

A III. $D = 1100 + \delta$ $B = 5700 + \beta$

δ = 70,3 69,8 73,2 79,0 87,4 98,9 114,7 β = 40 42 40 39 39 40 40

ber. 70,2 70,2 73,1 78,9 87,7 99,4 114,0

$\delta_0 = 78{,}9,\ \delta_1 = 7{,}3,\ \delta_2 = 1{,}47.$

Biegung. $L = 66{,}07,\ B = 5740,\ D = 1180{,}2,\ P = 110,\ \vartheta = 14.$

η = 368,8, 366,0, $\eta' = 2{,}4,$ $E = 7583000.$

B I. $D = 1200 + \delta$ $B = 6400 + \beta$

$\delta = 22{,}1\ 15{,}3\ 13{,}2\ 14{,}0\ 18{,}7\ 24{,}3\ 33{,}3$ $\beta = -\ 8 + 27\ 41\ 46\ 40\ 37\ 8$

ber. 21,4 16,0 13,6 14,2 17,8 24,4 34,0

$\delta_0 = 14{,}2,\ \delta_1 = 2{,}1,\ \delta_2 = 1{,}5.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6432,\ D = 1215{,}6,\ P = 110,\ \vartheta = 14{,}5.$

$\eta = 5{,}3\ 4{,}7.$

$L = 64{,}07,$

$\eta = 272{,}4,\ 274{,}0,\ \eta' = 2{,}1,$ $E = 7589000.$

Drillung. $L = 56{,}84,\ B = 6438,\ D = 1217{,}1,\ P = 50,\ \vartheta = 15.$

$\sigma = 86{,}9,\ 87{,}7,$ $T = 352{}2000.$

B II. $D = 1200 + \delta$ $B = 6400 + \beta$

$\delta = 17{,}6\ 18{,}3\ 20{,}5\ 23{,}4\ 27{,}9\ 32{,}8\ 39{,}5$ $\beta = -\ 16 + 29\ 37\ 41\ 41\ 38\ 30$

ber. 17,5 18,4 20,4 23,5 27,8 33,0 39,5

$\delta_0 = 23{,}5,\ \delta_1 = 3{,}65,\ \delta_2 = 0{,}55.$

Biegung. $L = 64{,}07,\ B = 6436,\ D = 1224{,}0,\ P = 110,\ \vartheta = 14{,}3.$

$\eta = 265{,}9,\ 265{,}8,\ \eta' = 2{,}1,$ $E = 7640000$

Drillung. $L = 55{,}08,\ B = 6437,\ D = 1224{,}6,\ P = 50,\ \vartheta = 14{,}5.$

$\sigma = 82{,}9,\ 83{,}2,$ $T = 352{}6000.$

B III. $D = 1200 + \delta$ $B = 6400 + \beta$

$\delta = 11{,}8\ 12{,}3\ 14{,}3\ 17{,}7\ 21{,}8\ 26{,}6\ 32{,}4$ $\beta = -\ 6 + 29\ 43\ 48\ 44\ 40\ 12$

ber. 11,5 12,5 14,6 17,6 21,6 26,7 32,7

$\delta_0 = 17{,}6,\ \delta_1 = 3{,}53,\ \delta_2 = 0{,}5.$

Biegung. $L = 62{,}07,\ B = 6434,\ D = 1218{,}1,\ P = 110,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 247{,}4,\ 248{,}0,\ \eta' = 2{,}1,$ $E = 7568000.$

Drillung. $L = 48{,}00,\ B = 6441,\ D = 1218{,}5,\ P = 50,\ \vartheta = 13{,}2.$

$\sigma = 88{,}2,\ 88{,}0,$ $T = 352{}3000.$

Gesammtmittel. $E = 7597000,$ $\mathrm{E} = 13{,}16 \cdot 10^{-6},$

$\pm\ 7200,$ $\pm\ 0{,}012.$

$T = 352{}1000,$ $\mathrm{T} = 28{,}41 \cdot 10^{-6},$

$\mp\ 1800,$ $\pm\ 0{,}015.$

Hieraus $E/T = 2{,}158$ und $a = 770{}0000,\ b = 523000,\ a = 14{,}71 \cdot b.$

Die vortreffliche Uebereinstimmung der bei den verschiedenen Stäbchen erhaltenen Zahlen erweist die vollkommene Homogenität und Isotropie des Materiales und giebt den Endresultaten einen besonderen Werth. Um so schwerer wiegt der von dem Poisson'schen ($a = 3b$) enorm abweichende Werth des Verhältnisses der beiden Elasticitätsconstanten. Derselbe besitzt noch ein eigenartiges Interesse.

Nach der früher auseinander gesetzten Theorie der quasi-isotropen Körper[1]) ist es möglich aus den Elasticitätsconstanten eines homogenen Krystalles diejenigen eines Körpers zu berechnen,

1) W. Voigt, Gött. Abh., Bd. 34, 48, 1887, Wied. Ann. 38, 573, 1889.

der aus durcheinander gewürfelten Krystallfragmenten besteht, welche groß gegen die Molekularwirkungssphäre und klein gegen die Dimensionen des betrachteten Präparates sind; ihr Verhältniß muß dabei nahe denselben Werth behalten, wenn zwischen den Fragmenten kleine Lufträume geblieben sind.

Feuerstein gilt als ein inniges Gemenge von amorpher und krystallinischer Kieselsäure, in dem letztere erheblich überwiegt [1]). Für die eine krystallisirte Kieselsäure (Quarz) habe ich aber die Elasticitätsconstanten bestimmt und früher mitgetheilt [2]); berechnet man aus ihnen das Verhältniß a/b für quasi-isotropen Quarz, so erhält man [3]) (mit ziemlich beträchtlicher Unsicherheit)

$$a = 13{,}7\,.\,b,$$

welches dem für Feuerstein gefundenen abnorm großen sehr nahe liegt. Die von mir entwickelte Theorie erhielt hierdurch eine neue Bestätigung.

2. Opal

von Mexiko; von Herrn Prof. Liebisch mir für diese Beobachtungen freundlichst überlassen.

Das Stück war wasserhell, ohne Farbenspiel, von einigen Sprüngen durchsetzt, die beim Zerlegen sich noch ausdehnten; daher war es nur möglich drei Stäbchen von derselben Orientirung herzustellen. Die Prüfung der Isotropie durch Beobachtung der beiden Gattungen B und A war daher nicht möglich; auch sind die Messungen der geringen Größe der Stäbchen wegen nicht sehr genau.

I. $D = 500 + \delta$ $\qquad$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 93{,}3\ 100{,}7\ 104{,}4\ 103{,}4\ 98{,}0$ $\qquad$ $\beta = 39\ 43\ 46\ 48\ 49$

ber. $93{,}2\ 100{,}9\ 104{,}3\ 103{,}3\ 98{,}0$

$\delta_0 = 104{,}3,\ \delta_1 = 1{,}2,\ \delta_2 = -\ 2{,}17.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6145,\ D = 603{,}4,\ P = 105,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 49{,}4.\ 49{,}6.$

$L = 22{,}07,$

$\eta = 181{,}0,\ 181{,}3,\ \eta' = 3{,}7,$ $\qquad$ $\mathfrak{E} = 3870000.$

Drillung. $L = 17{,}05,\ B = 6146,\ D = 602{,}8,\ P = 10,\ \vartheta = 13{,}5.$

$\sigma = 82{,}0\ 81{,}0.$ $\qquad$ $\mathfrak{T} = 1833000.$

---

1) Naumann-Zirkel, Mineralogie, Leipzig 1877, p. 342.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1886, p. 289.

3) W. Voigt, Wied. Ann. 38, 582, 1889.

II. $D = 500 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 97{,}6\ 108{,}3\ 102{,}1$ $\beta = 44\ 38\ 15$

$\delta_0 = 108{,}3,\ \delta_1 = 2{,}2,\ \delta_2 = -8{,}3.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 6134,\ D = 607{,}5,\ P = 105,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 48{,}1,\ 48{,}9.$

$L = 18{,}07,$

$\eta = 98{,}3,\ 98{,}5,\ \eta' = 3{,}7,$ $\mathfrak{E} = 3908000.$

III. $D = 500 + \delta$ $B = 6100 + \beta$

$\delta = 89{,}1\ 97{,}6\ 101{,}5\ 99{,}7\ 90{,}9$ $\beta = 38\ 42\ 44\ 47\ 47$

ber. $88{,}8\ 98{,}0\ 101{,}5\ 99{,}2\ 91{,}2$

$\delta_0 = 101{,}5,\ \delta_1 = 0{,}6,\ \delta_2 = -2{,}9.$

Biegung. $L = 20{,}07,\ B = 6144,\ D = 600{,}4,\ P = 105,\ \vartheta = 14.$

$\eta = 138{,}9,\ 139{,}7,\ \eta' = 3{,}7,$ $\mathfrak{E} = 3870000.$

Drillung. $L = 15{,}65,\ B = 6144,\ D = 599{,}6,\ P = 10,\ \vartheta = 14{,}2.$

$\sigma = 76{,}6\ 76{,}6,$ $\mathfrak{T} = 1824000.$

Gesammtmittel $\mathfrak{E} = 3880000,$ $E = 25{,}8 \cdot 10^{-6}$

$\mathfrak{T} = 1829000,$ $T = 54{,}7 \cdot 10^{-6}$

Hieraus $\mathfrak{E}/\mathfrak{T} = 2{,}12$ und $a = 3910000,\ b = 272000,\ a = 14{,}4 \cdot b.$

Es ist sehr bemerkenswerth, daß hiernach die amorphe Kieselsäure (Opal) äußerst nahe dasselbe Verhältniß der Elasticitätsconstanten ergiebt, wie Feuerstein und hierin sich also ähnlich verhält als bestände sie aus Krystallfragmenten der krystallinischen Modifikation (Quarz). Freilich sind die absoluten Werthe jener Constanten kaum halb so groß als sie sein müßten, wenn diese Fragmente sich lückenlos an einander schlössen.

3. Obsidian

von den liparischen Inseln; von Herrn Dr. Sella in Biella mir freundlichst besorgt.

Farbe unregelmäßig hell- und dunkelgrau gefleckt; die Stäbchen sind parallel der Dickenrichtung fast durchsichtig, die Färbung wird durch in der hellen Grundmasse suspendirte dunkle Flecken und Körnchen hervorgebracht. Dies Mineral ist also ein ziemlich grobes Gemisch und es kann demnach die äußerste Genauigkeit der Constantenwerthe nicht erreicht werden. Die mir verfügbaren Stücke gestatteten die Herstellung von Stäbchen in einer Länge von nahe 11 cm; da mein Torsionsapparat aber die Beobachtung so langer Stäbe nicht gestattet und die drei kürzeren unter sich gut stimmende Resultate ergaben, habe ich die längeren nicht um der Drillung willen kürzen mögen.

A I. $D = 1400 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

δ = 62,7 60,4 60,6 62,1 64,9 69,7 76,5 β = 51 32 22 27 43 66 96

ber. 62,3 60,6 60,5 62,0 65,1 69,8 76,1

δ_0 = 62,0, δ_1 = 2,3, δ_2 = 0,8.

Biegung. $L = 85{,}07$, $B = 5944$, $D = 1462{,}7$, $P = 60$, $\vartheta = 14$.

$\eta = 246{,}5$, 245,7, $\eta' = 1{,}5$, $E = 667_{1000}$.

Drillung. $L = 65{,}24$, $B = 5932$, $D = 1463{,}0$, $P = 50$, $\vartheta = 13$.

$\sigma = 80{,}7$, 80,1, $T = 285_{9000}$

A II. $D = 1400 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

δ = 61,0 56,6 55,4 56,8 61,6 67,5 75,2 β = 89 52 28 19 26 58 102

ber. 60,4 56,8 55,6 57,0 60,8 67,2 76,0

δ_0 = 57,0, δ_1 = 2,6, δ_2 = 1,25.

Biegung. $L = 105{,}07$, $B = 5946$, $D = 1458{,}1$, $P = 60$, $\vartheta = 14$.

$\eta = 470{,}3$, 470,8, $\eta' = 1{,}5$, $E = 661_{5000}$.

A III. $D = 1400 + \delta$ $B = 5900 + \beta$

δ = 36,1 36,0 37,4 41,0 48,4 57,2 68,8 β = 98 60 34 22 31 60 101

ber. 36,6 35,6 37,2 41,3 48,0 57,2 69,0

δ_0 = 41,3, δ_1 = 5,4, δ_2 = 1,28.

Biegung. $L = 14{,}07$, $B = 5951$, $D = 1442{,}4$, $P = 60$, $\vartheta = 14$.

$\eta = 3{,}1$, 2,9.

$L = 105{,}07$

$\eta = 481{,}3$, 479,7, $\eta' = 1{,}5$, $E = 668_{6000}$.

B I. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

δ = 37,2 44,3 51,7 58,2 63,8 67,8 70,4 β = 14 10 8 4 3 4 3

ber. 36,5 44,7 52,0 58,2 63,4 67,7 70,9

δ_0 = 58,2, δ_1 = 5,73, δ_2 = — 0,5.

Biegung. $L = 14{,}07$, $B = 6006$, $D = 1457{,}7$, $P = 60$, $\vartheta = 14$.

$\eta = 2{,}1$, 2,5.

$L = 85{,}07$,

$\eta = 245{,}0$, 247,8, $\eta' = 1{,}5$, $E = 665_{9000}$.

Drillung. $L = 64{,}78$, $B = 6006$, $D = 1457{,}2$, $P = 50$, $\vartheta = 14{,}1$.

$\sigma = 79{,}9$, 80,0, $T = 284_{6000}$.

B II. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

δ = 63,3 61,8 61,6 63,0 64,2 66,6 67,4 β = 30 20 9 6 4 1 3

ber. 62,8 62,2 62,2 62,8 64,0 65,8 68,2

δ_0 = 62,8, δ_1 = 0,9, δ_2 = + 0,3.

Biegung. $L = 93{,}07$, $B = 6009$, $D = 1463{,}1$, $P = 60$, $\vartheta = 14$.

$\eta = 318{,}7$, 317,0, $\eta' = 1{,}5$, $E = 667_{6000}$.

B III. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 56{,}3\ 52{,}1\ 51{,}3\ 52{,}0\ 57{,}0\ 61{,}7\ 71{,}2$ $\beta = 32\ 25\ 15\ 6\ 3\ 1\ -\ 2$

ber. $55{,}2\ 52{,}1\ 51{,}1\ 52{,}4\ 56{,}1\ 62{,}1\ 70{,}2$

$\delta_0 = 52{,}4,\ \delta_1 = 2{,}5,\ \delta_2 = +\ 1{,}17.$

Drillung. $L = 58{,}27,\ B = 6010,\ D = 1454{,}8,\ P = 50,\ \vartheta = 13{,}2.$

$\sigma = 72{,}3,\ 73{,}2,$ $T = 2819000.$

Gesammtmittel $E = 6651000,$ $E = 15{,}03 \cdot 10^{-6},$

$\pm\ 9000,$ $\pm\ 0{,}02.$

$T = 2841000,$ $T = 35{,}20 \cdot 10^{-6},$

$\pm\ 8000,$ $\pm\ 0{,}10.$

Hieraus $E/T = 2{,}34$ und $a = 7153000,\ b = 1470000,\ a = 4{,}86\,b.$

4. Obsidian

von Arnarfells (Jökul auf Island); ich verdanke das Stück Herrn Prof. C. Klein in Berlin. Farbe tiefschwarz.

Ein Beobachtungsmaterial allerersten Ranges von seltener Homogenität, wie dies der Augenschein und die treffliche Uebereinstimmung der folgenden Zahlen erweist. Das schöne Stück gestattete die Herstellung von Stäben, deren Längen fast 13 cm erreichten; ihre Gestalt ist sehr regelmäßig ausgefallen.

Für die Drillungsbeobachtungen wurde ein kürzerer Stab der Gattung B und ein in der Mitte durchgeschnittener der Gattung A benutzt; da die an ihnen erhaltenen Zahlen sehr gut übereinstimmten, habe ich, um das schöne Material für andere Bestimmungen aufzusparen, weitere Beobachtungen unterlassen.

A I. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 67{,}4\ 65{,}8\ 65{,}6\ 67{,}3\ 70{,}9\ 76{,}3\ 81{,}7$ $\beta = 22\ 16\ 4\ 0\ 2\ 74$

ber. $67{,}4\ 65{,}7\ 65{,}7\ 67{,}4\ 70{,}7\ 75{,}7\ 82{,}4$

$\delta_0 = 67{,}4,\ \delta_1 = 2{,}5,\ \delta_2 = 0{,}83,$

Biegung. $L = 100{,}07,\ B = 6000{,}5,\ D = 1468{,}1,\ P = 60,\ \vartheta = 15{,}1.$

$\eta = 355{,}8,\ 355{,}6\ \eta' = 1{,}3,$ $E = 7340000.$

A II. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 75{,}5\ 72{,}5\ 70{,}8\ 72{,}0\ 75{,}4\ 82{,}3\ 87{,}8$ $\beta = -\ 2 - 1 - 6 - 4 + 2 + 12 - 22$

ber. $75{,}7\ 72{,}2\ 71{,}0\ 72{,}1\ 75{,}2\ 81{,}0\ 88{,}9$

$\delta_0 = 72{,}1,\ \delta_1 = 2{,}2,\ \delta_2 = 1{,}3.$

Biegung. $L = 14{,}07,\ B = 5999,\ D = 1473{,}3,\ P = 60,\ \vartheta = 15{,}1.$

$\eta = 2{,}2,\ 2{,}1.$

$L = 100{,}07,$

$\eta = 353{,}6,\ 352{,}4,\ \eta' = 1{,}3.$ $E = 7323000.$

A III. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 72{,}6\ 71{,}7\ 73{,}0\ 73{,}4\ 71{,}7$ $\beta = -\ 3 + 2 + 10 + 18 - 14.$

Drillung. $L = 43{,}99,\ B = 6010,\ D = 1472{,}7,\ P = 50,\ \vartheta = 14.$

$\sigma = 48{,}7,\ 48{,}6,$ $T = 3085000.$

A IV. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 72{,}6\ 74{,}9\ 78{,}6\ 83{,}1\ 88{,}2$ $\beta = -3 + 4 + 2 - 2 - 3$

Drillung. $L = 46{,}62$, $B = 6001$, $D = 1478{,}9$, $P = 50$, $\vartheta = 13{,}5$.

$\sigma = 50{,}6,\ 50{,}7,$ $T = 3100000.$

B I. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 83{,}8\ 82{,}2\ 82{,}0\ 82{,}5\ 85{,}0\ 88{,}9\ 93{,}5$ $\beta = 21\ 17\ 14\ 13\ 15\ 20\ 28$

ber. $84{,}2\ 82{,}3\ 81{,}8\ 82{,}7\ 85{,}0\ 88{,}7\ 93{,}8$

$\delta_0 = 82{,}7$, $\delta_1 = 1{,}6$, $\delta_2 = 0{,}7$.

Biegung. $L = 100{,}07$, $B = 6018$, $D = 1483{,}3$, $P = 60$, $\vartheta = 15{,}1$.

$\eta = 343{,}8,\ 343{\cdot}3,\ \eta' = 1{,}3,$ $E = 7345000.$

B II. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 85{,}7\ 82{,}0\ 80{,}7\ 81{,}4\ 83{,}9\ 90{,}3\ 94{,}5$ $\beta = 28\ 22\ 15\ 13\ 13\ 20\ 23$

ber. $85{,}5\ 82{,}1\ 80{,}7\ 81{,}4\ 84{,}1\ 88{,}9\ 95{,}7$.

$\delta_0 = 81{,}4$, $\delta_1 = 1{,}7$, $\delta_2 = 1{,}02$.

Biegung. $L = 14{,}07$, $B = 6018$, $D = 1482{,}3$, $P = 60$, $\vartheta = 15{,}1$.

$\eta = 2{,}3,\ 2{,}7.$

$L = 100{,}07,$

$\eta = 344{,}0,\ 344{,}7,\ \eta' = 1{,}3,$ $E = 7345000.$

B III. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 80{,}3\ 77{,}4\ 75{,}5\ 75{,}5\ 78{,}9\ 86{,}5\ 91{,}3$ $\beta = 28\ 23\ 18\ 16\ 18\ 24\ 26$

ber. $81{,}1\ 76{,}8\ 75{,}1\ 75{,}8\ 78{,}9\ 84{,}4\ 92{,}5$

$\delta_0 = 75{,}8$, $\delta_1 = 1{,}9$, $\delta_2 = 1{,}2$.

Biegung. $L = 100{,}07$, $B = 6021$, $D = 1476{,}9$, $P = 60$, $\vartheta = 15{,}1$.

$\eta = 348{,}1,\ 348{,}6,\ \eta' = 1{,}3,$ $E = 7330000.$

B IV. $D = 1400 + \delta$ $B = 6000 + \beta$

$\delta = 78{,}8\ 77{,}7\ 77{,}3\ 78{,}3\ 80{,}7\ 84{,}4\ 90{,}9$ $\beta = 25\ 22\ 18\ 17\ 17\ 19\ 25$

Drillung. $L = 60{,}55$, $B = 6019$, $D = 1479{,}7$, $P = 50$, $\vartheta = 13{,}1$.

$\sigma = 65{,}4,\ 65{,}9,$ $T = 3096000.$

Gesammtmittel $E = 7337000$, $\mathrm{E} = 13{,}63 \cdot 10^{-8}$,

± 3000, $\pm 0{,}005$.

$T = 3094000$ $\mathrm{T} = 32{,}31 \cdot 10^{-8}$

± 3000, $\pm 0{,}03$.

Hieraus $E/T = 2{,}37$, $a = 8017000$, $b = 1828000$, $a = 4{,}39 \cdot b$.

Die beiden für die zwei Sorten Obsidian gefundenen Werthsysteme liegen ziemlich nahe den von mir für zwei Sorten künstlichen Glases erhaltenen Zahlen[1]). Auch hier übertrifft das Verhältniß a/b die Zahl 3 recht erheblich.

Göttingen, December 1890.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 15, 497, 1882.

Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1890.

Hoffentlich ist es Ihnen nicht unangenehm, wenn ich dem Herkommen gemäß auch in diesem Jahre die Nachrichten mit einem kurzen Bericht über das schließe, was uns in unsern Sitzungen beschäftigt hat oder irgendwie für unsere Gesellschaft von einiger Bedeutung gewesen ist.

Zunächst also eine Uebersicht über die wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den Sitzungen, von denen die heutige die 10. dieses Jahres ist, gemacht oder vorgelegt wurden.

In der Sitzung von 11. Januar gab de Lagarde Nachträge zu früheren Mittheilungen.

Riecke legte eine Arbeit des Herrn Galizine in Straßburg i/E. „Ueber das Daltonsche Gesetz", und

Bechtel, „Kleine Aufsätze" vor, III. Reihe.

Am 1. Febr. Riecke theilt einen Aufsatz des Herrn Dr. Nernst mit: „Ueber ein neues Princip der Molekulargewichtsbestimmung".

Wieseler kündigt einen kurzen Aufsatz an: „Verbesserungsvorschläge zu Euripides".

Sauppe legt von Herrn Professor Leo Meyer in Dorpat, Korrespondenten der Gesellschaft, eine „Etymologische Mittheilung *Σήματ-*(*Σῆμα*) Zeichen" vor.

Am 19. März. Klein legt einen Aufsatz vor: „Zur Theorie der Laméschen Functionen".

Wüstenfeld eine Abhandlung: „Der Imâm el Schâfi'í, seine Schüler und Anhänger bis zum Jahre 300 d. H.", die im Bd. 36 der Abhandlungen erscheint.

de Lagarde theilt 1. „Das älteste Glied der masoretischen Traditionskette" und 2. „Psalm 114 im Sidrâ rabbâ" mit.

Voigt legt von Hertz, Korrespondenten der G., eine Arbeit vor: „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper".

Am 3. Mai. Ehlers legt eine vorläufige Mittheilung von Herrn Dr. Clemens Hartlaub vor: „Beitrag zur Kenntniß der Comatuliden-Fauna des indischen Archipels".

Wieseler theilt „scenische Untersuchungen" mit.

de Lagarde legt „Exodus 1, 11" vor.

Riecke eine Arbeit „Ueber die Pyroelektricität des Turmalins".

Voigt eine Abhandlung „Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne".

Am 7. Juni. Riecke giebt „Beiträge zu der von Gibbs entworfenen Theorie der Zustandsänderungen eines aus einer Mehrheit von Phasen bestehenden Systems".

Klein legt a. eine Arbeit von Franc. Brioschi in Mailand, auswärtigem Mitglied der Gesellschaft, vor: „Ueber die Reihenentwickelung der Sigmafunctionen zweier Veränderlichen" und b. von Dr. Schönfließ, Privatdocenten in Göttingen, eine Arbeit: „Ueber das gegenseitige Verhältniß der Theorieen über die Structur der Krystalle".

de Lagarde legt „Septuagintastudien I" für die Abhandlungen (Bd. 37) vor.

Kielhorn einen Aufsatz über „die Mandasor-Inschrift vom Mâlava Jahre (529) = 472 n. Chr."

Am 5. Juli. Merkel spricht „Ueber argentinische Gräberschädel".

Liebisch legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Pockels vor: „Ueber die Interferenzerscheinungen, welche Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle im convergenten homogenen polarisirten Lichte zeigen".

Schwarz legt vor: a. einen Aufsatz von Prof. Julius Weingarten in Charlottenburg, Korresp. der Gesellschaft, „Ueber particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

und eine mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängende Gattung von Flüssigkeitsbewegungen" und b. einen Aufsatz von O. Venske: „Ueber eine Abkürzung des ersten Hermiteschen Beweises der Transcendenz der Zahl e".

Voigt legt vor: Bestimmung der Elasticitätsconstanten des brasilianischen Turmalins".

Wieseler: „Weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer".

de Lagarde kündigt für den 36. Bd. der Abhandlungen an: „Nachträge und Regesten zu der im Band 35 erschienenen Uebersicht über die Bildung der Nomina im Aramaeischen, Arabischen und Hebräischen".

Wagner legt einen Aufsatz vor: „Ueber ein spät mittelalterliches Verzeichniß geographischer Coordinatenwerte".

Am 2. Aug. Riecke legt von sich vor: a. „Ueber stufenweise Dissociation und über die Dampfdichte des Schwefels.“ b. „Ueber specielle Fälle von Gleichgewichtserscheinungen eines aus mehreren Phasen zusammengesetzten Systemes“, und c. von Herrn Privatdocenten Dr. Nernst: „Ueber die Theilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln“.

Voigt legt a. „Eine kurze Notiz zur Theorie der Schwingungen gestrichener Saiten“. b. eine Abhandlung vor: „Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen“ (erscheint im 36. Band der Abhandlungen.)

Schwarz theilt mit: a. „Bestimmung derjenigen Minimalflächen, welche eine Schaar reeller Curven zweiten Grades enthalten“. b. „Ueber den Kreisbogen als Lösung einer von Delaunay gestellten Aufgabe der Variationsrechnung“.

Klein legt vor: a. von Herrn Dr. Franz Meyer, Prof. in Clausthal: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen, II“. b. von Herrn Dr. Burckhardt, Privatdocenten: „Zur Theorie der Jacobischen Gleichungen 40. Grades“. c) von sich: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“.

Am 8. Nov. Riecke legt von sich vor a) „Das thermische Potential für verdünnte Lösungen“, b. „Ueber elektrische Ladung durch gleitende Reibung“ und c. von den Herrn Privatdocenten P. Drude und W. Nernst: „Ueber das Verhalten des Wismuth im Magnetfelde in seiner Abhängigkeit von der Temperatur und der molekularen Beschaffenheit“.

Voigt legt vor: a. von Herrn Privatdocenten P. Drude: „Ueber die Größe der Wirkungsphäre der Molekularkräfte und die Konstitutionskonstanten der Platauxschen Glycerin-Seifenlösung“, b. von Herrn W. Venske: „Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$“.

Klein legt vor: von Herrn Professor Franz Meyer in Clausthal: Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen, III“. (vgl. 2. August.)

Wüstenfeld legt für die Abhandlungen (Bd. 37) vor: „Die gelehrten Schâfi'íten des 4. Jahrhunderts d. H“.

Wieseler giebt „Einige Nachträge zu dem Aufsatze (Nachrichten 1890 S. 385 ff.) über weibliche Satyrn und Pane in der Kunst der Griechen und Römer“.

de Lagarde legt vor: a. „Die Inschrift von Aduli, b. Das hebräische Wort gébhîm, c. Der Fluß Orontes, d. Die Stichometrie

der syrisch-hexaplarischen Uebersetzung des alten Testamentes. e. *Σειραρα*".

Kielhorn legt vor: „Erklärung zweier Stellen des Kâvyâdarça".

Weiland legt für die Abhandlungen (Bd. 37) seine „Beiträge zur Kritik der Chronik des Matthias von Neuenburg" vor.

Die hier aufgeführten Mittheilungen sind, wenn nicht ausdrücklich angegeben ist, daß sie in dem 36. oder 37. Band der Abhandlungen gedruckt sind, in den bis jetzt erschienenen 13 Nummern der Nachrichten enthalten, die 436 Seiten füllen.

Der Band 36 der Abhandlungen, der in diesen Tagen ausgegeben wird, enthält folgende Arbeiten:

I. Mathematische Klasse.

1. Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle, I. von W. Voigt.
2. Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen, von W. Voigt.

II. Historisch-Philologische Klasse.

3. Ueber einige phönikische Inschriften, von G. Hoffmann.
4. Die Sprache des Papyrus Westcar. Eine Vorarbeit zur Grammatik der älteren ägyptischen Sprache, von Adolf Erman.
5. Tafeln zur Berechnung der Jupiterjahre nach den Regeln des Sûrya Siddhânta und des Iyotistattva, von F. Kielhorn.
6. Der Imâm el Shâfi'í, seine Schüler und Anhänger bis zum J. 300 d. H., von F. Wüstenfeld.

III. Physikalische Klasse.

7. Zur Kenntniß der Pedicellineen, von E. Ehlers. Mit 5 Tafeln.

Gedächtnisrede.

8. Julius Weizsäcker († 3. September 1889), von Ludwig Weiland.

Außer den Nachrichten und Abhandlungen sind auch die Gelehrten Anzeigen fortdauernd bemüht gewesen in unparteiischer Gründlichkeit wissenschaftliche Kritik zu üben, soweit es der für unsere Blätter verfügbare Raum möglich macht.

Bei der Beschränktheit der Mittel, die uns für wissenschaftliche Zwecke zu Gebote stehn, haben wir für die gütige Fürsorge

des Königlichen Staatsministeriums der Kultus-, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten, das uns für außerordentliche Ausgaben auf das Jahr 1. April 1890/91 3000 Mk. zur Verfügung gestellt hat, den lebhaftesten Dank auszusprechen.

Von Geschäften, welche in den Sitzungen erledigt worden sind, verdienen folgende kurze Erwähnung.

Die mathematische Gesellschaft in Hamburg feierte am 15. Februar ihr 200jähriges, die physikalisch-oeconomische in Königsberg i./Pr. am 22. Februar ihr 100jähriges Jubiläum. Die Kön. Gesellschaft sendete beiden ihre warmen Glückwünsche, denen Herr Schering für jene, Herr Peter für diese Worte geliehen hat.

In Tauschverkehr ist die Gesellschaft eingetreten mit der Akademie der Wissenschaften zu Stockholm, mit der Kuffnerschen Sternwarte in Ottenring bei Wien, mit dem Nova Scotian Institute of natural science in Halifax.

Die Universitätsbehörden zu Toronto (Canada) zeigten an, daß ihre ganze Bibliothek am 14. Februar ein Raub der Flammen geworden sei, und baten um Beiträge zu einer allmählichen Ersetzung derselben. In Erfüllung dieses Wunsches hat die Gesellschaft die Werke von Gauss in 6 Bänden und die Nachrichten von 1884—1889 durch die Buchhandlung F. A. Brockhaus in Leipzig nach Toronto abgesendet.

Mit Anfang Oktober ist das Direktorat der Gesellschaft an die Mathematische Klasse übergegangen und Herr Ernst Schering durch das Kön. Kuratorium als Director bestätigt worden.

Für dies Jahr hatte die Physikalische Klasse die Preisaufgabe gestellt:

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß dichte oder krystallinische Kalke, zumal des Mittel-Devon, allerlei Umwandlungen erlitten haben, sei es durch Veränderung ihrer Structur, sei es durch Stoffaustausch u. s. w. Die mechanischen und chemischen Vorgänge, welche hierbei mitwirken, sind jedoch durchaus nicht genügend bekannt. Es wird daher gewünscht, daß diese Umwandlungen mit Hülfe chemischer und mikroskopischer Untersuchungen verfolgt und erklärt werden möchten.

Es ist keine Bewerbungsschrift eingegangen.

Die Aufgabe für 1891 lautet nach dem Vorschlag der Mathematischen Klasse:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäss zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Die Aufgabe der Historisch-philologischen Klasse für 1892 ist folgende (s. Nachrichten 1890 S. 116 f.):

Für die älteste Geschichte Attikas ist es von außerordentlicher Bedeutung zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, an denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, dargestellt werde.

Für das Jahr 1893 stellt die Gesellschaft nach dem Vorschlag der Physikalischen Klasse die neue Aufgabe:

Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deforma-

tionen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine directe Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden.

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet, und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte zur Lösung in dem am 14. März 1886 begonnenen fünften Verwaltungszeitraum gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 f. bekannt gemacht, dann 1888 S. 134 ff., 1889 S. 403 ff., 1890 S. 217 ff. wiederholt worden. Die Summe von 3000 Mk., die Herrn Professor Kluckhohn für Aufsuchung und Sammlung von Akten zu einer Geschichte des Bauernkrieges in Thüringen, Sachsen und Hessen bewilligt worden war (Nachrichten 1889 S. 561), ist ganz zur Auszahlung gekommen und die Vorbereitungen für die Ausgabe der Chronik Hermann Korners sind fleißig gefördert worden, sie gehn ihrem Abschluß entgegen.

Durch den Tod verlor die Historisch-philologische Klasse der Gesellschaft am 11. März Johann Gildemeister in Bonn, der seit 1859 ihr als Korrespondent und seit 1884 als auswärtiges Mitglied angehört hatte. Geboren war er am 20. Juli 1812. Am 30. December 1889 starb in London Henry Yule, der 1883 von der Gesellschaft zum Korrespondenten der Historisch-philologischen Klasse gewählt worden war. Noch in frischer Trauer ist die Gesellschaft um den Verlust ihres ordentlichen Mitgliedes in der Physikalischen Klasse Wilhelm Henneberg, der am 22. November starb. Er war seit 1867 Assessor und ordentliches Mitglied seit 1877. Geboren war er am 10. Oktober 1825.

Dagegen wählte die Gesellschaft in ihrer Sitzung am 22. No-

vember zum ordentlichen Mitglied in der Physikalischen Klasse:

Dr. Otto Wallach, Professor der Chemie;

zum auswärtigen Mitglied der Historisch-philologischen Klasse:

Dr. Alexander Conze, Generalsekretär des kaiserlich deutschen archaeologischen Institutes in Berlin, seit 1875 Korrespondenten in derselben Klasse;

zu Korrespondenten in der Historisch-philologischen Klasse:

Clements Robert Markham in London, Kustos im Geographical Departement des India Office und Mitglied des Council der R. Geographical Society of London, und

Dr. Hermann Oldenberg, Professor in Kiel;

zum Korrespondenten in der Physikalischen Klasse:

Dr. Eduard Schnitzer, Emin Pascha, in Bagamoyo in Ostafrika.

Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von F. Klein).

Wenn in der Gauß'schen hypergeometrischen Reihe

$$(1) \qquad F(l,m,n,x) = 1 + \frac{l\cdot m}{n}\frac{x}{1!} + \frac{l(l+1)m(m+1)}{n(n+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

die Elemente l, m, n positive reelle Werte besitzen, so ist klar, daß die Reihe für jedes positive x einen positiven Wert annimmt, und daß es daher keinen zwischen 0 und 1 liegenden Wert von x geben kann, welcher die Gleichung

$$(2) \qquad F(l,m,n,x) = 0$$

befriedigt. Sind dagegen die Elemente l, m, n nicht sämmtlich positiv, so kann die Gleichung (2) möglicher Weise für einen oder mehrere zwischen 0 und 1 liegende Werte von x erfüllt sein, und es entsteht die Aufgabe, genau die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Wurzeln der Gleichung (2) zu ermitteln.

Diese Aufgabe hat Herr Klein neuerdings ganz allgemein erledigt und zwar durch eine sehr schöne Methode, welche die Bestimmung jener Anzahl auf die Bestimmung der möglichen Gestalten von Kreisbogendreiecken zurückführt[1]).

Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, daß man die in Rede stehende Aufgabe auch auf Grund derjenigen Principien lösen kann, welche bei dem Sturm'schen Satze von der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zur Verwendung gelangen. Dieser Sturm'sche Satz beruht bekanntlich auf einem Lemma[2]), welches ich hier zunächst in der allgemeinen Fassung, wie ich es verwenden werde, angeben will.

Die reelle Veränderliche x werde auf das Intervall

$$(J) \ldots a \leqq x \leqq b$$

eingeschränkt. Ferner seien

$$V_0, V_1, V_2, \ldots . V_k \tag{3}$$

reelle Functionen der Veränderlichen x, welche in dem Intervalle J eindeutig und stetig sind und überdies folgenden Bedingungen genügen:

1.) Die Function V_k soll für keinen Wert von x, welcher dem Intervalle J angehört, verschwinden.

2.) Wenn die Function V_i, wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k-1$ bedeutet, an einer Stelle des Intervalles J verschwindet, so sollen an dieser Stelle die Functionen V_{i-1} und V_{i+1} nicht verschwindende Werte von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

3.) Wenn x das Intervall J von a bis b durchläuft, so soll beim Ueberschreiten einer Stelle, wo V_0 verschwindet, der Quotient $\frac{V_0}{V_1}$ von negativen zu positiven Werten übergehen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nun die Anzahl der Stellen, an welchen V_0 in dem Intervalle J verschwindet, gleich

$$N_a - N_b,$$

wo N_a resp. N_b die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (3) für $x = a$ resp. $x = b$ bezeichnet.

Diese Zahlen N_a und N_b kann man, was für das Folgende wichtig ist, auch als die Anzahlen der negativen Werte erklären, welche in der Reihe

---

1) Vergl. die Mitteilung: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe" in No. 10 dieser Nachrichten vom Jahre 1890 (Sitzung vom 2. August), welche weiter ausgeführt demnächst in Heft 4 des 37. Bandes der Mathematischen Annalen erscheinen wird.

2) Vgl. etwa Serret, Cours d'algèbre supérieure, Paris 1877, Bd. 1 pag. 285.

$$(4) \qquad V_0 V_1,\ V_1 V_2,\ V_2 V_3,\ \ldots\ V_{k-1} V_k$$

für $x = a$ bez. $x = b$ auftreten.

Indem ich mich nunmehr der Betrachtung der hypergeometrischen Reihe (1) zuwende, bemerke ich zunächst, daß die Reihe offenbar sinnlos wird, wenn n gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Das Element n unterliegt also der Beschränkung, daß es keinen Wert aus der Reihe

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

besitzen darf. Ich will nun, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, genau dieselbe Beschränkung auch den Elementen l und m auferlegen.

In den hierdurch ausgeschlossenen Fällen reducirt sich die hypergeometrische Reihe auf eine ganze rationale Function von x[1]) und die nachfolgenden Betrachtungen unterliegen dann einer leichten Modification.

Dies vorausgeschickt, stelle ich eine Reihe von Functionen (3) her, in welcher die ersten Glieder V_0 und V_1 bez. die hypergeometrische Reihe $F(l, m, n, x)$ und deren erste Ableitung

$$(5) \qquad \frac{dF}{dx} = \frac{lm}{n} F(l+1, m+1, n+1, x)$$

sind. Dies gelingt leicht auf Grund der Gauß'schen Relationen, welche zwischen je drei aufeinanderfolgenden der Functionen:

$$(6) \qquad F_0 = F(l, m, n, x),\ F_1 = F(l+1, m+1, n+1, x), \ldots,$$
$$F_i = F(l+i, m+i, n+i, x), \ldots$$

bestehen. In der That, man setze

$$(7) \qquad r_0 = -\frac{(l+1)(m+1)}{n(n+1)},\ r_1 = -\frac{(l+2)(m+2)}{(n+1)(n+2)}, \ldots,$$
$$r_i = -\frac{(l+i+1)(m+i+1)}{(n+i)(n+i+1)}, \ldots$$

und bilde nun die Functionen:

$$(8) \qquad \begin{cases} V_0 = F_0, & V_2 = r_0 F_2, \ldots\ldots, & V_{2i} = r_0 r_2 \ldots\ldots r_{2i-2} F_{2i}, \ldots\ldots, \\ V_1 = \dfrac{lm}{n} F_1, & V_3 = \dfrac{lm}{n} r_1 F_3, \ldots, & V_{2i+1} = \dfrac{lm}{n} r_1 r_3 \ldots r_{2i-1} F_{2i+1}, \ldots. \end{cases}$$

1) Für diese Functionen hat Herr Stieltjes (Comptes Rendus, Bd. 100 p. 620) die zugehörigen Sturm'schen Reihen aufgestellt und bemerkt, daß man aus diesen Reihen die Anzahl der reellen Nullstellen der Functionen leicht ableiten kann. Auf anderem Wege gelangte Herr Hilbert (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103 pag. 337) zur Bestimmung dieser Anzahlen.

Dann wird die Reihe

$$V_0,\ V_1,\ V_2,\ \ldots\ V_k, \tag{9}$$

bei geeigneter Wahl der Zahl k, den oben genannten Bedingungen genügen, und zwar für jedes Intervall $a \ldots b$, welches ganz in dem Intervalle $0 \ldots 1$ enthalten ist.

Die erwähnten Gauß'schen Relationen ergeben nämlich das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} V_0 = Q_0\ V_1 - x(1-x)V_2, \\ V_1 = Q_1\ V_2 - x(1-x)V_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{k-2} = Q_{k-2}V_{k-1} - x(1-x)V_k. \end{cases} \tag{10}$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{cases} Q_0 = \dfrac{n}{lm}\left(1 - \dfrac{l+m+1}{n}x\right), \ldots, \\ Q_{2i} = \dfrac{n}{lm}\dfrac{r_0 r_2 \ldots r_{2i-2}}{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}}\left(1 - \dfrac{l+m+4i+1}{n+2i}x\right), \ldots \\ Q_1 = \dfrac{lm}{n}\cdot\dfrac{1}{r_0}\left(1 - \dfrac{l+m+3}{n+1}x\right), \ldots, \\ Q_{2i+1} = \dfrac{lm}{n}\cdot\dfrac{1}{r_0}\cdot\dfrac{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2i}}\left(1 - \dfrac{l+m+4i+3}{n+2i+1}x\right), \ldots \end{cases} \tag{11}$$

gesetzt ist.

Die Funktion V_k unterscheidet sich nur um einen constanten, nicht verschwindenden Factor von

$$F_k = F(l+k, m+k, n+k, x).$$

Wählen wir daher die k Zahl so, daß $l+k$, $m+k$, $n+k$ positiv werden, so ist V_k in dem Intervall $0 \ldots 1$ beständig von Null verschieden, und die Bedingung 1) ist also erfüllt. Indem wir beachten, daß die Factoren $Q_0, Q_1, \ldots$ sämmtlich endlich sind, schließen wir sodann aus dem Gleichungssystem (10), daß auch die Bedingung 2) erfüllt ist. Endlich genügt die Reihe (9) auch der Bedingung 3), weil V_1 die Ableitung der Function V_0 ist.

Beachten wir jetzt, daß

$$V_i V_{i+1} = \frac{lm}{n} r_0 r_1 r_2 \ldots r_{i-1} F_i F_{i+1}$$

dasselbe Vorzeichen besitzt, wie

$$(-1)^i \cdot \frac{l_{i+1} m_{i+1}}{n+i} F_i F_{i+1},$$

wo zur Abkürzung

$$(12) \qquad l_i = l(l+1)\dots(l+i-1),\ m_i = m(m+1)\dots(m+i-1)$$

gesetzt ist, so erhalten wir den Satz:

Bedeuten a und $b > a$ zwei zwischen 0 und 1 liegende Größen, und bildet man die Reihe

$$(13) \qquad \frac{l_1 m_1}{n} F_0 F_1, -\frac{l_2 m_2}{n+1} F_1 F_2, \dots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1} F_{k-1} F_k,$$

so giebt $N_a - N_b$ die Anzahl der Nullstellen von

$$F_0 = F(l, m, n, x)$$

an, welche zwischen a und b liegen, wenn N_a bez. N_b die Anzahl der negativen Glieder bezeichnen, welche in der Reihe (13) für $x = a$ bez. $x = b$ auftreten.

Die Zahl k ist dabei nur der einen Bedingung unterworfen, daß die Größen

$$l+k,\ m+k,\ n+k$$

positiv sein müssen[1]). Die in dem Ausspruch des Satzes benutzten Abkürzungen werden durch die Gleichungen (6) und (12) erklärt.

Um die Gesammtzahl der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ in dem Intervall $0 < x < 1$ zu bestimmen, brauchen wir unseren Satz nur auf den Fall anzuwenden, wo a in der Nähe des Wertes $x = 0$ und b in der Nähe des Wertes $x = 1$ liegt.

Wir werden also

$$a = \varepsilon,\ b = 1 - \eta$$

setzen, wo ε und η genügend klein zu wählende positive Größen bezeichnen. Lassen wir x in 0 übergehen, so nehmen die Functionen (13) die Werte an:

$$(14) \qquad \frac{l_1 m_1}{n}, -\frac{l_2 m_2}{n+1}, \dots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1}.$$

Um die Werte jener Functionen in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu beurtheilen, werde ich die bekannte Gleichung

$$(15) \qquad F(l, m, n, x) = (1-x)^{n-l-m} F(n-l, n-m, n, x)$$

---

1) Der Satz gilt auch noch, wenn eines oder jedes der Elemente l, m gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Nur hat man dann für k die erste Zahl der Reihe 0, 1, 2, 3,... zu wählen, für welche eine der beiden Größen $l+k$, $m+k$ verschwindet.

benutzen. Dabei setze ich voraus, daß

$$n \leqq l+m \tag{16}$$

sei. Diese Voraussetzung beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit. Denn würde

$$n > l+m$$

sein, so wäre

$$n < (n-l)+(n-m)$$

und wir würden an Stelle von $F(l, m, n, x)$ die Function $F(n-l, n-m, n, x)$ betrachten, welche der Gleichung (15) zufolge zwischen 0 und 1 dieselben Nullstellen besitzt wie $F(l, m, n, x)$.

Lassen wir nun, unter der Voraussetzung, daß $n < l+m$ ist, x wachsend in 1 übergehen, so geht $F(n-l, n-m, n, x)$ stetig in

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(l+m-n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}$$

über. Daher hat $F(l, m, n, x)$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}.$$

Dieses gilt, wie man leicht erkennt, nicht nur für $n < l+m$, sondern auch für $n = l+m$. Da nun aus der Ungleichung (16) folgt, daß auch

$$n+i < (l+i)+(m+i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so besitzt $F_i F_{i+1}$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen, wie

$$\frac{\Gamma(n+i)\,\Gamma(n+i+1)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)\,\Gamma(l+i+1)\,\Gamma(m+i+1)} = \frac{n+i}{(l+i)(m+i)}\left[\frac{\Gamma(n+i)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)}\right]^2,$$

also dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{n+i}{(l+i)(m+i)}.$$

Daher haben die Glieder der Reihe (13) in der Nähe von $x = 1$ dieselben Vorzeichen, wie die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1, -l_1 m_1, l_2 m_2, \ldots. (-1)^{k-1} l_{k-1} m_{k-1}. \tag{17}$$

Kommen also in der Reihe (14) N_0 negative Glieder, in der Reihe (17) N_1 negative Glieder vor, so ist

$$N = N_0 - N_1$$

die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Nullstellen von $F(l, m, n, x)$.

Die Zahlen N_0 und N_1 können wir sofort näher bestimmen, wenn wir die verschiedenen Fälle unterscheiden, welche den möglichen Vorzeichencombinationen der Elemente l, m, n entsprechen. Dabei wollen wir

$$l \geqq m \tag{18}$$

voraussetzen, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, da $F(l, m, n, x)$ bei Vertauschung von l und m in sich übergeht. Ferner möge, wenn l negativ ist, λ die erste Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ sein, für welche $l+\lambda$ positiv wird, so daß in der Reihe

$$l, l+1, l+2, \ldots . l+\lambda-1, l+\lambda, \ldots$$

$l+\lambda-1$ das letzte negative Glied ist. Die entsprechende Bedeutung mögen μ und ν in Rücksicht auf m und n erhalten.

Die Discussion der verschiedenen Fälle, bei welcher man die Ungleichungen (16) und (18) zu beachten hat, ergiebt nun die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Resultate:

	l	m	n	N
I.	+	+	−	$\frac{1-(-1)^{\nu}}{2}$
II.	+	−	+	μ
III.	+	−	−	$\mu-\nu$, für $\mu \geqq \nu$ $\frac{1-(-1)^{\mu+\nu}}{2}$, für $\mu \leqq \nu$
IV.	−	−	−	$\frac{1-(-1)^{\lambda+\mu+\nu}}{2}$

Wie diese Tabelle aufzufassen ist, erhellt aus folgendem Satze:

Sind die Elemente l, m, n sämmtlich negativ (Fall IV der Tabelle), so verschwindet $F(l, m, n, x)$ zwischen 0 und 1 kein Mal oder ein Mal, je nachdem $\lambda+\mu+\nu$ gerade oder ungerade ist.

Man wird sich leicht überzeugen, daß die Tabelle mit den von Herrn Klein gefundenen Resultaten vollständig im Einklang steht.

Schließlich will ich noch bemerken, daß man die Frage nach der Gesammtheit der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$, gleichgültig ob

l, m, n reelle oder complexe Werte besitzen, auch auf Grund der allgemeinen Sätze, welche ich an anderer Stelle entwickelt habe[1]), in Angriff nehmen kann. Man hat dann die Wurzeln der ganzen rationalen Functionen, welche als Nenner in den Näherungsbrüchen der Kettenbruch-Entwicklung von $\frac{F(l, m+1, n+1, x)}{F(l, m, n, x)}$ auftreten, zu untersuchen. Ob diese Untersuchung auch für die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zu einfachen Resultaten führt, vermag ich indessen nicht zu übersehen.

Königsberg in Pr., 30. November 1890.

1) „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function". Mathematische Annalen, Bd. 33.

Inhalt von No. 16.

Eduard Riecke, Moleculartheorie der Diffusion und electrolytischen Leitung. — *F. Auerbach*, absolute Härtemessung. — *W. Voigt* und *P. Drude*, Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien. — Jahresbericht des beständigen Sekretärs. — *A. Hurwitz*, über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-1493

All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

'5 1978